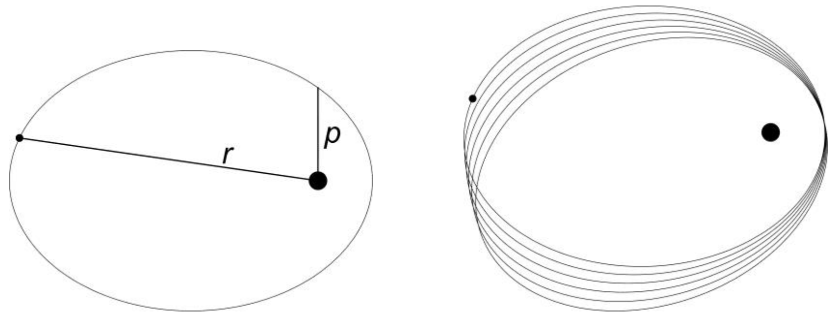
Zamknięte orbity wokół czarnych dziur

Dominika Hunik

Studentka V roku astronomii
Obserwatorium Astronomiczne UJ

Często przeciwstawia się sobie wydłużone orbity newtonowskie, które są zawsze zamknięte[*] i analogiczne orbity znane z Ogólnej Teorii Względności, które nie są zamknięte. Otóż mało znanym faktem jest istnienie klasy orbit zamkniętych wokół czarnych dziur. Mają one postać „rozetek” przypominających epicykloidy.



(a) (b)

Rys. 1. Przykłady orbity newtonowskiej (a) oraz odpowiednika w Ogólnej Teorii Względności z precesją (b)

Ogólna Teoria Względności wprowadza istotne zmiany zarówno w opisie ruchu cząstek posiadających masę, jak i fotonów. W rezultacie powstają takie zjawiska jak zmiana pozycji na niebie gwiazd położonych blisko Słońca, soczewkowanie grawitacyjne lub zmiany kształtu orbit. Ten ostatni efekt sprawia, że trajektorie obiektów różnią się od opisanych przez newtonowską grawitację, a przy odpowiednich warunkach mogą tworzyć zamknięte pętle.

Zacznijmy od ogólnego opisu zmiany kształtu orbit. Najsłynniejszym przypadkiem obserwacji rozbieżności jest ruch Merkurego dookoła Słońca. Ze względu na bliskość macierzystej gwiazdy zaobserwowanie efektów relatywistycznych jest łatwiejsze dla tej planety niż dla innych. Zgodnie z prawami Keplera, Merkury powinien poruszać się po orbicie eliptycznej. Jeśli odległość od Słońca jest minimalna, znajduje się on w peryhelium, jeśli maksymalna – w aphelium. Ruch najwygodniej jest opisać w układzie biegunowym, gdzie

[*] W przypadku orbit związanych, np. planet, planetoid itp. Nie dotyczy to niektórych komet, tzw. jednopojawieniowych.

współrzędnymi są: odległość r planety (w przybliżeniu punkt) od środka układu oraz odległość kątowa od ustalonego kierunku odniesienia ϕ. Trajektoria obiektu jest opisana wzorem

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\phi}, \tag{1}$$

gdzie p i e (mimośród) są stałymi. W rzeczywistości obserwuje się precesję peryhelium. Oznacza to, że punkt ten przesuwa się po orbicie, a planeta osiąga minimum odległości w innych miejscach w dwóch kolejnych obiegach. Zjawisko zostało zilustrowane na rys. 2. Początkowo próbowano wytłumaczyć rozbieżności na gruncie mechaniki Newtona wpływem innych planet, jednak nie przyniosło to pożądanych rezultatów. Zaproponowano nawet, że wewnątrz orbity Merkurego mogłaby krążyć jeszcze jedna planeta, ale nie udało się jej odnaleźć. Wyjaśnienie nadeszło dopiero wraz z pojawieniem się Ogólnej Teorii Względności.

Według Ogólnej Teorii Względności czas i przestrzeń opisywane są razem jako czasoprzestrzeń, która ulega zakrzywieniu pod wpływem masy i energii. Trajektorie obiektów różnią się od opisywanych przez klasyczną grawitację. Wtedy rozwiązanie równań ruchu przyjmuje odmienną postać

$$\phi = \frac{2}{(1 - 6\mu + 2\mu e)^{\frac{1}{2}}} F\left(\frac{\chi}{2}, k\right), \quad \mu = \frac{GM}{c^2 p} = \frac{1}{2}\frac{R_g}{p} \tag{2}$$

gdzie ϕ jest współrzędną kątową planety, χ funkcją odległości r

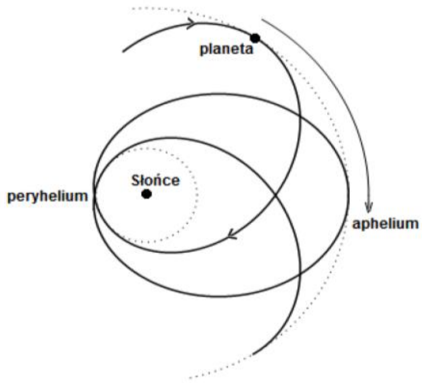
$$r = \frac{p}{1 + e\cos\chi},$$

natomiast k i μ zależą od krętu, czyli momentu pędu i energii ciała. R_g to „promień" horyzontu czarnej dziury, proporcjonalny do jej masy M. Dokładna formuła, pozwalająca obliczyć k, ma postać

$$k^2 = \frac{4\mu e}{1 - 6\mu + 2\mu e}. \tag{3}$$

Stałe p i e określają kształt orbity. Pierwsza z nich odpowiada za to, jak duży jest efekt precesji, druga – za eliptyczność orbity.

