



Dyfrakcja światła na otworze kołowym, czyli po co fizykowi całkowanie numeryczne?

*Jerzy Ginter
Uniwersytet Warszawski*

Postawienie problemu

Światło ma naturę falową, ulega więc dyfrakcji. Zajmiemy się tu jednym z takich przykładów: dyfrakcji na otworze kołowym. Jest ona łatwa do zaobserwowania. Natomiast jej opis teoretyczny jest dość złożony. Jeżeli chcemy ją opisać analitycznie, musimy użyć funkcji specjalnych – tak zwanych funkcji Bessela. Stanowiąc to może trudność nie tylko dla uczniów szkolnych, ale i dla studentów niższych lat studiów. Można jednak uzyskać bardzo dobrą dokładność opisu dyfrakcji na otworze kołowym, jeżeli zastosować prostą metodę całkowania numerycznego.

Obraz dyfrakcyjny

Przypuśćmy, że rzuciliśmy równoległą wiązkę światła monochromatycznego na mały otworek kołowy o promieniu R , prostopadle do płaszczyzny przesłony, w której otworek został wykonany. Światło, które przez ten otwór przeszło, wytwarza obraz dyfrakcyjny na ekranie, który jest do przesłony równoległy i znajduje się w odległości L od otworka, znacznie większej od promienia otworka R ($L \gg R$).

Są dwa proste sposoby obejrzenia takiego obrazu dyfrakcyjnego.

Doświadczenie 1

Do doświadczenia potrzebne są: wskaźnik laserowy, kawałek folii aluminiowej (lepiej jest gruba, „od kwiatów”), igła.

1. Ostrzem igły wykonujemy jak najmniejszy otworek w folii aluminiowej. Powinien on mieć średnicę około 0,1 milimetra.
2. Kierujemy na otwór wiązkę światła wskaźnika laserowego.
3. Obraz oglądamy na ekranie oddalonym o kilka metrów (na jasnej ścianie). Doświadczenie trzeba przeprowadzić w zaciemnionym pomieszczeniu. Najlepiej wykonywać je w dwie osoby: jedna będzie trzymać laser i folię, a druga oglądać obraz z bliska.

Uzyskany w takim doświadczeniu obraz dyfrakcyjny przedstawia rys. 1. W środku znajduje się jasna, okrągła plamka. W omówionych warunkach ma ona promień rzędu kilku milimetrów. Otoczona jest układem płynnie przecho-

dzących w siebie na przemian ciemnych i jasnych pierścieni. Natężenie jasnych pierścieni dość szybko maleje ze wzrostem odległości od środka obrazu.



Rys. 1. Dyfrakcja światła na otworze kołowym

Doświadczenie 2

Można też postąpić inaczej: popatrzeć po prostu przez otworek w folii na świecąca żaróweczkę od latarki kieszonkowej, znajdującą się w odległości około 3 m. Jeżeli używamy latarki zwykle widoczne są także boczne odbłaski. Można je przesłonić, używając kawałka czarnego papieru z otworkiem, przez który powinno być widoczne tylko samo włókno.

Doświadczenie takie jest mniej eleganckie, bo używa się w nim światła białego, a nie monochromatycznego. Ale prostsze do wykonania!

Problem

Otwór kołowy ma symetrię obrotową wokół swojego środka. Z doświadczenia wiemy, że taką samą symetrię ma powstający obraz dyfrakcyjny. Można jednak zapytać, jak natężenie światła zależy od kąta odchylenia od pierwotnego kierunku wiązki. Dla jakich kątów natężenie światła znika? Jaki jest promień jasnej plamki środkowej?

Idea opisu

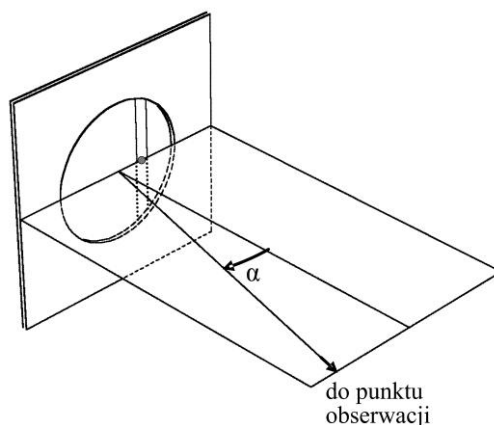
Nasz problem można opisać w przybliżeniu skalarnym, posługując się rozumowaniem, opartym na **zasadzie Huygensa**. Przypomnijmy: jeżeli światło pada na otworek o średnicy mniejszej od długości fali, za otworkiem pojawia się wybiegająca z niego fala kulista. Duży otwór – o rozmiarze większym od długości fali – traktuje się jako wiele stykających się z sobą małych otworków i mówi: każdy z tych fikcyjnych małych otworków staje się źródłem „swojej” fali kulistej. Fala wypadkowa jest wynikiem interferencji tych wielu fal składowych.

