KĄCIK ZADAŃ

Konik i osiołek

Adam Smólski
Fizyka w Szkole

W edycji 2005 Polsko-Ukraińskiego Konkursu Fizycznego „Lwiątko" jako ostatnie w zestawach licealnych wystąpiło chyba najperfidniejsze zadanie pod słońcem. W każdym razie wielu poważnych fizyków (i mniej poważnych, z niżej podpisanym włącznie) w pierwszym odruchu udzieliło złej odpowiedzi. Ba, niektórzy bronili jej potem z uporem godnym lepszej sprawy.
Oto owo zadanie:

Drewniany konik, na obwodzie obracającej się karuzeli, znajduje się 3 m od osi obrotu. Przygląda mu się żywy osiołek, stojący na ziemi 5 m od osi obrotu karuzeli. Prędkość konika w układzie odniesienia osiołka ma wartość 3 m/s. Jaką wartość ma prędkość osiołka w układzie odniesienia konika?
A. Zero **B. 1,8 m/s** **C. 3 m/s** **D. 5 m/s** **E. 8,33 m/s**

Poprawna jest odpowiedź D. Uzasadnienie: karuzela wiruje z prędkością kątową 1 rad/s. W układzie odniesienia konika to świat wiruje wokół nieruchomej karuzeli, z tą samą prędkością kątową 1 rad/s, tylko w przeciwną stronę. Zatem prędkość liniowa osiołka w tym układzie odniesienia wynosi 1 rad/s razy 5 m, czyli 5 m/s.

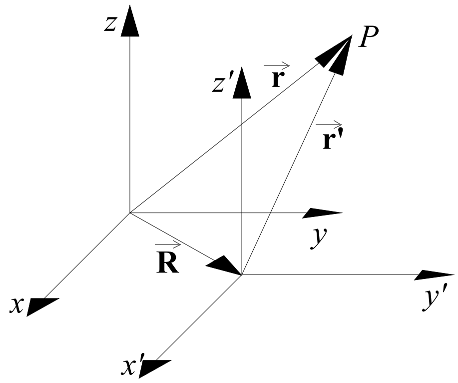
Błędna, acz kusząca odpowiedź to oczywiście C. Niektórzy jej obrońcy powoływali się na ogólne jakoby twierdzenie, że gdy układ odniesienia *U'* porusza się względem układu odniesienia *U* z prędkością $\vec{\mathbf{u}}$, to układ *U* porusza się względem układu *U'* z prędkością $-\vec{\mathbf{u}}$. Twierdzenie takie jest jednak fałszywe, o czym przekonuje przykład konika i osiołka.

Można zapytać, skąd bierze się stereotyp prowadzący do takich twierdzeń. Sądzę, że z przyzwyczajenia do sytuacji typowej dla elementarnego omawiania transformacji Galileusza i Lorentza, kiedy to rozpatrujemy wyłącznie ruch postępowy jednego układu odniesienia względem drugiego. Niedobrym, bo mylącym przyzwyczajeniem jest mówienie o *prędkości układu U' względem układu U.* Prędkość dotyczy punktu, a nie „układu". W tym wypadku mamy na myśli prędkość jednego wyróżnionego punktu układu *U'* względem układu *U* – na przykład początku związanego z układem odniesienia układu współrzędnych. Gdy się dostrzeże ten niuans, pojęcie *prędkości układu U' względem układu U* przestaje być myląco symetryczne wobec obu układów.

Rozumiem potrzebę formułowania ogólnych twierdzeń, spróbujmy zatem opisać sytuację konika i osiołka w języku transformacji opisu ruchu z jednego układu odniesienia do drugiego. Specjalnie napisałem „transformacji opisu", ponieważ chodzi o tzw. transformację bierną – w wyniku zmiany układu odniesienia nie następuje zmiana faktycznego położenia obiektu w przestrzeni fizycznej, a tylko przeformułowanie informacji o tym położeniu, zakodowanej np. w przypisanych mu współrzędnych.

Układ odniesienia to, skrótowo rzecz ujmując, jakiś rozciągły trójwymiarowy obiekt, z którym wiążemy układ współrzędnych, np. kartezjańskich, pozwalający każdemu punktowi fizycznej przestrzeni (być może jednak tylko lokalnie, bo nie chodzi nam przecież o model Wszechświata) przypisać trójkę liczb x, y, z. Ustalamy w ten sposób pewien lokalny izomorfizm przestrzeni fizycznej i przestrzeni kartezjańskiej $\mathbf{R}^3$.

