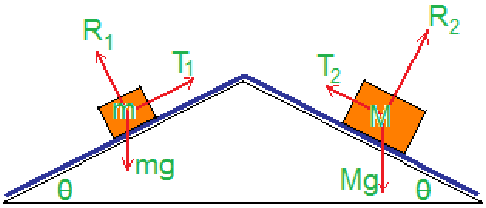
Zadania ligi zadaniowej „Wyzwania dla nauczycieli i uczniów” Borysa Korsunsky’ego

Adam Wyrzykowski
V Liceum Ogólnokształcące im. A. Witkowskiego, Kraków

W październikowym zeszycie *The Physics Teacher* 2010 (i w Internecie) w rubryce *Physics Challenge for Teachers and Students* prowadzonej przez Borysa Korsunsky’ego znajduje się następujące zadanie:

Nieskończenie lekka płaska taśma jest położona na trójkątnej równi pochyłej jak pokazano na rysunku. Na taśmie znajdują się dwa klocki. Współczynniki tarcia statycznego i kinetycznego między taśmą i klockami wynoszą odpowiednio μ_s *oraz* μ_k*. Nie ma tarcia pomiędzy taśmą i równią. Dane są kąt* θ *i masy klocków m oraz M. Zakładając, że M > m, znajdź przyspieszenie taśmy wzdłuż równi po tym, jak klocki zostaną jednocześnie puszczone. Rozważ wszystkie możliwe przypadki.*



Rozwiązanie opiera się na analizie dwóch przypadków:

i) Najpierw rozważmy przypadek, w którym żaden z klocków nie ślizga się po taśmie. Równania ruchu są następujące:

$$ma = T_1 - mg\sin\theta \qquad (1a) \qquad\qquad mg\cos\theta = R_1 \qquad (1b)$$

$$Ma = Mg\sin\theta - T_2 \qquad (2a) \qquad\qquad Mg\cos\theta = R_2 \qquad (2b)$$

gdzie a – przyspieszenie klocków i taśmy wzdłuż równi. Pozostałe oznaczenia są wyjaśnione na rysunku ($\vec{T}_1$ i $\vec{T}_2$ są siłami tarcia działającymi na odpowiednie klocki). Z III zasady dynamiki Newtona $\vec{T}_1 = -\vec{N}_1$ i $\vec{T}_2 = -\vec{N}_2$, gdzie $\vec{N}_1$ i $\vec{N}_2$ są siłami naciągającymi taśmę (działającymi na taśmę). Ponieważ taśma jest nieskończenie lekka, siły działające na nią (aby nie spowodować nieskończonego przyspieszenia) mają równe wartości i przeciwne zwroty. Stąd:

$$N_1 = N_2 \qquad (3a)$$

$$T_1 = T_2 \qquad (3b)$$

Dodajemy teraz stronami równania (1a) i (2a) oraz korzystamy z warunku (3), żeby dostać $(M+m)a=(M-m)g\sin\theta$. Zatem:

$$a=\frac{M-m}{M+m}g\sin\theta \tag{4}$$

Żaden z klocków nie ślizga się po taśmie, kiedy spełnione są oba poniższe warunki:

$$T_1 \le \mu_s R_1 \qquad (5a) \qquad T_2 \le \mu_s R_2 \tag{5b}$$

Podstawiając a ze wzoru (4) do (1a), dostajemy po prostych przekształceniach wartość T_1 równą, zgodnie ze wzorem (3), wartości T_2. Obliczamy:

$$T_1=T_2=\frac{2Mm}{M+m}g\sin\theta \tag{6}$$

Ze wzorów (5a), (6) oraz (1b), dostajemy $\frac{2Mm}{M+m}g\sin\theta \le \mu_s mg\cos\theta$. Stąd po prostych przekształceniach dostajemy warunek braku poślizgu między klockiem o masie *m* i taśmą :

$$\frac{2M}{M+m}tg\theta \le \mu_s \tag{7a}$$

Analogicznie ze wzorów (5b), (6) oraz (2b), dostajemy warunek braku poślizgu między klockiem o masie *M* i taśmą:

$$\frac{2m}{M+m}tg\theta \le \mu_s \tag{7b}$$

Skoro *M* > *m*, więc z warunku (7a) wynika (7b). Zatem warunki (7a) i (7b) są oba spełnione, gdy zachodzi (7a). Stąd warunek stosowalności przypadku i):

$$\frac{2M}{M+m}tg\theta \le \mu_s \tag{8}$$

Dla malejących wartości μ_s warunek (7a) przestaje być spełniony wcześniej niż (7b) – klocek o masie m zaczyna wtedy ślizgać się po taśmie. Zatem w drugim przypadku:

ii) Klocek o masie m ślizga się, zaś klocek o masie *M* – nie. Oznaczmy i w tym przypadku *a* – przyspieszenie taśmy (równe przyspieszeniu klocka o masie *M*). Ponownie dostajemy równania (2a) i (2b) dla cięższego klocka, natomiast dla lżejszego klocka zachodzi:

$$R_1=mg\cos\theta \tag{9a}$$

Co więcej, podczas poślizgu lżejszego klocka, siła tarcia działająca na niego wynosi:

$$T_1 = \mu_k R_1 \tag{9b}$$

Taśma jest nieskończenie lekka, więc warunek $T_1 = T_2$ zachodzi jak ostatnio. Zatem:

$$T_2 = T_1 = \mu_k R_1 = \mu_k mg\cos\theta \tag{10}$$

gdzie użyto równań (9a) oraz (9b). Ze wzorów (2a) i (10), dostajemy

$$Ma = Mg\sin\theta - \mu_k mg\cos\theta\,.$$

Stąd:

$$a = (\sin\theta - \frac{m}{M}\mu_k\cos\theta)g \tag{11}$$

Pierwszym warunkiem stosowalności przypadku ii) jest niespełnienie warunku dla i), tzn.:

$$\mu_s < \frac{2M}{M+m}tg\theta \tag{12a}$$

Jest to pierwszy warunek stosowalności przypadku ii).

Drugim warunkiem jest brak poślizgu między klockiem o masie M i taśmą:

$$T_2 \le \mu_s R_2 \tag{12b}$$

Ze wzorów (12b), (10) oraz (2b), dostajemy warunek:

$$\mu_k mg\cos\theta \le \mu_s Mg\cos\theta \quad \Rightarrow \quad \frac{\mu_k}{\mu_s} \le \frac{M}{m} \tag{13}$$

Ponieważ $\mu_k / \mu_s < 1$ i z treści zadania wiemy, że $m < M$ – więc warunek (13) jest zawsze spełniony. Podsumowując wszystkie poprzednie wyniki otrzymujemy wzory na przyspieszenie taśmy:

$$a = \begin{cases} \dfrac{M-m}{M+m}g\sin\theta & dla \quad \mu_s \ge \dfrac{2M}{M+m}tg\theta \\ (\sin\theta - \dfrac{m}{M}\mu_k\cos\theta)g & dla \quad \mu_s < \dfrac{2M}{M+m}tg\theta \end{cases}$$

Rozwiązania zadań z ligi zadaniowej *Physics Challenge for Teachers and Students* są dostępne na stronach *The Physics Teacher* po dwóch miesiącach od publikacji. Prezentowane powyżej zadanie nosi tytuł „Rubbing and ribbon”.