

Paradoks ujemnej temperatury i teoria Marksa

Natanael Spisak
pod opieką prof. Ewy Gudowskiej-Nowak
Instytut Fizyki UJ

Entropia: definicje Gibbsa i Boltzmannna

W ramach termodynamiki klasycznej temperatura T jest zawsze większa od zera bezwzględnego $T > 0$ K. Zgodnie z fizyczną definicją, temperatura gazu jest miarą intensywności ruchów chaotycznych jego cząsteczek. W temperaturze zera bezwzględnego spodziewany jest całkowity zanik tych ruchów. Formalnie, możliwe jest jednak rozważanie ujemnych temperatur w układach, w których gęstość stanów $\omega(E)$ w otoczeniu ustalonej energii E jest funkcją malejącą. Sytuacja taka ma miejsce np. w ultrazimnych gazach kwantowych, w których inwersję obsadzeń stanów energetycznych obserwowano w serii eksperymentów przeprowadzonych przez badaczy z Instytutu Optyki Kwantowej Maxa Plancka w Garching i Uniwersytetu Ludwika Maksymiliana w Monachium [1]. Konsekwencją ujemnych temperatur bezwzględnych jest nietypowe zachowanie atomów: jakkolwiek cząsteczki zimnego gazu przyciągają się wzajemnie, prowadząc do ujemnych ciśnień, gaz taki nie podlega „zapadaniu” – w pewnej analogii do postulowanych zachowań ciemnej energii w kosmologii. Szereg wcześniejszych doświadczeń na układach spinów [2] wykazywało podobne zachowanie temperatury, pozornie sprzeczne z intuicją „termodynamiczną”. Co ciekawe, obserwacje te, jak również kontrowersje wyrosłe wokół ich interpretacji, posłużyły w ostatnim czasie próbom zdeprecjonowania fundamentalnej definicji entropii użytej przez Boltzmannna. W szczególności w pracach [3, 4] przedmiotem analizy była niereprezentatywność definicji entropii Boltzmannna do opisu wyżej wymienionych układów. Autorzy dowodzili, że zastąpienie definicji Boltzmannna odmienną od niej definicją Gibbsa pozwala uniknąć dylematu (niepożądanych?) ujemnych temperatur bezwzględnych.

Zrozumienie tego problemu wymaga przypomnienia pokrótce definicji temperatury termodynamicznej i entropii [5, 6, 7]. Fundamentalne równanie termodynamiki (I zasada) pozwala na wyrażenie infinitesimalnych zmian energii wewnętrznej E układu przez różniczkę

$$dE = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial E}{\partial A_j} \right) dA_j \quad (= T dS - p dV + \mu dN + \dots). \quad (1)$$

W powyższym równaniu przez A_j oznaczono parametry ekstensywne układu, zaś $\frac{\partial E}{\partial A_j}$ – to sprzężone z nimi parametry intensywne. Dla układów, w których

znana jest zależność entropii S od energii E definiujemy wówczas temperaturę jako $T = \left[\frac{\partial S}{\partial E} \right]^{-1}$. Jak widać, temperatura zależy od tego jak zdefiniujemy entropię, co na gruncie statystycznego opisu układu możemy zrobić na różne sposoby. Funkcję gęstości rozkładu prawdopodobieństwa dla zespołu mikrokano- nicznego o ustalonej energii E , objętości V i stałej liczbie cząsteczek N możemy zapisać jako

$$\rho(E, V, N) = \begin{cases} \frac{1}{\Omega(E, V, N)} & \text{dla } H \in (E, E + \Delta E) \\ 0 & \text{dla } H \notin (E, E + \Delta E) \end{cases},$$

gdzie przez H oznaczono hamiltonian opisujący układ, a $\Delta E \ll E$. Wszystkie możliwe stany są więc jednakowo prawdopodobne. Standardowa definicja entropii prawdopodobieństwa wyraża się wówczas wzorem

$$\begin{aligned} S_1 &= -k_B \langle \ln \rho \rangle = -k_B \int_{\Gamma} \rho \ln \rho d\Gamma = -k_B \int_{H \in (E, E + \Delta E)} \frac{1}{\Omega} \ln \left(\frac{1}{\Omega} \right) d\Gamma = \\ &= -k_B \frac{1}{\Omega} \ln \left(\frac{1}{\Omega} \right) \Omega = k_B \ln \Omega, \end{aligned} \quad (2)$$