Przypuśćmy, że ten sam punkt P opisujemy w dwóch układach odniesienia (układach współrzędnych) U i U', przypisując mu odpowiednio współrzędne (x, y, z) i (x', y' z'):



Jeżeli osie układu U' są tylko przesunięte równolegle w stosunku do odpowiednich osi układu U, zachodzi:

$$x' = x - X$$
$$y' = y - Y$$
$$z' = z - Z$$

gdzie (X, Y, Z) opisuje położenie początku układu U' względem układu U. Używając notacji wektorowej dla elementów $\mathbf{R}^3$, mamy:

$$\vec{\mathbf{r}}' = \vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}} \tag{1}$$

Podkreślam, że notacja wektorowa nie oznacza tutaj opisu niezależnego od układu współrzędnych, ale właśnie opis za pomocą współrzędnych – te wektory nie „żyją" w przestrzeni fizycznej (ta nie jest w ogóle przestrzenią wektorową; jeżeli już, to afiniczną), ale w przestrzeni współrzędnych kartezjańskich $\mathbf{R}^3$.

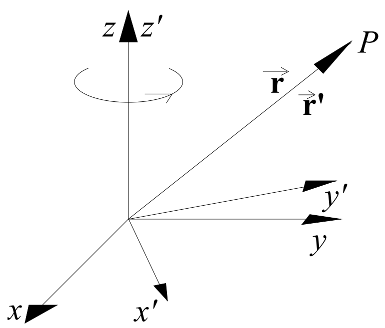
Wektory położeń są funkcjami czasu *t*. Załóżmy, że $\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{R}}_0 + t\vec{\mathbf{u}}$, a więc że początek układu *U'* porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym względem układu *U*. Różniczkując po czasie obie strony równania (1), otrzymujemy:

$$\vec{\mathbf{v}}' = \vec{\mathbf{v}} - \vec{\mathbf{u}} \tag{2}$$

co jest zwykłą transformacją Galileusza dla prędkości. Znowu wektory są jedynie skrótami dla trójek liczb ($\vec{\mathbf{v}}$ to $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ itd.) i nie musimy w tej chwili pytać, czy są opisem jakiegoś obiektu niezależnego do wyboru układu odniesienia.

Jeżeli równanie (2) zastosujemy do punktu *P* umieszczonego akurat na początku układu *U*, otrzymamy $\vec{\mathbf{v}}' = -\vec{\mathbf{u}}$, zgodnie z oczywistą intuicją: względem układu *U'* układ *U* porusza się z prędkością $-\vec{\mathbf{u}}$.

Po tym niemal trywialnym przypadku ruchu postępowego rozpatrzmy przypadek „czystego" obrotu: układ *U'* obraca się względem *U* w taki sposób, że początki obu układów cały czas się pokrywają (poniższy rysunek zakłada więcej – że oś obrotu jest ustalona i pokrywa się z osiami *z* i *z'*):



Podkreślmy, że $\vec{\mathbf{r}}'$ to w ogólności inna trójka liczb niż $\vec{\mathbf{r}}$, choć obie odpowiadają tej samej strzałce na naszym rysunku – są dwoma różnymi opisami tej strzałki. Opisy te wiążą się przez tzw. macierz obrotu:

$$\vec{\mathbf{r}}' = \mathbf{A}\vec{\mathbf{r}},$$

zależną, w ogólności, od czasu. Różniczkowanie obu stron po czasie daje, zgodnie z regułą Leibniza:

$$\vec{\mathbf{v}}' = \mathbf{A}\vec{\mathbf{v}} + \dot{\mathbf{A}}\vec{\mathbf{r}}$$

Pytajmy o prędkość w chwili zero – można przecież mierzenie czasu rozpocząć dowolnie. Niech $\mathbf{A_0} = \mathbf{A}(0)$. Załóżmy, że w pobliżu chwili zero nasz obrót jest jednostajny, z prędkością kątową ω, wokół ustalonej osi pokrywającej się z osią *z*.

