



O ciężarkach na boczku z uwzględnieniem masy nici

Mariusz Tarnopolski

Student fizyki IF UJ

Rozważmy klasyczne zadanie szkolne z dwoma ciężarkami zawieszonymi na nici przerzuconej przez bloczek, zilustrowane na rysunku 1a. Taki układ jest nazywany spadkownicą (lub maszyną) Atwooda i został skonstruowany w 1784 roku przez George'a Atwooda celem wykonania eksperymentu weryfikującego prawa ruchu jednostajnie przyspieszonego. Obecnie maszyna Atwooda jest używana do celów dydaktycznych, demonstrujących ruchy przyspieszone z przyspieszeniem dowolnie mniejszym od przyspieszenia ziemskiego g .

Celem zadania jest obliczenie przyspieszenia ciężarków. W najprostszym przypadku, gdy masa boczka $m = 0$, łatwo znaleźć odpowiedź postaci

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g, \quad (1)$$

gdzie założyliśmy bez straty ogólności, że $m_1 > m_2$. W nieco rozbudowanej sytuacji, gdy mamy niezerową masę boczka, trzeba uwzględnić również fakt, że ma on moment bezwładności $I = \frac{1}{2}mr^2$, gdzie r jest promieniem boczka. Wtedy niewiele trudniejszym do znalezienia rozwiązaniem tego zadania jest

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m} g. \quad (2)$$

Kierując oś Ox w dół oraz umieszczając jej początek na wysokości środka boczka, położenie ciężarka o m_1 w zależności od czasu znajdziemy ze znanego wzoru opisującego ruch jednostajnie przyspieszony:

$$x(t) = \frac{at^2}{2} + L_0, \quad (3)$$

gdzie L_0 to początkowe położenie. Jak będzie jednak wyglądało zachowanie takiego układu, jeśli masa liny m_0 będzie niezerowa?

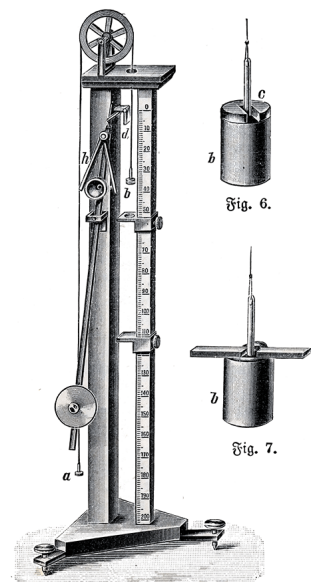
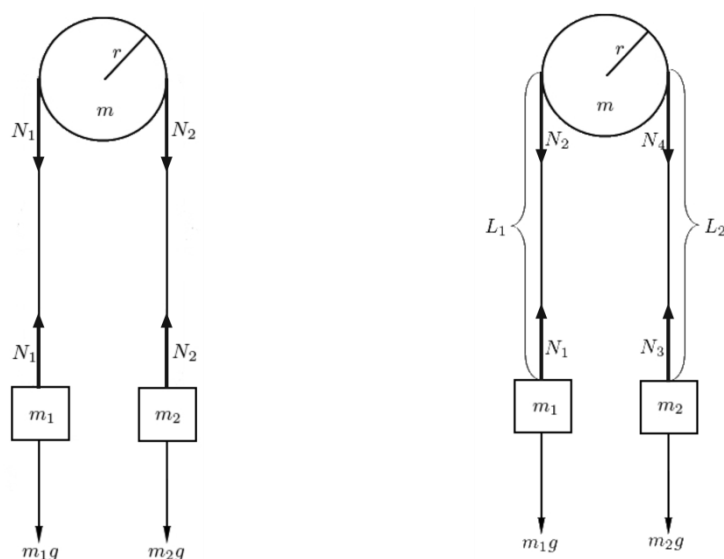


Fig. 5.
Atwood'sche Fallmaschine

Spadkownica Atwooda, 1905 r.
(źródło:Wikipedia)

Wtedy siły napięcia liny przyłożone w punkcie zaczepienia ciężarka i w miejscu, gdzie lina odrywa się od bloczka, nie są takie same (rys. 1b). Siła napięcia N_1 jest wywołana siłą grawitacji działającą na masę m_1 , zaś siła napięcia N_2 – na masę ciężarka oraz masę liny o długości L_1 . Analogicznie będzie dla ciężarka o masie m_2 . Mamy więc cztery różne siły napięcia liny, a nie dwie, jak w przypadku liny nieważkiej. Znajdźmy więc najpierw równania ruchu układu mas m_0 , m_1 , m_2 i m .