gdzie k_B oznacza stałą Boltzmanna, a Γ – przestrzeń fazową układu. Mikrostan- y dostępne układowi przy danej energii E możemy jednak zliczać inaczej, wprowadzając funkcję $\Sigma(E, V, N)$ odpowiadającą objętości dostępnego układowi fragmentu przestrzeni fazowej dla wszystkich energii nie większych od E

$$\Sigma(E, V, N) = \int_{H \leq E} d\Gamma = \int \Theta(E - H(q, p)) d\Gamma,$$

gdzie Θ oznacza funkcję skokową Heaviside'a. Użycie funkcji $\Sigma(E, V, N)$ prowadzi do odmiennej definicji entropii, przypisywanej Gibbsowi

$$S_2 = k_B \ln \Sigma, \quad (3)$$

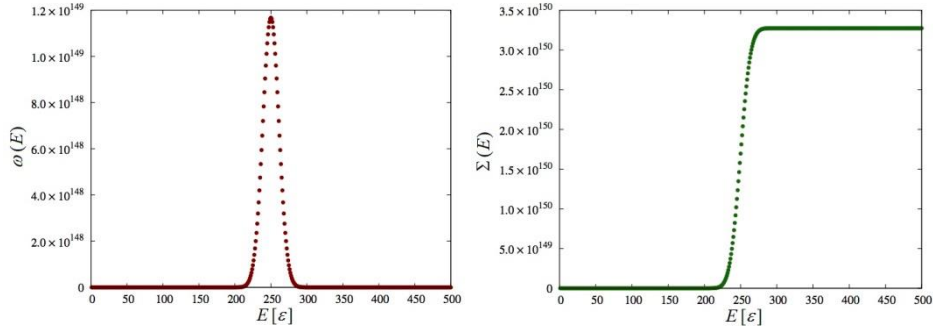
W powyższym rozróżnieniu „funkcji zliczającej mikrostan- y o zadanej energii”, entropię Boltzmanna wprowadzamy jako

$$S_3 = k_B \ln \omega \Delta E, \quad (4)$$

gdzie $\omega(E, V, N)$ oznacza gęstość stanów układu

$$\begin{aligned} \omega(E, V, N) &= \frac{\Omega}{\Delta E} = \frac{\partial}{\partial E} \Sigma(E, V, N) = \frac{\partial}{\partial E} \int \Theta(E - H(q, p)) d\Gamma = \\ &= \int \delta(H(q, p) - E) d\Gamma. \end{aligned}$$

Zauważmy, że funkcja ta zlicza jedynie stany mikroskopowe (q, p) z energią dokładnie równą E .



Rys. 1. Gęstość stanów $\omega(E)$ oraz funkcja zliczająca $\Sigma(E)$. Energia układu dla $N = 500$ nieoddziaływających spinów, przedstawiona w jednostkach ε

Zgodność różnych definicji entropii w granicy termodynamicznej

Powyższe definicje entropii, wyraźnie różniące się między sobą, w konsekwencji prowadzą do odmiennych definicji temperatury. Jednakże, w tzw. granicy termodynamicznej, tj. dla $N \rightarrow \infty$ i $V \rightarrow \infty$ takich, że $\frac{N}{V} = \text{const}$, definicje te są równoważne, a tym samym odpowiadające im temperatury są sobie równe. W istocie zauważmy, że zachodzi

$$\Omega(E, V, N) = \int_{H \in (E, E + \Delta E)} d\Gamma = \int_{H \leq E + \Delta E} d\Gamma - \int_{H \leq E} d\Gamma = \Sigma(E + \Delta E, V, N) - \Sigma(E, V, N),$$

oraz

$$\Sigma(E + \Delta E, V, N) = \Sigma(E, V, N) + \frac{\partial \Sigma}{\partial E} dE + \mathcal{O}(dE^2).$$

Otrzymujemy stąd prostą zależność

$$\Omega(E, V, N) = \omega(E, V, N) \Delta E + \mathcal{O}(dE^2),$$

z której wynika zgodność definicji (2) i (4) dla dużych N i V : w granicy termodynamicznej człon $\mathcal{O}(dE^2)$ jest pomijalnie mały.