Warto podać od razu oszacowanie liczbowe. Jeżeli promień otworu jest równy $R = 0,1\text{mm}$, a w doświadczeniu używamy lasera czerwonego o długości fali $\lambda = 0,7\ \mu\text{m} = 0,7 \cdot 10^{-3}\ \text{mm}$, stosunek $R/\lambda \approx 140$, a $\lambda/R \approx 7 \cdot 10^{-3}$ (ten stosunek będzie nam potrzebny w dalszym ciągu rozważań).

Jeżeli na otwór w płaskiej przesłonie pada prostopadle fala płaska, dociera ona do wszystkich fikcyjnych otworków w tym samym czasie, a więc wszystkie otworki wysyłają fale kuliste w zgodnych fazach. Fazy, z jakimi fale docierają do punktu obserwacji są jednak różne, bo fale biegną po drogach o różnych długościach.

W naszych warunkach odległość od otworu do punktu obserwacji (bliska L , rzędu kilku metrów) jest duża w stosunku do promienia otworu R (rzędu ułamka milimetra). Możliwe są wtedy jeszcze dwa uproszczenia:

1. Odległości łączące poszczególne fikcyjne otworki z punktem obserwacji są na ogół różne. Amplituda fali kulistej maleje z odległością. Jeżeli jednak $L \gg R$ te różnice amplitud są bardzo małe i można je pominąć.
2. Rozważmy płaszczyznę, wyznaczoną przez oś symetrii otworu i linię łączącą środek otworu z punktem obserwacji, na rys. 2 jest to płaszczyzna pozioma. Wyodrębnijmy myślowo pasek na płaszczyźnie otworu, prostopadły do określonej wyżej płaszczyzny (a więc pionowy). Jeżeli $L \gg R$, odległości do punktu obserwacji od fikcyjnych otworków należących tego paska są niemal identyczne. Jednakowe są więc i fazy fal docierających od tych otworków do punktu obserwacji. Zatem cały pasek można zastąpić jednym fikcyjnym źródłem punktowym, leżącym na wspomnianej płaszczyźnie (szara kropka na rysunku). Trzeba przy tym przyjąć, że amplituda fali wysyłanej z tego fikcyjnego źródła jest proporcjonalna do długości paska.

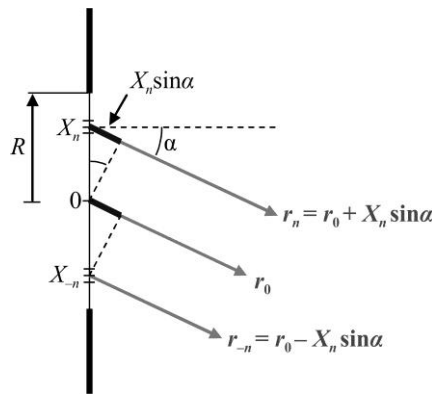


Rys. 2. Jeżeli $L \gg R$, fale z całego narysowanego paska docierają do obserwatora w zgodnych fazach

Obliczenia

Wybermy środek układu współrzędnych w środku otworu kołowego. Podzielmy cały otwór na $2N$ pasek o równej szerokości. Rozpatrzmy fikcyjne źródło, reprezentujące n -ty pasek, którego środek znajduje się w położeniu X_n (rys. 3, na płaszczyznę poziomą z rys. 2 patrzmy od góry). Niech r_0 oznacza odległość od środka otworu kołowego do punktu obserwacji, a r_n odległość od n -tego źródła do punktu obserwacji. Jeżeli $L \gg D$, linie łączące te punkty z punktem obserwacji są niemal równoległe. Z górnego narysowanego trójkąta wynika, że

$$r_n = r_0 + X_n \sin \alpha. \quad (1)$$



Rys. 3. Różnice dróg dla różnych fikcyjnych źródeł, omówionych w tekście

Wyrażenie na falę sinusoidalną, docierającą do punktu obserwacji, można więc napisać w postaci:

$$\begin{aligned} U_n &= A_n \cos \left[2\pi \left(\frac{r_n}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) \right] = A_n \cos \left[2\pi \left(\frac{r_0}{\lambda} + \frac{X_n \sin \alpha}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) \right] = \\ &= A_n \cos \left[2\pi \left(\frac{r_0}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) + \frac{2\pi X_n \sin \alpha}{\lambda} \right]. \end{aligned} \quad (2)$$