Funkcja F we wzorze (2) jest całką eliptyczną, której wartość można obliczyć na przykład za pomocą programu *Mathematica* jako *EllipticF*. Jeżeli $p \gg R_g$, czyli orbita nie zbliża się do czarnej dziury, to $\phi = \chi$ i otrzymujemy newtonowski wzór (1).



Rys. 2. Precesja orbity dookoła Słońca. Linia ciągła przedstawia trajektorię planety, natomiast linie przerywane wyznaczają granice ruchu. Położenia peryhelium i aphelium zmieniają się w kolejnych obiegach wokół ciała centralnego

W ogólnym przypadku otrzymane w ten sposób trajektorie nie są krzywymi zamkniętymi, jednak można znaleźć warunki, dla których przybierają taką postać. Jeśli przyjrzymy się dokładnej postaci funkcji χ, to okaże się, że kolejne peryhelia są osiągane wtedy, gdy χ zmienia się o 2π. Stąd można wywnioskować, że aby ciało zakreśliło krzywą zamkniętą, całkowita wielokrotność ϕ musi być równa całkowitej wielokrotności 2π. Parametry, dla których orbita jest zamknięta, możemy więc znaleźć, wybierając takie wartości, aby zachodziła zależność

$$\frac{n}{m}\pi = \frac{2}{(1-6\mu+2\mu e)^{\frac{1}{2}}} K(k)\,, \tag{6}$$

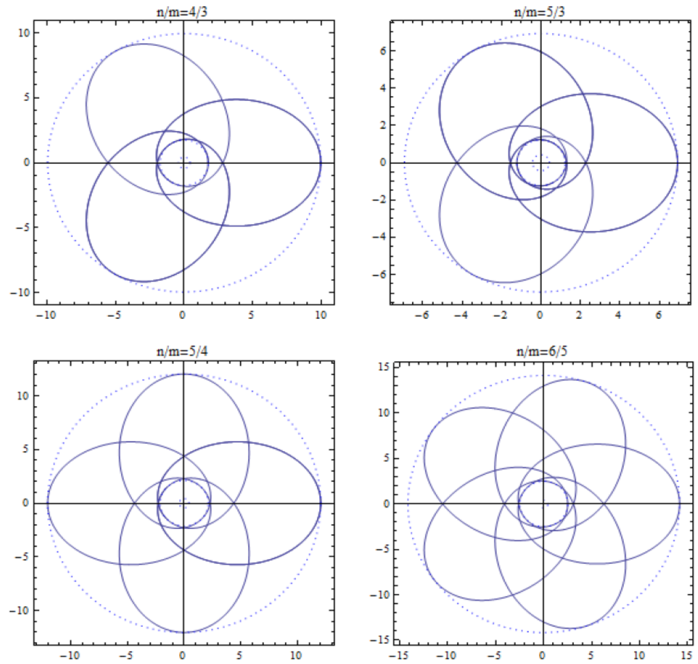
gdzie K jest zupełną całką eliptyczną pierwszego rodzaju.
Przykładowe rezultaty zostały zilustrowane na rys. 3. Aby samodzielnie otrzymać analogiczne krzywe w programie *Mathematica* można posłużyć się poniższymi formułami.

Najpierw obliczamy numerycznie *p*:

```
(* Początek *)
R = 1 (* Jako jednostkę długości bierzemy promień czarnej dziury *)

e = 0.7 (* mimośród orbity 0<e<1 *)
k = 2 R e/p/Sqrt[1 - 3 R/p + R/p*e]
n = 4; m = 3; (* Parametry orbity zamkniętej, liczby naturalne, n>m *)

(* Linijka poniżej to numeryczne obliczenie parametru p, dla którego orbita się zamyka. Jeżeli zamiast tego podamy inną wartość, lub n,m będzie niewymierne/przestępne, np.:
```

n=Pi lub n=Sqrt[2], to orbita się nie zamknie. Dla p/R rzędu kilkudziesięciu otrzymamy powolną precesję orbity eliptycznej, dla p/R około 10 skomplikowane krzywe. *)

```
p = p /. FindRoot[
   n/m Pi == 2/Sqrt[1 - 3 R/p + R/p*e] EllipticK[k^2], {p, 2 R}] // Chop

f = 2/Sqrt[1 - 3 R/p + R/p*e] EllipticF[X/2, k^2]
r = p/(1 + e Cos[X])
ParametricPlot[
 {r Cos[f], r Sin[f]},
 {X, 0, 2 Pi m n}]

(* Koniec *)
```



Rys. 3. Orbity zamknięte otrzymane dla $M = \frac{3}{14}$, $e = 0{,}7$ dla wybranych stosunków $\frac{n}{m}$

Jak widać na rysunkach, po uwzględnieniu dokładnych obliczeń, wynikających z Ogólnej Teorii Względności, peryhelium planety może ulegać takiemu przesunięciu, że trajektoria utworzy orbitę zamkniętą. Jednak przypadki, które zostały zilustrowane, wynikają jedynie z obliczeń, a w praktyce nie są obserwowane. Dokładne trajektorie w otoczeniu czarnej dziury Kerra znalazły ostatnio zastosowanie w dosyć nieoczekiwanym miejscu. Mowa o Hollywood, a konkretnie wizualizacji w filmie *Interstellar*.