Rys. 1a. Siły napięcia dla liny nieważkiej Rys. 1b. Siły napięcia dla liny o niezerowej masie

Niech nasza lina ma całkowitą długość L . Składa się na nią suma długości poszczególnych odcinków:

$$L = L_1 + L_2 + \pi r. \quad (4)$$

Oczywiście L_2 jest zależne od L_1 i *vice versa*:

$$L_2 = (L - \pi r) - L_1 \equiv L' - L_1. \quad (5)$$

Nazwijmy L' długością zredukowaną liny. Przyjmijmy również, że gęstość liniowa liny $\rho = \frac{m_0}{L}$ jest stała. Podzielmy nasz układ na pięć podukładów: dwa ciężarki, dwie liny i bloczek. Na mocy drugiej zasady dynamiki Newtona równania ruchu dla ciężarków i bloczka są takie same jak dla przypadku nieważkiej liny:

$$m_1g - N_1 = m_1a, \quad (6)$$

$$N_3 - m_2 g = m_2 a, \quad (7)$$

$$r(N_2 - N_4) = I\varepsilon = \frac{1}{2}mr^2\varepsilon; \quad \varepsilon, \quad (8)$$

$$a = r\varepsilon, \quad (9)$$

gdzie I jest momentem bezwładności krążka o promieniu r zaś ε jest jego przyspieszeniem kątowym. Przyjmując $N_1 = N_2$ oraz $N_3 = N_4$ dostaniemy, po rozwiązaniu powyższego układu równań, uproszczony wzór na przyspieszenie postaci (2) dla liny nieważkiej. Jednakże w naszym przypadku musimy zapisać jeszcze dwa równania ruchu: po jednym dla każdej liny. Są one następujące:

$$N_1 - N_2 + \rho L_1 g = \rho L_1 a, \quad (10)$$

$$N_4 - N_3 - \rho L_2 g = \rho L_2 a, \quad (11)$$

gdzie ρL_i jest masą odpowiedniego kawałka liny. Możemy teraz rozwiązać układ równań (6)–(11), żeby znaleźć wartość przyspieszenia a . Z równań (6), (7), (10) i (11) wyznaczamy siły napięcia liny, wstawiamy tak obliczone wartości do (8) oraz korzystamy z (9), żeby wyeliminować r . Wyrażenie, jakie ostatecznie otrzymujemy, jest następujące:

$$a = \frac{\frac{m_0}{L}(2L_1 - L') + m_1 - m_2}{\frac{m_0}{L}L' + m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m} g. \quad (12)$$

Jeśli podstawimy w tym miejscu $m_0 = 0$, to otrzymamy wzór na przyspieszenie (2), czyli nasze rozwiązanie poprawnie redukuje się do przypadku prostszego.

Chcemy następnie znaleźć zależność drogi od czasu dla ciężarków poruszających się z powyższym przyspieszeniem. Ostatni wzór wyprowadziliśmy dla dowolnego położenia L_1 . Przyspieszenie a jest zatem proporcjonalne do położenia; przyspieszenie w ogólności zaś jest drugą pochodną położenia po czasie. Mamy więc następujące równanie różniczkowe:

$$\ddot{x} = \alpha x + \beta, \quad (13)$$

gdzie α i β są odpowiednio współczynnikiem przy L_1 oraz wyrazem wolnym we wzorze (12). Rozwiązaniem tego równania jest poniższa funkcja:

$$x(t) = A \cdot e^{-\sqrt{\alpha}t} + B \cdot e^{\sqrt{\alpha}t} - \frac{\beta}{\alpha}, \quad (14)$$

gdzie A i B to stałe całkowania. Można je wyznaczyć nakładając warunki początkowe, na przykład tak, by w chwili $t=0$ ciężarek o masie m_1 był w położeniu x_0 oraz by prędkość początkowa wynosiła zero. Dostajemy z tego, że $A=B$ oraz

$$A = \frac{1}{2} \left(x_0 + \frac{\beta}{\alpha} \right). \quad (15)$$

Po wstawieniu do równania (14) rozpoznajemy definicję cosinusa hiperbolicznego, co pozwala funkcję położenia zapisać w zwartej postaci jako

$$x(t) = \left(x_0 + \frac{\beta}{\alpha} \right) \cosh(\sqrt{a}t) - \frac{\beta}{\alpha}. \quad (16)$$