Rozpatrzmy teraz pasek symetryczny w stosunku do omówionego wyżej. Oznaczmy go symbolem $-n$. Dla tego paska $X_{-n} = -X_n$, a więc (rys. 3):

$$r_{-n} = r_0 + X_{-n} \sin \alpha; = r_0 - X_n \sin \alpha; \quad (3)$$

a stąd

$$U_{-n} = A_{-n} \cos 2\pi \left(\frac{r_{-n}}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) = A_{-n} \cos \left[2\pi \left(\frac{r_0}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) - \frac{2\pi X_n \sin \alpha}{\lambda} \right]. \quad (4)$$

Otwór kołowy jest symetryczny względem środka. Długość paska $-n$ jest równa długości paska n . Wynika stąd, że $A_{-n} = A_n$.

Interferencja fal opisanych wzorami 2 i 4 daje wynik (stosujemy wzór na sumę cosinusów):

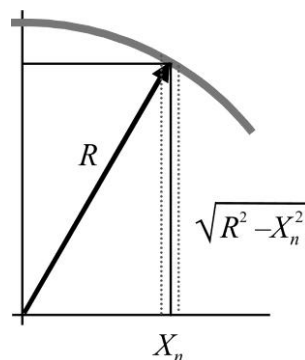
$$\begin{aligned} U_n + U_{-n} &= A_n \cos \left[2\pi \left(\frac{r_0}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) + \frac{2\pi X_n \sin \alpha}{\lambda} \right] + \\ &+ A_n \cos \left[2\pi \left(\frac{r_0}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) - \frac{2\pi X_n \sin \alpha}{\lambda} \right] = \\ &= 2A_n \cos \left[2\pi \left(\frac{r_0}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) \right] \cdot \cos \left(\frac{2\pi X_n \sin \alpha}{\lambda} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Wzór ten jest słuszny dla dowolnej pary pasków n i $-n$.

Całkowity wynik interferencji jest sumą N takich składników. Widać, że przy takim sumowaniu wspólny czynnik $2 \cos \left[2\pi \left(\frac{r_0}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) \right]$ można będzie wynieść przed nawias. Pozostanie do obliczenia suma N składników o postaci $A_n \cos \left(\frac{2\pi X_n \sin \alpha}{\lambda} \right)$.

Zauważmy jeszcze, że połowa średniej długości n -tego paska dla otworu kołowego jest – z twierdzenia Pitagorasa – równa $\sqrt{R^2 - X_n^2}$ (rys. 4). Wynika stąd:

$$A_n \cos \left(\frac{2\pi X_n \sin \alpha}{\lambda} \right) \propto \sqrt{R^2 - X_n^2} \cos \left(\frac{2\pi X_n \sin \alpha}{\lambda} \right). \quad (6)$$



Rys. 41. Obliczanie długości paska dla otworu kołowego

Przekształćmy jeszcze wyrażenie 6, wprowadzając nową bezwymiarową zmienną $x_n = \frac{X_n}{R}$. Zachodzi oczywiście $X_n = Rx_n$, co podstawimy do wzoru:

$$\begin{aligned} \sqrt{R^2 - X_n^2} \cos\left(\frac{2\pi X_n \sin \alpha}{\lambda}\right) &= R\sqrt{1 - x_n^2} \cos\left[2\pi\left(\frac{2\pi R x_n \sin \alpha}{\lambda}\right)\right] \propto \\ &\propto \sqrt{1 - x_n^2} \cos\left(\frac{2\pi R \sin \alpha}{\lambda} x_n\right) = \sqrt{1 - x_n^2} \cos(Qx_n). \end{aligned} \quad (7)$$

