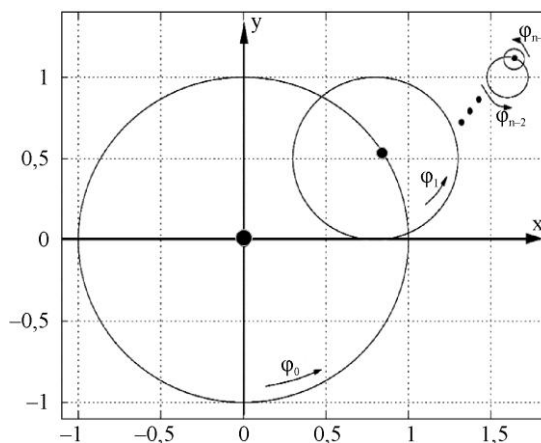


Koła rowerowe kreślą fraktale

Marek Berezowski
Politechnika Śląska

Od Redakcji: Fraktalom poświęcamy ostatnio dużo uwagi. W *Fotonach* 111 i 112 ukazały się na ten temat artykuły Marcina Figla i Tomasza Sabały. Najczęściej podkreślaną cechą fraktali jest ich samopodobieństwo. W poniższym artykule autor przedstawia, jak za pomocą prostego urządzenia mechanicznego, składającego się z połączonych ze sobą kół (np. rowerowych), można narysować fraktale.

Rozważmy urządzenie składające się z n kół o różnych rozmiarach, obracających się z różnymi szybkościami. Na obręczy danego koła, obracającego się z określoną szybkością, zamontowane jest koło od niego mniejsze, obracające się z szybkością większą (rys. 1).



Rys. 1. System kół (φ na tym rysunku oznacza kąt obrotu danego koła względem własnej osi)

W efekcie poszczególne koła obracają się nie tylko z szybkościami własnymi, ale „napędzane” są także ruchem wszystkich kół od nich większych.

Na obręczy ostatniego (najmniejszego) koła zamocowany jest rysik, który pozostawia ślad na płaszczyźnie. Okazuje się, że już przy stosunkowo niewielkiej liczbie kół ślad ten może być bardzo skomplikowany i tworzyć rysunek fraktalny. Pomimo iż prędkości obrotowe własne poszczególnych kół są stałe, nieustannie zmienia się prędkość rysika, i to zarówno jej wartość, jak i kierunek.

Założymy, że stosunek promieni oraz kątów obrotu poszczególnych kół jest stały i wynosi:

$$q = \frac{r_k}{r_{k+1}} = \frac{\phi_{k+1}}{\phi_k} > 1 \quad (1)$$

Pozycję rysika, zamocowanego na obwodzie ostatniego koła, określają wzory:

$$x' = \sum_{k=0}^{n-1} r_k \cos(\varphi_k) = r_0 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{q^k} \cos(q^k \varphi_0) \quad (2)$$

$$y' = \sum_{k=0}^{n-1} r_k \sin(\varphi_k) = r_0 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{q^k} \sin(q^k \varphi_0). \quad (3)$$

Przechodząc do zapisu zespolonego powyższe wzory przedstawić można jako:

$$R' = \sum_{k=0}^{n-1} r_k e^{i\varphi_k} = r_0 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{q^k} e^{iq^k \varphi_0} \quad (4)$$

gdzie R' jest promieniem wodzącym zespolonym, natomiast

$$|R'| = \sqrt{(x')^2 + (y')^2} \quad (5)$$

jest odległością rysika od osi największego koła, czyli rzeczywistą długością tego promienia.

Korzystając z tych zależności łatwo wykazać, że dla $n = 2$ i $q = 2$ rysik kreśli linię o długości $L = 8r_0$. Dla $r_0 = 1/2$ linia ta ogranicza obszar o identycznych rozmiarach i kształcie jak największy obszar słynnego fraktala Mandelbrota, określanego w literaturze jako *kardioida*.

Wprowadzając do naszych rozważań znormalizowany promień wodzący oraz skrótowy zapis kąta obrotu największego koła jako:

$$R = \frac{R'}{r_0}; \quad t = \varphi_0 \quad (6)$$

równanie (4) przekształca się do postaci:

$$R = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{q^k} e^{iq^k t} \quad (7)$$

Ponieważ długość promienia R zmienia się w sposób ciągły, ciągła jest także trajektoria ruchu rysika. Nieciągła jest natomiast szybkość zmiany długości tego promienia, czyli prędkość ruchu rysika:

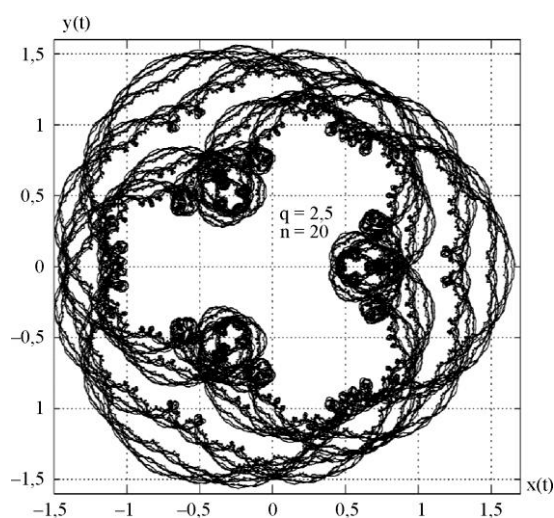
$$\frac{dR}{dt} = i \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} e^{iq^k t} \quad (8)$$

Dla $n = \infty$ nieciągłość ta występuje dla każdej wartości t .

W praktyce, gdy $n < \infty$, zjawisko to ma znaczenie dla przyrostu $\Delta t > q^{1-n}$. I tak np. dla $n = 20$ i $q = 2,5$, $\Delta t > 0,00000003$. Oznacza to, że zanik nieciągłości pochodnej (8), czyli zanik nieciągłości prędkości ruchu rysika, zaobserwowałibyśmy mierząc obrót największego koła dopiero w odstępach krótszych niż

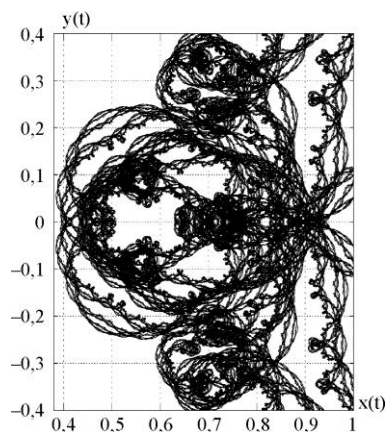
30 nanostopni. W praktyce zatem w układzie występują nieustannie gwałtowne zmiany prędkości ruchu rysika, zarówno jej wartości, jak i kierunku. Można powiedzieć, że rysik jest nieustannie szarpnięty i w konsekwencji może tworzyć na płaszczyźnie bardzo złożone figury fraktalne.

Rozważmy dla przykładu system złożony z 20 kół, w którym zastosowano $q = 2,5$. Na rys. 2 przedstawiono obraz, jaki kreśli rysik zamontowany na obwodzie dwudziestego koła.

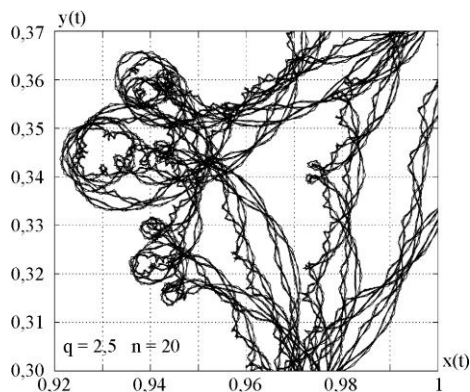


Rys. 2. Fraktal namalowany przez koła

Prezentowana struktura jest bardzo złożona, a jej fragmenty pokazane na rys. 3 i 4 świadczą, że ma ona formę fraktalną.



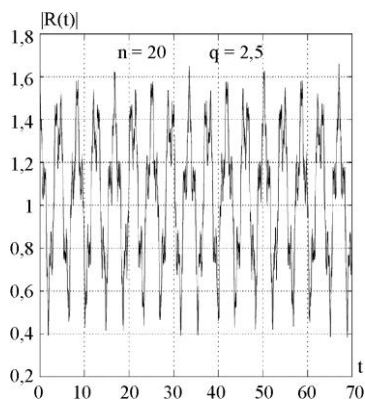
Rys. 3. Fragment obrazu z rys. 2



Rys. 4. Fragment obrazu z rys. 3

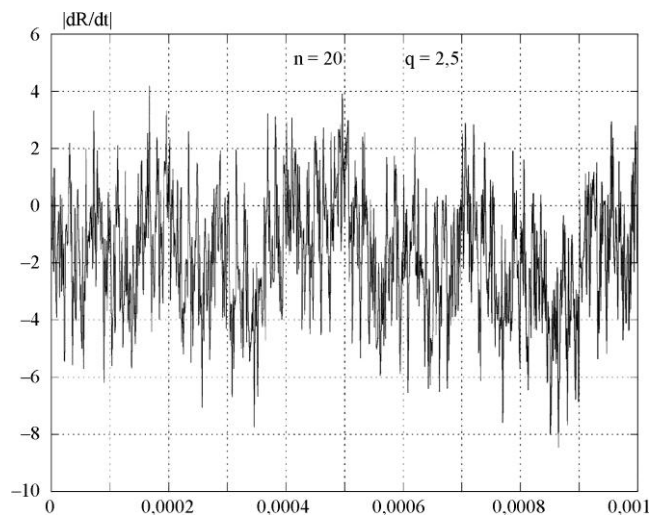
Użyte na powyższych wykresach symbole x i y są współrzędnymi znormalizowanymi: $x = \frac{x'}{r_0}$, $y = \frac{y'}{r_0}$.