Co się stanie, jeśli będziemy chcieli przy użyciu wzoru (16) rozpatrzeć przypadek, gdy lina jest nieważka? Zauważmy, że przyspieszenie a można zapisać jako funkcję homograficzną:

$$a = \frac{m_0 L_1 + C}{D m_0 + E}, \quad (17)$$

gdzie C , D i E są oznaczeniami na odpowiednie grupy stałych we wzorze (12). Zatem położenie $m_0 = 0$ daje przyspieszenie stałe w czasie, co jest równoznaczne z przyjęciem $\alpha = 0$ we wzorze (13). Jeśli jednak wstawimy $\alpha = 0$ we wzorze na położenie (16), to ponieważ $\cosh 0 = 1$, dostaniemy $x(t) = x_0$, czyli ciężarki nie będą się poruszać!

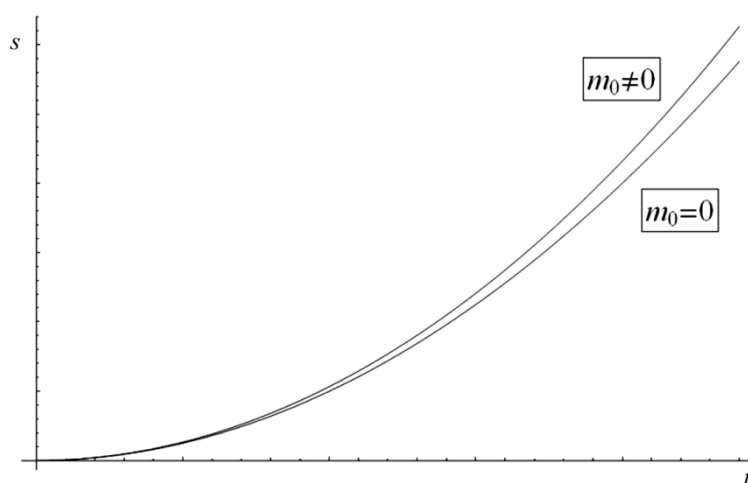
Ta pozorna niespójność wynika z faktu, że inaczej rozwiązuje się równanie różniczkowe (13) jeśli α równa się zero, a inaczej gdy wielkość ta jest niezerowa. W pierwszym przypadku rozwiązanie sprowadza się do dwukrotnego całkowania, dzięki czemu uzyskujemy, zgodnie z oczekiwaniami, położenie ciała w ruchu jednostajnie przyspieszonym jako funkcję kwadratową czasu. W drugim przypadku jednak, żeby uzyskać rozwiązanie w postaci (14), założyliśmy pewną formę rozwiązania tego równania. Nasze założenie było oparte na fakcie, że α nie była równa zero i nie obejmowało zerowania się parametru α . Jest to sytuacja analogiczna do rozwiązywania algebraicznego równania kwadratowego: $ax^2 + bx + c = 0$. W przypadku $a = 0$ równanie staje się liniowe, o pierwiastku wynoszącym $x = -\frac{c}{b}$. Jeśli zaś w rozwiązaniach równania kwa-

dratowego $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ damy $a = 0$, to otrzymamy symbole nieoznaczone $\frac{0}{0}$

oraz $\frac{-2b}{0}$, ponieważ wzory na pierwiastki równania kwadratowego są słuszne

tylko dla przypadku $a \neq 0$. Podobna sytuacja ma miejsce z rozwiązaniem równania (13). Wybierając metodę rozwiązywania dla przypadku $\alpha \neq 0$ nie pozwalamy, żeby rozwiązanie miało postać funkcji kwadratowej, więc nie możemy się jej spodziewać w wyniku.

Na rysunku 2 zamieszczono wykresy dwóch zależności położenia ciężarka o masie m_1 : kwadratowej, uzyskanej przy założeniu $m_0 = 0$, oraz hiperbolicznej dla przypadku $m_0 > 0$. Wykresy zostały wykonane dla stosunku mas $m:m_1:m_2:m_0$ jak 2:1:0,5:0,02.



Rys. 2. Zależności drogi od czasu przy spadku ciężarka zawieszono na linie nieważkiej i o niezerowej masie

Zgodnie z intuicją ciężarek w ruchu z niezerową masą liny porusza się szybciej niż gdyby lina była nieważka. Jednakże dla rzeczywistych wartości wszystkich parametrów ta różnica jest dosyć niewielka, choć mierzalna. George Atwood w swym eksperymencie przyjął, że zarówno nić, jak i bloczek są nieważkie, co bynajmniej nie przeszkodziło mu uzyskać zadowalających wyników.