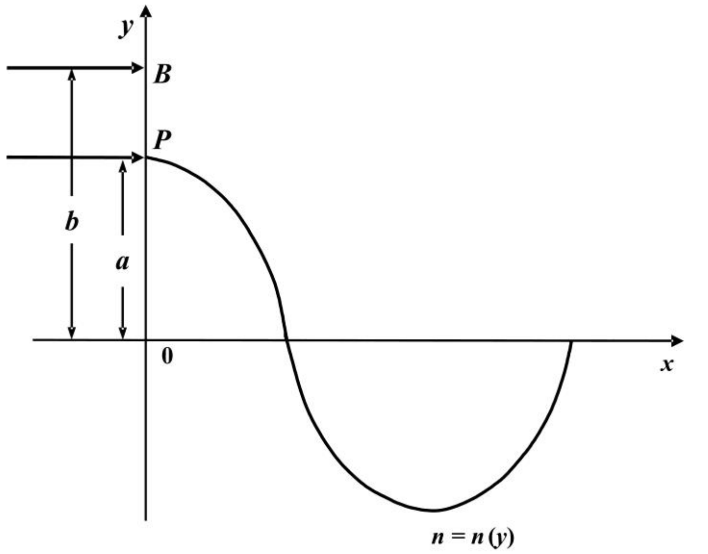
Bieg po sinusoidzie promienia świetlnego
– zadanie z XXVII Olimpiady fizycznej 1977/1978

Stopień II, zadanie teoretyczne

Na powierzchnię ośrodka o współczynniku załamania zależnym od y, w punkcie P pada prostopadle do powierzchni promień świetlny.

1. Jaka powinna być postać funkcji $n(y)$, aby wewnątrz ośrodka promień świetlny biegł po sinusoidzie?
2. Czy można tak dobrać postać funkcji $n(y)$, aby dowolne dwa promienie padające prostopadle na rozważany ośrodek (np. w punktach P i B pokazanych na rysunku 1) poruszały się po sinusoidach o tym samym okresie?



Rys. 1

Zadanie zostało udostępnione z bazy zadań Olimpiady Fizycznej w Szczecinie (zadanie wraz z rozwiązaniem zostało opublikowane w czasopiśmie *Fizyka w Szkole* nr 6, 1978 i w zbiorze „Olimpiada Fizyczna XXVII–XXVIII", WSiP, Warszawa 1983, s. 42–44 przez ówczesnego kierownika naukowego – Waldemara Gorzkowskiego i kierownika organizacyjnego – Andrzeja Kotlickiego z Komitetu Głównego Olimpiady Fizycznej). Nawiązuje ono do zadania z I stopnia XXVII Olimpiady Fizycznej – *Ruch promienia świetlnego w kuli niejednorodnej optycznie* i wcześniejszego z zawodów finałowych XXIV Olimpiady Fizycznej – *Bieg promienia świetlnego po paraboli* (było opublikowane w *Fotonie* 127, Zima 2014), jak też do zadania na VII Międzynarodowej Olimpiadzie Fizycznej (Warszawa 1974 r.) – *Płytka o zmiennym współczynniku* *załamania*. Wymienione zadania znajdują się na stronie w bazie zadań olimpiady fizycznej – www.olimpiada.fizyka.szc.pl, która jest prowadzona przez przewodniczącego Komitetu Okręgowego OF w Szczecinie dra Tadeusza Molendę.

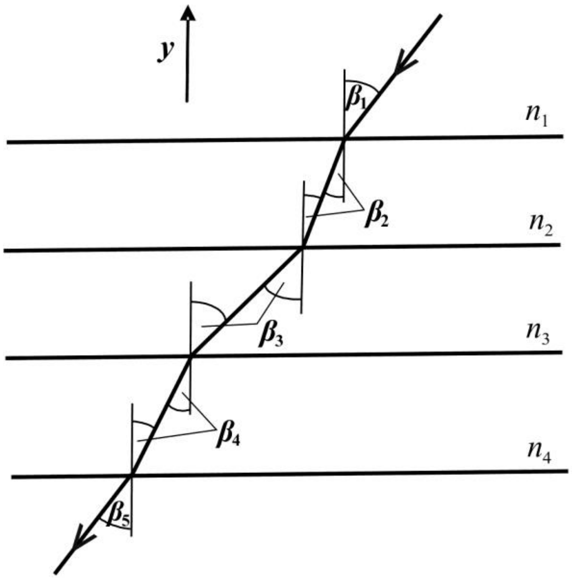
Zadania z olimpiad fizycznych są na ogół oryginalne. Pomysły pochodzą z różnych źródeł, też składanych przez nauczycieli i samych zawodników olimpiady. Propozycje zadań były zmieniane w wyniku dyskusji w Komitecie Głównym OF i często nie przypominają tekstu „pomysłodawcy" (przyp. – Tadeusz Molenda, Instytut Fizyki, Uniwersytet Szczeciński).