Równoważność powyższych definicji i definicji Gibbsa (3) w granicy termodynamicznej wynika z faktu, że w przestrzeniach wielowymiarowych cała objętość kuli o promieniu spełniającym warunek $R^2 = 2mE = 2m \sum_{i=1}^{3N} p_i^2$, skupiona jest w wąskiej warstwie przy jej powierzchni¹, czyli

¹ Wspomniana kula odnosi się do fragmentu przestrzeni fazowej dostępnej analizowanemu gazowi doskonałemu N cząsteczek.

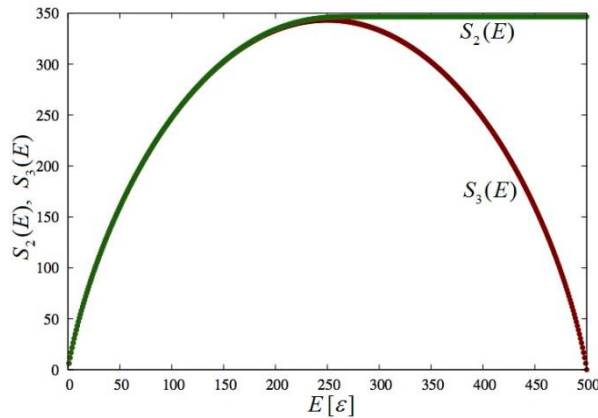
$$\Sigma(E) - \Sigma(E - \Delta E) \approx \Sigma(E), \quad (5)$$

a więc obliczanie objętości przestrzeni fazowej dostępnej dla $H(q, p) \leq E$ staje się równoważne sumowaniu stanów w warstwie $H \in (E, E + \Delta E)$. W szczególności, dla gazu doskonałego N cząsteczek, formuła na $\Sigma(E)$ daje

$$\Sigma(E) = \frac{V^N (2mE)^{\frac{3N}{2}}}{N! h^{3N}} \frac{\pi^{\frac{3N}{2}}}{\Gamma\left(\frac{3N}{2} + 1\right)} \quad (6)$$

(przez h oznaczono stałą Plancka, Γ oznacza funkcję gamma Eulera).

Widać stąd, że dla dużych N (np. rzędu liczby Avogadra) przybliżenie (5) jest bardzo dobrze spełnione.



Rys. 2. Wykres ilustrujący zależność entropii Gibbsa (S_2) i Boltzmanna (S_3) od energii, w układzie izolowanym $N = 500$ nieoddziałujących cząsteczek

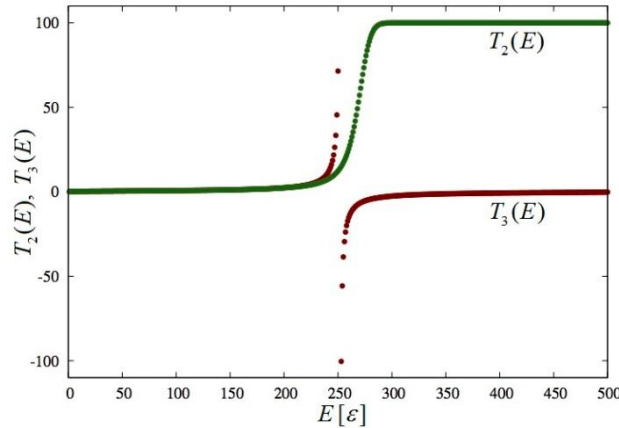
Paradoks ujemnych temperatur

Zgodność w granicy termodynamicznej umożliwia zamienne używanie definicji entropii (2)–(4) dla układów bardzo wielu cząstek. Dla niewielkich układów różnice pomiędzy definicjami i odpowiadającymi im temperaturami są znaczące i musimy być ostrożni używając pojęć entropii i temperatury. W szczególności dla układów z ograniczonym widmem energii definicja entropii Boltzmanna prowadzi do ujemnych wartości temperatury, podczas gdy temperatura obliczana według definicji Gibbsa pozostaje dodatnia. Korzystając z definicji S_2 , S_3 wyliczmy jawnie odpowiadające im temperatury

