Zadanie z mechaniki w arkuszu maturalnym

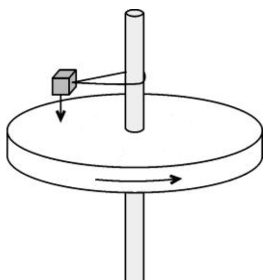
Jadwiga Salach

Podczas tegorocznej matury w arkuszu przeznaczonym dla poziomu rozszerzonego znalazło się zadanie dotyczące niesprężystego zderzenia ciężarka z obracającym się krążkiem. W poleceniach nie żądano od uczniów dogłębnej analizy tego zjawiska, należało jedynie obliczyć wartość prędkości kątowej układu po zderzeniu, czas, po którym ta wspólna prędkość została osiągnięta i stratę energii mechanicznej. Sam problem jest jednak ciekawy i może być pouczający ze względu na możliwość rozpatrywania ruchu ciężarka w różnych układach odniesienia, a także możliwość pokazania, że w opisanym zjawisku oprócz zasady zachowania momentu pędu łatwo jest zastosować trzecią zasadę dynamiki dla ruchu obrotowego, co rzadko się w takich przypadkach czyni. Polecenie obliczenia czasu trwania zderzenia sugeruje potrzebę rozważenia, co w tym czasie dzieje się z krążkiem lub/i z ciężarkiem, czego nie musi się robić, stosując zasadę zachowania momentu pędu.

Przytoczmy najpierw w całości (i dosłownie) temat zadania 1, zawartego w arkuszu maturalnym:

Zadanie 1.

Krążek o momencie bezwładności 0,01 kg·m^2 obracał się bez tarcia wokół swojej osi z prędkością kątową 32 rad/s. Na ten krążek spadł ciężarek o masie 0,6 kg, upuszczony bez prędkości początkowej. Ciężarek był połączony z osią krążka nitką ślizgającą się po osi bez tarcia (rys. 1). Po chwili ciężarek zaczął się obracać razem z krążkiem, pozostając w odległości 10 cm od osi obrotu. Rozmiary ciężarka można pominąć.



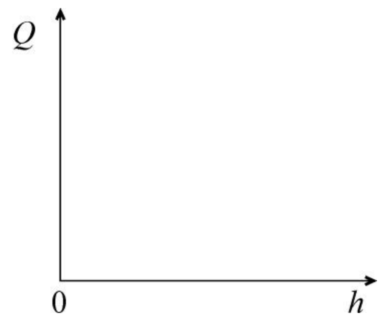
Rys. 1.

1.1. Napisz nazwę zasady zachowania, która pozwala wyznaczyć wspólną prędkość kątową krążka i ciężarka. Oblicz wartość tej prędkości kątowej.

1.2. Współczynnik tarcia ciężarka o krążek wynosi 0,3. Ponadto zakładamy, że można pominąć efekty uderzenia przy upadku (tzn. przyjąć, że wysokość spadku była bardzo mała). Korzystając z powyższych informacji wyprowadź wzór na moment siły oddziaływania ciężarka na krążek oraz oblicz, po jakim czasie od upadku ciężarka jego poślizg ustał i prędkość kątowa krążka osiągnęła wartość końcową 20 rad/s.

1.3. Początkowo ciężarek znajdował się na wysokości 40 cm nad krążkiem. Oblicz całkowitą energię mechaniczną układu
a) w sytuacji początkowej,
b) po upadku ciężarka oraz zmniejszeniu prędkości kątowej krążka do wartości 20 rad/s.
Oblicz ciepło wydzielone w czasie upadku.

1.4. Doświadczenie opisane w informacji wstępnej wykonano kilkakrotnie, zmieniając wysokość spadku ciężarka. Naszkicuj wykres zależności wydzielonego ciepła *Q* od wysokości spadku *h* (rys. 2). Na wykresie nie nanoś wartości liczbowych.

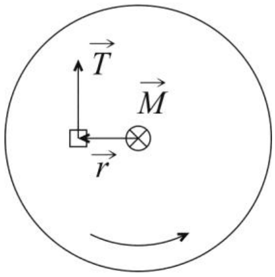


Rys. 2.