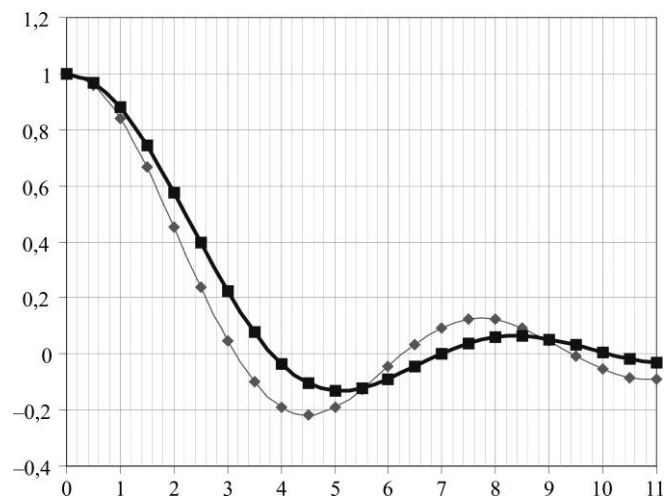
Dla skrótu oznaczyliśmy $Q = \frac{2\pi R \sin \alpha}{\lambda}$. Wspomnieliśmy już wyżej, że w typowym doświadczeniu interesują nas małe kąty α . Wtedy $\sin \alpha \approx \alpha$, czyli Q jest po prostu do α proporcjonalne.

Całkowanie metodą prostokątów

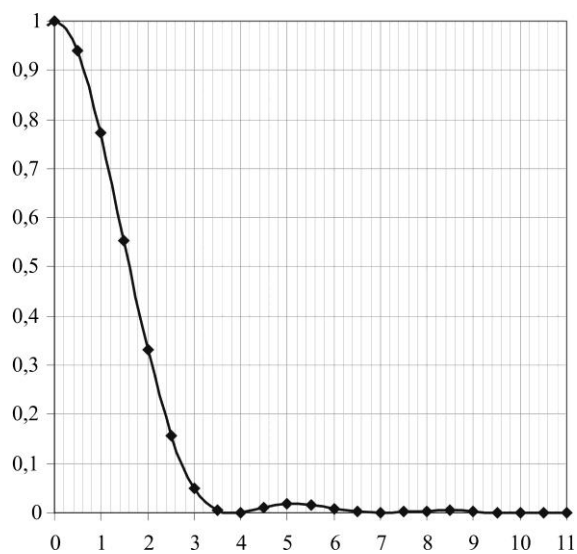
Nasze zadanie sprowadza się do znalezienia – przy określonym Q – wartości sumy N członów o postaci $\sqrt{1 - x_n^2} \cos(Qx_n)$. Możemy takie sumy obliczyć numerycznie, stosując tak zwaną metodę prostokątów. Polega ona na przyjmowaniu w liczeniu sumy wartości funkcji ze środka obszaru. Autor posłużył się w tym celu programem *Excel*. Rachunki zostały przeprowadzone dla $N = 20$, czyli szerokości pasków równej 0,05. Obliczenia znajdują się w pliku [Otwórkolowy](#) (w wersji elektronicznej *Fotonu*).

Omówmy uzyskane wyniki.

1. Obliczana przez nas suma jest proporcjonalna do amplitudy fali świetlnej w punkcie obserwacji. Zależność tej wielkości od Q przedstawia rys. 5 (gruba linia). Wyniki zostały znormalizowane do jedności dla $Q = 0$.
2. Rysunek 6 przedstawia zależność od Q natężenia światła, które jest proporcjonalne do kwadratu amplitudy fali.



Rys. 5. Zależność amplitudy fali świetlnej od parametru Q . Gruba linia: otwór kołowy. Cienka linia: otwór prostokątny



Rys. 6. Zależność natężenia światła od parametru Q dla otworu kołowego

Widać, że pierwsze zero pojawia się dla $Q \approx 3,83$. Oznacza to warunek na kąt α :

$$\frac{2\pi R \sin \alpha_1}{\lambda} = 3,83 \quad (8).$$

Kąt pierwszego zera oznaczyliśmy α_1 . Przekształcając wzór 8 dostajemy:

$$\sin \alpha_1 \approx \alpha_1 \approx \frac{3,83}{2\pi} \frac{\lambda}{R} \approx 0,61 \frac{\lambda}{R} = 1,22 \frac{\lambda}{D} \quad (9)$$

w ostatnim członie D oznacza średnicę otworu ($D = 2R$).

Wzór ten określa rozmiar jasnej plamki centralnej obrazu z rys. 1.