$$S_2 = k_B \ln \Sigma(E) \Rightarrow T_2(E) = \left[\frac{\partial S_2}{\partial E} \right]^{-1} = \left[k_B \frac{\Sigma'(E)}{\Sigma(E)} \right]^{-1} = \frac{1}{k_B} \frac{\Sigma(E)}{\omega(E)}, \quad (7)$$

$$S_3 = k_B \ln \omega(E) \Delta E \Rightarrow T_3(E) = \left[\frac{\partial S_3}{\partial E} \right]^{-1} = \left[k_B \frac{\omega'(E)}{\omega(E)} \right]^{-1} = \frac{1}{k_B} \frac{\omega(E)}{\omega'(E)}. \quad (8)$$

Prostym przykładem systemu o ograniczonym widmie energii jest układ N nieoddziałujących cząstek, których energia przyjmować może tylko dwie wartości: 0 i ε . Wszystkie cząstki w stanie 0 realizują minimum energii układu $E = 0$, a maksimum $E = N\varepsilon$ jest realizowane, gdy wszystkie cząstki obsadzają stan wzbudzony. Tym dwu skrajnym makrostanom układu odpowiada brak degeneracji: mogą być zrealizowane tylko przez jeden mikrostan. W stanach pośrednich $0 < E < N\varepsilon$ degeneracja rośnie i osiąga maksimum dla pewnej energii E^* , a następnie monotonicznie maleje aż do stanu $E = N\varepsilon$. Obliczając entropię według definicji Boltzmana (4), tj. biorąc logarytm liczby stanów dla danej energii, otrzymujemy funkcję $S_3(E)$ osiągającą maksimum na przedziale $(0, N\varepsilon)$. Tym samym temperatura zdefiniowana jako odwrotność pochodnej $\frac{\partial S_3}{\partial E}$ zmienia znak i dla energii $E > E^*$ jest ujemna. Funkcja $\Sigma(E)$, występująca w definicji Gibbsa (3) pozostaje monotoniczna, gdyż każdorazowo zlicza wszystkie mikrostany dostępne energiom mniejszym bądź równym E . Stąd entropia Gibbsa S_2 nie osiąga ekstremum, a odpowiadająca jej temperatura pozostaje dodatnia.



Rys. 3. Temperatura termodynamiczna zdefiniowana w oparciu o entropię Gibbsa (T_2) i entropię Boltzmana (T_3), przedstawione na rys. 2

Autorzy artykułu [3] wskazują na szereg innych wad definicji entropii Boltzmana. Przede wszystkim argumentują, że w przeciwieństwie do entropii Gibbsa, nie jest ona spójna z termodynamiką klasyczną. Wracając do fundamentalnej relacji (1), którą sformułujemy teraz w skali entropii

$$dS = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial S}{\partial A_j} \right) dA_j = \frac{1}{T} dE + \sum_i \frac{a_i}{T} dA_i, \quad (9)$$

pokażemy, jakie ograniczenia nakłada ona na definicje entropii (przez A_i ponownie oznaczono parametry ekstensywne, $\frac{a_i}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial A_i} \right)$). Rozważając proces adiabatyczny, gdzie dodatkowo $dA_i = 0$ dla wszystkich $i \neq k$, dostajemy warunek

$$\frac{1}{T} dE + \frac{a_k}{T} dA_k = 0,$$

a stąd

$$a_k = - \left(\frac{\partial E}{\partial A_k} \right) = - \left\langle \frac{\partial H}{\partial A_k} \right\rangle,$$

gdzie druga równość wynika z warunku spójności wielkości termodynamicznych ze średnimi statystycznymi. Z definicji $\frac{a_k}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial A_k} \right)$, ostatecznie otrzymujemy więc warunek

$$T \left(\frac{\partial S}{\partial A_k} \right) = - \left\langle \frac{\partial H}{\partial A_k} \right\rangle. \quad (10)$$