Realizację doświadczalną biegu promienia świetlnego po sinusoidzie przedstawiono w artykule: T. Molenda, *Miraże a krzywoliniowe rozchodzenie się światła* cd., *Neutrino* 29.

Rozwiązanie

Rozpatrzmy promień światła przechodzący przez szereg płasko-równoległych płytek o różnych współczynnikach załamania światła – rys. 2. Dla takiego układu płytek z prawa załamania mamy:

$$\frac{\sin\beta_i}{\sin\beta_{i+1}} = \frac{n_{i+1}}{n_i}$$



Rys. 2

Wynika stąd, że

$$n_i \sin\beta_i = \text{const.}$$

Związek ten nie zależy ani od grubości, ani od liczby płytek, wobec tego dla ciągłego rozkładu współczynnika załamania wzdłuż osi y możemy napisać

$$n(y)\sin\beta(y) = n(a)\sin 90° = n(a),$$

stąd

$$\sin\beta(y)=\frac{n(a)}{n(y)}.$$

Równanie sinusoidy przechodzącej przez punkt P i stycznej w punkcie P do promienia padającego

$$y=a\cos kx,$$

gdzie k jest jakąś stałą.

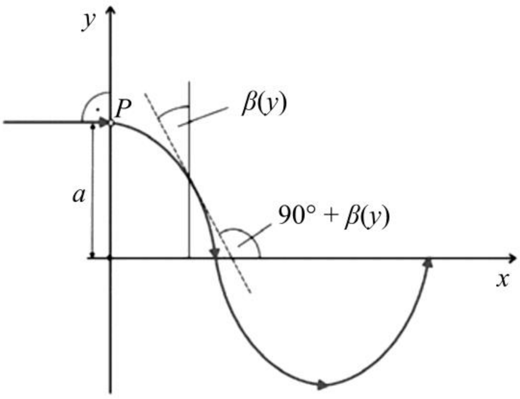
Tangens kąta $90°+\beta(y)$ – nachylenia stycznej (rys. 3), jest pochodną funkcji $y(x)=a\cos kx$

$$\mathrm{tg}(90°+\beta(y))=-ak\sin kx,$$

$$\mathrm{tg}(90°+\beta(y))=-\mathrm{ctg}\,\beta(y),$$

ale

$$\sin kx=\sqrt{1-\cos^2 kx}=\sqrt{1-\frac{y^2}{a^2}}.$$



Rys. 3

Biorąc pod uwagę, że $\mathrm{ctg}^2\alpha=\dfrac{1}{sin^2\alpha}-1$ można napisać

$$\frac{1}{\sin^2\beta(y)}=1+k^2(a^2-y^2).$$

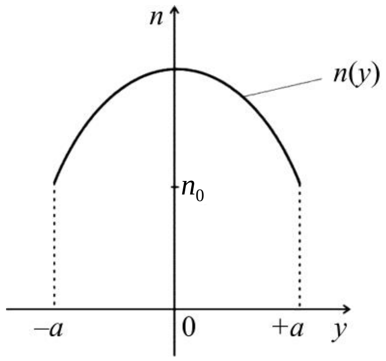
Korzystając z otrzymanego poprzednio wyrażenia na $\sin\beta(y)$ dostajemy

$$\frac{n^2(y)}{n^2(a)}=1+k^2(a^2-y^2),$$

czyli

$$n(y) = n(a)\sqrt{1 + k^2(a^2 - y^2)}\ .$$

Otrzymaliśmy zależność współczynnika załamania *n* od wartości *y*, co z ilustrowano na rys. 4.



Rys. 4. Wykres funkcji $n(y) = n_0\sqrt{1 + k^2(a^2 - y^2)}$

Jeżeli promienie padające na ten sam ośrodek w punktach *P* i *B* miałyby poruszać się po sinusoidach o tym samym okresie, to musiałaby zachodzić tożsamość

$$n(a)\sqrt{1 + k^2(a^2 - y^2)} = n(b)\sqrt{1 + k^2(b^2 - y^2)}\ .$$

Tożsamość ta dla $a \neq b$ nie może zachodzić, zatem odpowiedź na pytanie 2 jest negatywna.

Opracował: Tadeusz Molenda.