Wtedy
$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t & 0 \\ -\sin\omega t & \cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{A_0}$$

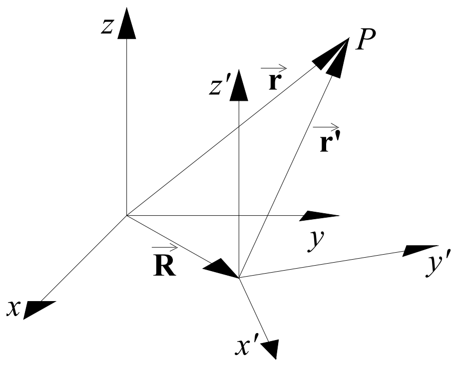
skąd
$$\dot{\mathbf{A}}(0) = \begin{pmatrix} 0 & \omega & 0 \\ -\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{A_0}$$

Dla $\vec{\mathbf{w}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ otrzymujemy $\dot{\mathbf{A}}(0)\vec{\mathbf{w}} = \begin{pmatrix} \omega y \\ -\omega x \\ 0 \end{pmatrix}$, czyli $\dot{\mathbf{A}}(0)\vec{\mathbf{w}} = -\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{w}}$, gdzie $\vec{\boldsymbol{\omega}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$.

Ostatecznie
$$\vec{\mathbf{v}}' = \mathbf{A}_0\vec{\mathbf{v}} - \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{A}_0\vec{\mathbf{r}}. \qquad (3)$$

Jeżeli akurat $\mathbf{A_0} = \mathbf{1}$, mamy po prostu $\vec{\mathbf{v}}' = \vec{\mathbf{v}} - \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{r}}$.

Jesteśmy gotowi do rozpatrzenia przypadku ogólnego, kiedy ruch układu *U’* względem *U* jest złożeniem ruchu postępowego i obrotowego.



Teraz $\vec{\mathbf{r}}' = \mathbf{A}(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}})$ i przy poprzednich założeniach co do postaci zależności od czasu $\vec{\mathbf{R}}$ oraz **A** w chwili zero mamy, według (3), $\vec{\mathbf{v}}' = \mathbf{A}_0(\vec{\mathbf{v}} - \vec{\mathbf{u}}) - \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{A}_0(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}_0)$. Jeśli ponadto $\mathbf{A}_0 = \mathbf{1}$, zachodzi:

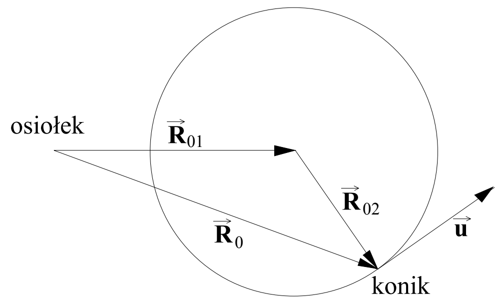
$$\vec{\mathbf{v}}' = \vec{\mathbf{v}} - \vec{\mathbf{u}} - \vec{\boldsymbol{\omega}} \times (\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{R}}_0)$$

Zastosujmy ten wynik do punktu *P* umieszczonego w początku układu *U*. Wtedy $\vec{\mathbf{r}} \equiv 0$ i $\vec{\mathbf{v}} \equiv 0$, zatem

$$\vec{\mathbf{v}}' = -\vec{\mathbf{u}} + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{R}}_0. \tag{4}$$

Widzimy zatem, że wynik $\vec{\mathbf{v}}' = -\vec{\mathbf{u}}$ dla ruchu postępowego jest uzupełniony dodatkowym składnikiem związanym z obrotem układu *U'*.

Następny rysunek przedstawia widok z góry na karuzelę z konikiem i osiołkiem.



Niech $\vec{\mathbf{R}}_0 = \vec{\mathbf{R}}_{01} + \vec{\mathbf{R}}_{02}$, jak na rysunku. Zgodnie z (4) mamy:

$$\vec{\mathbf{v}}' = -\vec{\mathbf{u}} + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{R}}_{01} + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{R}}_{02}$$

ale $\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{R}}_{02} = \vec{\mathbf{u}}$, zatem $\vec{\mathbf{v}}' = \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{R}}_{01}$. Długość tego wektora to właśnie owe 5 m/s, będące odpowiedzią w zadaniu z „Lwiątka".

Dwa uproszczone i przez to sympatyczne warianty zadania o koniku i osiołku podpowiedział pan Jerzy Karczmarczuk:

1. Konik znajduje się na osi karuzeli, a osiołek na ziemi, 5 m od osi. Karuzela wiruje z prędkością kątową 1 rad/s. Jaką prędkość ma osiołek względem konika, a jaką konik względem osiołka?

2. Karuzela ma 5 metrów i zarówno konik jak i osiołek (też drewniany) wirują razem z nią, konik w głębi, a osiołek na skraju. Prędkość konika to 3 m/s, a osiołka 5 m/s. Jaką wartość ma prędkość osiołka względem konika?