Średniowanie w zespole mikrokanonicznym zdefiniowaliśmy powyżej, wprowadzając gęstość ρ . Nieco zmodyfikujemy teraz tę funkcję rozkładu: w granicy $\Delta E \rightarrow 0$, a więc gdy energia jest ściśle określona, możemy zapisać

$$\rho(E, V, N) = \frac{\delta(E - H)}{\omega(E, V, N)} \quad (11)$$

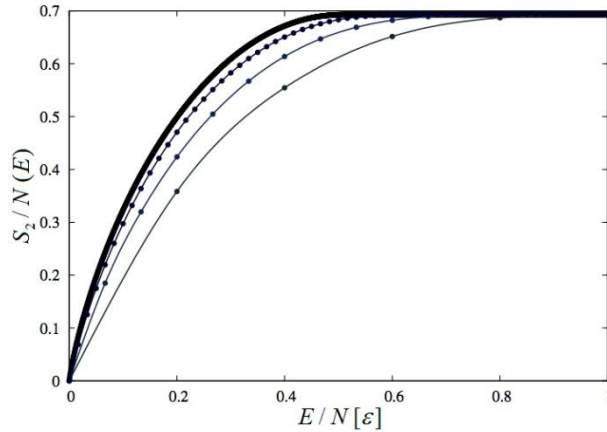
(gdzie obecność czynnika $1/\omega$ wynika z warunku unormowania). Dla definicji temperatury i entropii Gibbsa (7) dostajemy zatem

$$\begin{aligned} T_2 \left(\frac{\partial S_2}{\partial A_k} \right) &= \frac{1}{k_B} \frac{\Sigma(E)}{\omega(E)} \frac{\partial}{\partial A_k} (k_B \ln \Sigma(E)) = \frac{1}{\omega(E)} \frac{\partial \Sigma(E)}{\partial A_k} = \frac{1}{\omega(E)} \frac{\partial}{\partial A_k} \left(\int \Theta(E - H) d\Gamma \right) = \\ &= \frac{1}{\omega(E)} \int \frac{\partial}{\partial A_k} \Theta(E - H) d\Gamma = \frac{1}{\omega(E)} \int - \left(\frac{\partial H}{\partial A_k} \right) \delta(E - H) d\Gamma. \end{aligned}$$

Korzystając z definicji średniej po stanach i (11) otrzymujemy więc równość (10) – entropia i temperatura Gibbsa są konsyistentne z fundamentalnym równaniem (9). Zauważmy przy tym, że w ogólności

$$T_3 \left(\frac{\partial S_3}{\partial A_k} \right) \neq T_2 \left(\frac{\partial S_2}{\partial A_k} \right),$$

co jawnie sugeruje, że entropia Boltzmanna (8) łamie warunek spójności opisu statystycznego z termodynamiką. Warunek ten jest jednak spełniony [8] w granicy makroskopowego układu!



Rys. 4. Skalowanie entropii Gibbsa z rozmiarami układu. Znormalizowana entropia S_2 dwustanowego układu przedstawiona jest w funkcji znormalizowanej energii dla układu $N = 5, 15, 60$ i 1000 cząsteczek

Definicja entropii Gibbsa wydaje się być właściwsza: dla wszystkich systemów jest dodatnia i niezależnie od wielkości układu jest spójna z termodynamiką. Okazuje się jednak, że i ta definicja ma swoje poważne mankamenty. Artykuł Vilara i Rubiego [9] analizuje dokładniej omówiony wyżej układ N cząstek o ograniczonym widmie energii pokazując, że definicja Gibbsa również prowadzi do paradoksów. Energia w tym układzie jest skwantowana, najmniejsza możliwa „porcja” energii wynosi ε . Całki w definicjach (2), (3) i (4) przechodzą więc w sumy: w szczególności definicje entropii S_1 i S_3 są równoważne, gdy tylko $\Delta E < \varepsilon$. Obliczmy entropię Boltzmanna S_3 dla stanu o zadanej energii $E_j = j\varepsilon$ (gdzie j – liczba cząstek w stanie wzbudzonym), czyli logarytm liczby dostępnych dla niej mikrostanów

$$S_3(E_j) = k_B \ln \binom{N}{j} = k_B \ln \frac{N!}{(N-j)! j!} = k_B \ln \frac{N!}{(N - E_j / \varepsilon)! (E_j / \varepsilon)!}. \quad (12)$$