Z kolei na rys. 5 przedstawiono zmiany długości promienia wodzącego $|R|$ w funkcji t .



Rys. 5. Zmiany odległości rysika od osi największego koła

Natomiast na rys. 6 zaprezentowano szybkość tych zmian $\left| \frac{dR}{dt} \right|$.

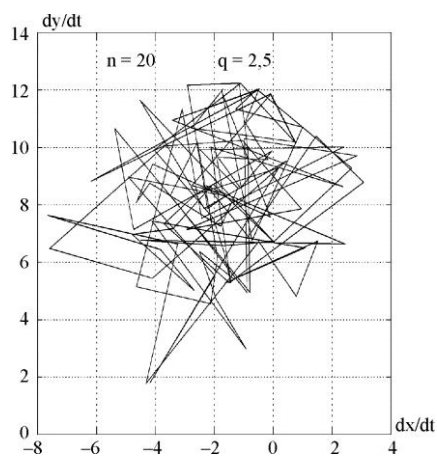


Rys. 6. Szybkość zmian odległości rysika od osi największego koła

Powyższe wykresy potwierdzają ciągłość zmian odległości rysika $/R/$ od osi największego koła oraz praktyczną nieciągłość szybkości ruchu rysika $\left| \frac{dR}{dt} \right|$.

W granicznym przypadku, gdy $n = \infty$, gwałtowna zmiana tej szybkości następuje dla każdej wartości t .

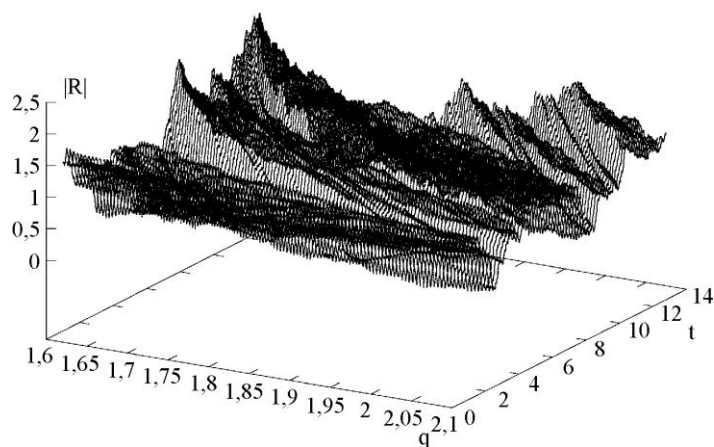
Widoczne na poniższej płaszczyźnie fazowej zygzaki są konsekwencją tej nieciągłości (rys. 7).



Rys. 7. Współrzędne prędkości ruchu rysika

Gdy $n = \infty$ zygzaki występują w każdym punkcie płaszczyzny. Trajektorja ta przypomina ruchy Browna, gdzie – jak wiadomo – ruch cząsteczek brownowskich jest także zygzakowaty w każdym punkcie [1].

Konsekwencją tego jest fakt, że wprowadzie zmiany długości promienia wodzącego mają charakter ciągły (co pokazano na rys. 5), ale charakter tych zmian nie jest gładki. Można powiedzieć, że wykres jest „chropowaty”. Przy nieskończonej liczbie kołach chropowatość ta występuje w każdym punkcie. Na rys. 8 przedstawiono formę przestrzenną tego zjawiska.



Rys. 8. Góry kreślone kołami

Trudno oprzeć się wrażeniu, że podobny charakter mają także struktury przyrody. Wystarczy spojrzeć na góry skaliste.

Więcej na temat tu poruszony można przeczytać w artykule [2].

Literatura

- [1] P.F. Góra, Sto lat teorii ruchów Browna, Foton 91, Zima 2005
- [2] M. Berezowski, *Phase trajectories of a certain mechanical system*, Far East Journal of Dynamical Systems, **13**/1, 85–96, 2010

Redakcja poleca

- [3] P. Pierański, *Fraktale: od geometrii do sztuki*, Ośrodek Wydawnictw Naukowych, Poznań 1992
- [4] M. Figiel, T. Sabała, *Fraktale*, Foton 111, Zima 2010, s. 18
- [5] M. Figiel, T. Sabała, *Maszynka do fraktali*, Foton 112, Wiosna 2011, s. 28