Wielkość jej plamki jest w przybliżeniu wprost proporcjonalna do długości fali λ , a odwrotnie proporcjonalna do promienia otworu R .

Aby oszacować kąt α_1 , wykorzystamy fakt, że dla otworu o średnicy 0,1 mm i długości fali $\lambda = 0,7 \mu\text{m}$ stosunek $\frac{\lambda}{R} \approx 7 \cdot 10^{-3}$ (co obliczyliśmy wyżej). Dostajemy:

$$\alpha_1 \approx 0,61 \frac{\lambda}{R} = 0,61 \cdot 7 \cdot 10^{-3} \approx 4,3 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \approx 0,25^\circ \approx 15' \quad (10)$$

Promień plamki centralnej obrazu dyfrakcyjnego na ekranie odległym o L od otworu jest równy w przybliżeniu $L\alpha_1$ (dla kąta wyrażonego w radianach). Dla wartości $L = 1 \text{ m} = 1000 \text{ mm}$ jest on równy 4,3 mm.

O analitycznym rozwiązaniu naszego problemu

Zależność natężenia światła od kąta α dość prosto opisaliśmy numerycznie. Opis analityczny sprowadza się do obliczenia całki (por. wzór 7):

$$F(Q) = \int_0^1 dx \sqrt{1-x^2} \cos(Qx). \quad (11)$$

Całka ta nie wyraża się przez funkcje elementarne. Analityczny opis dyfrakcji na otworze kołowym wymaga znajomości funkcji Bessela – i nie będziemy go tu omawiać. Różnice rezultatów ściślego opisu analitycznego i naszych wyników obliczeń numerycznych są na poziomie 0,001.

Otwór kołowy a otwór prostokątny

Warto zwrócić uwagę, że pierwsze zero dla otworu kołowego o średnicy równej D jest nieco dalej od środka, niż dla otworu prostokątnego o szerokości równej D . Dla tego drugiego warunek na znikanie natężenia światła ma postać:

$$D \sin \alpha_1 = \lambda. \quad (12)$$

Z (12) wynika warunek

$$\sin \alpha_1 \approx \alpha_1 \approx \frac{\lambda}{D}. \quad (13)$$

(porównaj z wzorem 9).

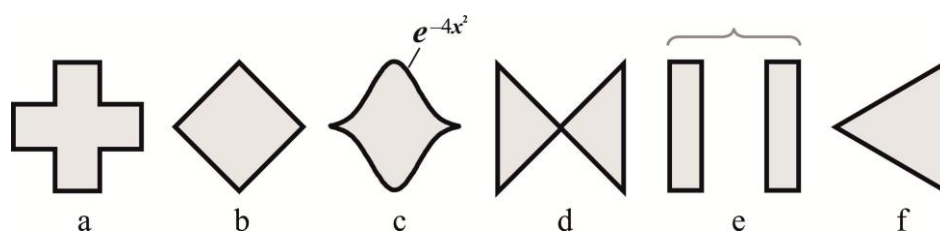
Inne otwory

Program znajdujący się w pliku *Otwory* łatwo zmodyfikować.

1. Na przykład – jeżeli chcemy opisać dyfrakcję na otworze prostokątnym, należy w obliczeniach numerycznych sumować po paskach równej długości, czyli zastąpić funkcję $\sqrt{1-x^2}$ jedynką.
2. Można też sprawdzić, jak wygląda obraz dyfrakcyjny, jeżeli funkcja określająca długość pasków osiąga zero „płynie” a nie „skokowo”. W pliku *Otwory* jest to obliczone dla funkcji $\frac{1}{2}[1-\cos(\pi x)]$.

Zadanie domowe

Proponuję czytelnikowi samodzielne zbadanie, jak zależy od Q amplituda fali rozproszonej i natężenie światła dla otworów przedstawionych na rysunkach 7a–e. W szczególności polecam punkt c, kiedy szerokość otworu określona jest funkcją e^{-4x^2} .



Rys. 7.

Wyzwanie

W przeprowadzonych w tym artykule rozważaniach ograniczaliśmy się do otworów symetrycznych. To założenie istotnie upraszczało prowadzone obliczenia. Proponuję, aby czytelnik uchylił to założenie i przeprowadził rozumowanie bardziej ogólne. Jako konkretny przykład można byłoby rozważyć dyfrakcję na otworze trójkątnym z rysunku 7f.