Nie komentując samego sposobu sformułowania tematu, odniosę się krytycznie jedynie do użytego dwukrotnie pojęcia „wydzielone ciepło”. Podczas niesprężystego zderzenia ciężarka z krążkiem część energii mechanicznej układu została zamieniona na jego energię wewnętrzną (co objawiło się niewielkim wzrostem temperatury ciężarka i krążka) i proces ten nie ma nic wspólnego z ciepłem. Dopiero w następstwie wzrostu temperatury układu część jego energii wewnętrznej została przekazana chłodniejszemu otoczeniu w postaci ciepła. W dalszych rozważaniach pominę tę część tematu, zajmę się oddziaływaniem ciężarka z krążkiem.

Autor zadania, formułując polecenie 1.2 wyraźnie ukierunkowuje ucznia na zajęcie się ruchem opóźnionym krążka.

widok z góry



Rys. 3.

Moment siły tarcia działającej na krążek (zwrócony pod rysunek 3):

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{T},$$

a jego wartość: $$M = \mu mgr,$$

gdzie μ jest współczynnikiem tarcia, a m masą ciężarka. Korzystając z drugiej zasady dynamiki dla ruchu obrotowego krążka

$$\varepsilon = \frac{M}{I}$$

i z definicji wartości przyspieszenia kątowego

$$\varepsilon = \frac{\omega_0 - \omega}{t},$$

możemy łatwo obliczyć czas zmniejszania się prędkości kątowej:

$$\frac{\mu mgr}{I} = \frac{\omega_0 - \omega}{t}, \qquad t = \frac{(\omega_0 - \omega)I}{\mu mgr}.$$

Po podstawieniu wartości liczbowych otrzymujemy:

$$t = \frac{(32-20)\frac{1}{\mathrm{s}} \cdot 0{,}01\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2}{0{,}3 \cdot 0{,}6\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 0{,}1\,\mathrm{m}} = \frac{2}{3}\,\mathrm{s}.$$

Po takim czasie ustali się prędkość kątowa układu, tzn. krążek przestanie zwalniać, a ciężarek przestanie przyspieszać, zatem ustanie poślizg.

Zadanie można rozwiązać inaczej, stosując trzecią zasadę dynamiki dla ruchu obrotowego – momenty sił wzajemnego oddziaływania ciężarka i krążka mają takie same wartości i przeciwne zwroty. Pod działaniem momentu siły tarcia pochodzącego od krążka ciężarek (który początkowo spoczywał w układzie laboratoryjnym) doznał przyspieszenia kątowego $\vec{\varepsilon}_c$ o wartości $\varepsilon_c = \frac{\omega}{t}$.

Drugą zasadę dynamiki stosujemy teraz do ruchu przyspieszonego ciężarka:

$$\varepsilon_c = \frac{M}{I_c},$$

$$\frac{\omega}{t} = \frac{\mu m g r}{m r^2}, \qquad t = \frac{r\omega}{\mu g}.$$

Po podstawieniu wartości liczbowych otrzymamy wynik:

$$t = \frac{0{,}1\,\mathrm{m} \cdot 20\frac{1}{\mathrm{s}}}{0{,}3 \cdot 10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = \frac{2}{3}\,\mathrm{s}.$$

Obydwa ruchy (krążka i ciężarka) zostały opisane w układzie laboratoryjnym.

Rozważmy ruch ciężarka w układzie odniesienia, związanym z krążkiem. W czasie t odważnik ślizga się po krążku, jego początkowa prędkość kątowa w tym układzie ma wartość ω_0, a liniowa $v_0 = \omega_0 r$; końcowa prędkość jest równa zeru (ustaje poślizg). Zatem względem krążka ciężarek porusza się ruchem jednostajnie opóźnionym z przyspieszeniem o wartości

$$\varepsilon_{c,wzgl} = \frac{\omega_0}{t} \text{ zwróconym w górę.}$$

Aby skorzystać z drugiej zasady dynamiki, tak jak robiliśmy to w poprzednich rozumowaniach, musimy ustalić, jaka jest wartość momentu siły hamującej ruch ciężarka w tym układzie odniesienia. Układ związany z krążkiem to układ nieinercjalny, więc oprócz rzeczywistej siły tarcia na ciężarek działa jeszcze siła bezwładności unoszenia $\vec{F}_b$* (rys. 4), której wartość jest równa iloczynowi masy m i wartości przyspieszenia stycznego punktu krążka odległego o r od osi, tzn. $\varepsilon_k \cdot r$, gdzie