Definicja Gibbsa wymaga zsumowania wszystkich mikrostanów dla $H < E$:

$$S_2(E_j) = k_B \ln \sum_{i=1}^j \binom{N}{i} = k_B \ln \sum_{i=1}^j \frac{N!}{(N - E_i / \varepsilon)! (E_i / \varepsilon)!}, \quad (13)$$

zaś „dyskretny” odpowiednik definicji temperatury daje się przedstawić wzorem

$$T = \left[\frac{\Delta S}{\Delta E} \right]^{-1} = \frac{E_j - E_{j-1}}{S(E_j) - S(E_{j-1})}.$$

Autorzy [9] pokazują, że dla energii $E > E^*$ (przez E^* oznaczyliśmy wartość energii maksymalizującą entropię Boltzmana), entropia Gibbsa szybko traci zależność od energii. Rozważając różnicę

$$S_2(E_j) - S_2(E_{j-1}) = k_B \ln \frac{\sum_{i=1}^j \binom{N}{i}}{\sum_{i=1}^{j-1} \binom{N}{i}} = k_B \ln \left(1 + \frac{\binom{N}{j}}{\sum_{i=1}^{j-1} \binom{N}{i}} \right),$$

skorzystajmy z (12): $\binom{N}{j} = e^{S_3(E_j)/k_B}$,

$$S_2(E_j) - S_2(E_{j-1}) = k_B \ln \left(1 + \frac{e^{S_3(E_j)/k_B}}{\sum_{i=1}^{j-1} e^{S_3(E_i)/k_B}} \right) < k_B \frac{e^{S_3(E_j)/k_B}}{\sum_{i=1}^{j-1} e^{S_3(E_i)/k_B}}$$

(oszacowanie otrzymaliśmy korzystając z nierówności $\ln(1+x) < x$). Dla mianownika, gdy $E_j > E^*$, zachodzi $\sum_{i=1}^{j-1} e^{S_3(E_i)/k_B} > e^{S_3(E^*)/k_B}$ (E^* to energia maksymalizująca entropię S_3). Ostatecznie otrzymujemy

$$S_2(E_j) - S_2(E_{j-1}) < k_B \frac{e^{S_3(E_j)/k_B}}{e^{S_3(E^*)/k_B}} = k_B e^{(S_3(E_j) - S_3(E^*))/k_B}.$$

$S_3(E^*)$ to maksymalna wartość entropii Boltzmana, a więc wykładnik eksponenty jest ujemny. Co więcej, zwiększając rozmiar układu i korzystając z ekstensywności entropii, widzimy że różnica $S_2(E_j) - S_2(E_{j-1})$ maleje wykładniczo. Pokazaliśmy tym samym, że entropia Gibbsa nie może służyć jako podstawa do definicji temperatury termodynamicznej: zwiększenie liczby cząstek sprawia że przestaje być ona poprawnie zdefiniowaną funkcją energii, a tym samym pochodna $\frac{\partial S_2}{\partial E}$ nie niesie z sobą fizycznego znaczenia. Artykuł [9]

omawia konkretny przykład, dla którego temperatura Gibbsa błędnie przewiduje przepływy ciepła: w tym przykładowym modelu dwóch podukładów para-

doksalnie ciepło przepływa z podukładu o niższej, do podukładu o wyższej temperaturze Gibbsa T_2 .

Powyższe przykłady pokazują, że poza poprawnie sformułowaną granicą termodynamiczną napotykamy na poważne trudności w operowaniu pojęciem entropii. W układach o skończonej liczbie (nieoddziałujących!) elementów, oba sposoby definiowania entropii – zarówno definicja Gibbsa, jak i Boltzmannowa zawodzą, prowadząc do pewnych niespójności. Argumenty użyte w dyskusji pomiędzy zwolennikami i przeciwnikami temperatury Boltzmannowej, a w szczególności ujemnych temperatur (prace [3, 4, 8–10]), pokazują że poza granicą termodynamiczną używanie pojęć entropii i temperatury musi się odbywać z należytą ostrożnością.

Frenkel i Warren [8] odwołują się przy tym do intuicyjnego przykładu „rozdzielenia energii” w sytuacji omawianego układu dwukomponentowego, w którym całkowita energia rozdzielana jest pomiędzy obydwie podukłady. Warunek $E_2 + E_1 \leq E$ nakłada wówczas restrykcję na najwyższą możliwą energię w układzie (dokonując zliczeń mikrostanów dla których warunek $E_2 + E_1 \leq E$ jest spełniony, opisujemy w istocie układ ze stałą maksymalną energią E , a nie układ o stałej energii). Ilustracją tego problemu może być podział pensji w dużej korporacji bankowej: w sytuacji pogłębiającego się niezadowolenia z niskich wynagrodzeń wśród pracowników niższego szczebla („proletariatu”), którzy wnoszą protest w związku z nadzwyczajnie wysokimi uposażeniami dyrektorów („burżuazji”), rada nadzorcza może pokusić się o rozwiązanie, w którym podnoszony jest średni zarobek pracowników przy jednoczesnym obniżeniu średniego uposażenia dyrektorów tak, że całkowita suma środków na pensje pozostaje niezmienna. Rozwiązanie to odpowiadałoby wizji „Boltzmannowej”. Odmienne podejście „Gibbsa” – w ujęciu proponowanym w pracach [3, 4] polegałoby na zwiększeniu najwyższej pensji pracowników banku do np. 10^6 \$ rocznie przy jednoczesnym obniżeniu maksymalnej pensji w sektorze dyrektorów (np. z 10^{10} \$ do 10^9 \$ rocznie) w taki sposób, aby maksymalna kwota wydawana na pensje pozostała niezmienna. Najprawdopodobniej niewielu spośród niższej klasy pracowników skorzystałoby z tej oferty, a także zapewne niewielu dyrektorów protestowałoby z powodu obniżenia pensji. Co ważniejsze jednak, podjęte środki nie skutkowałyby istotnym transferem pieniędzy (lub „ciepła”) pomiędzy grupami. W terminologii marksistowskiej sytuację taką opisuje się jako brak redystrybucji dóbr materialnych pomiędzy burżuazją a proletariatem. Podjęta strategia najprawdopodobniej nie zadowoliliby zatem pracowników hipotetycznego banku...

Dalszą dyskusję na temat definicji temperatury w układach kwantowych znajdzie Czytelnik na stronach www.quantum-munich.de/research/negative-absolute-temperature.

Literatura

- [1] S. Braun, P. Ronzheimer, M. Schreiber, S.S. Hodgman, T. Rom, I. Bloch, U. Schneider, *Negative Absolute Temperature for Motional Degrees of Freedom*, Science 339, 52 (2013).
- [2] E.M. Purcell, R.V. Pound, *A nuclear spin system at negative temperature*, Physical Review A 43, 2050 (1991).
- [3] J. Dunkel i S. Hilbert, *Consistent thermostatics forbids negative absolute temperatures*, Nature Physics 10, 67–72 (2014).
- [4] S. Hilbert, P. Hänggi i J. Dunkel, *Thermodynamic laws in isolated systems*, Physical Review E 90: 062116 (2014).
- [5] P. Salamon, B. Andresen, J. Nulton i A.K. Konopka, *The mathematical structure of thermodynamics*, w: Systems Biology: Principle, Methods, and Concepts, s. 207–221 (CRC Press 2007).
- [6] R. Gilmore, *The structure of thermodynamics*, www.physics.drexel.edu/~bob/Thermodynamics (dostęp: 10.11.2014).
- [7] G. Morandi, *Statistical mechanics. An intermediate course*, Part I. Thermodynamics, s. 1–48 (World Scientific 1995).
- [8] D. Frenkel, P.B. Warren, *Gibbs, Boltzmann, and negative temperatures*, American Journal of Physics 83, 163 (2015).
- [9] J.M.G. Vilar, J.M. Rubi, *Communication: System-size scalling of Boltzmann and alternate Gibbs entropies*, The Journal of Chemical Physics 140: 201101 (2014).
- [10] I.M. Sokolov, *Not hotter than hot*, Nature Physics 10, 7–8 (2014).