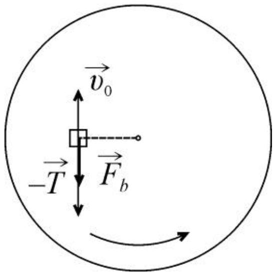
$$\varepsilon_k = \frac{\mu m g r}{I}$$

(patrz początkowa część rozwiązania). Ostatecznie

$$F_b = m\frac{\mu m g r}{I} \cdot r = \frac{\mu g m^2 r^2}{I}.$$

* Siła odśrodkowa bezwładności jest zrównoważona przez siłę sprężystości nitki.

widok z góry



Rys. 4.

Teraz możemy zapisać drugą zasadę dynamiki dla ruchu ciężarka po okręgu w układzie krążka:

$$\varepsilon_{c,wzgl} = \frac{(F_b + T)r}{mr^2} = \frac{F_b + T}{mr},$$

$$\frac{\omega_0}{t} = \frac{\frac{\mu g m^2 r^2}{I} + \mu m g}{mr} = \mu g\left(\frac{mr}{I} + \frac{1}{r}\right) = \mu g \frac{mr^2 + I}{Ir},$$

skąd
$$t = \frac{\omega_0 Ir}{\mu g(mr^2 + I)}.$$

Otrzymaliśmy trzeci wzór na czas zderzenia, inny niż dwa poprzednie, jednak po podstawieniu wartości

$$t = \frac{32\frac{1}{\mathrm{s}} \cdot 0{,}01\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2 \cdot 0{,}1\,\mathrm{m}}{0{,}3\cdot 10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}(0{,}6\cdot 0{,}01 + 0{,}01)\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2} = \frac{2}{3}\,\mathrm{s}$$

wynik liczbowy jest taki sam!

Spójrzmy jeszcze na ten problem z punktu widzenia względności ruchu. Przyspieszenie kątowe ciężarka w układzie laboratoryjnym powinno być równe sumie przyspieszeń ciężarka względem krążka i przyspieszenia krążka. Sprawdzimy, że tak jest istotnie. Obliczmy wartości liczbowe tych przyspieszeń:

- Przyspieszenie ciężarka w układzie odniesienia krążka ma wartość:

$$\varepsilon_{c,wzgl} = \frac{\omega_0}{t} = \frac{32\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}}{\frac{2}{3}\,\mathrm{s}} = 48\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}^2}.$$

$\vec{\varepsilon}_{c,wzgl}$ jest zwrócone w górę – ruch opóźniony, dla osoby patrzącej z góry zgodny z ruchem wskazówek zegara.

- Przyspieszenie krążka (w układzie laboratoryjnym) ma wartość:

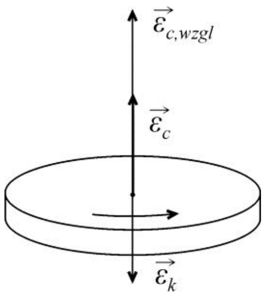
$$\varepsilon_k = \frac{\omega_0 - \omega}{t} = \frac{(32-20)\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}}{\frac{2}{3}\ \text{s}} = 18\ \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}.$$

$\vec{\varepsilon}_k$ jest zwrócone w dół – ruch opóźniony, dla osoby patrzącej z góry zgodny z ruchem wskazówek zegara.

- Przyspieszenie ciężarka w układzie laboratoryjnym ma wartość:

$$\varepsilon_c = \frac{\omega}{t} = \frac{20\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}}{\frac{2}{3}\ \text{s}} = 30\ \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}.$$

$\vec{\varepsilon}_c$ jest zwrócone w górę – ruch przyspieszony, dla osoby patrzącej z góry zgodny z ruchem wskazówek zegara (rys. 5).



Rys. 5.

Istotnie $\vec{\varepsilon}_c = \vec{\varepsilon}_{c,wzgl} + \vec{\varepsilon}_k$.