Obwody elektryczne i liczby zespolone

Jerzy Karczmarczuk
Zakład Informatyki, Uniwersytet w Caen, Francja

1. Wstęp

W *Fotonie* 94/2006 został opublikowany artykuł Jerzego Gintera „Obwody prądu przemiennego bez liczb zespolonych”. Czytelnik mógł zauważyć, że opis przebiegów natężenia i napięcia prądu zmiennego w tych obwodach wymaga elementarnych, ale często żmudnych rachunków trygonometrycznych oraz odrobiny rachunku różniczkowego i całkowego, które pozwalają powiązać natężenie z napięciem na okładkach kondensatora czy na zaciskach solenoidu.

Celem artykułu jest przedstawienie alternatywnego sformułowania tych rachunków, niewymagającego – na ogół – różniczkowania ani całkowania, oraz operującego funkcją algebraicznie prostszą niż trygonometryczne: funkcją wykładniczą. Przesunięcia fazowe itp., oblicza się wówczas prościej. Cena, którą trzeba zapłacić jest użycie **liczb zespolonych**, konstrukcji wykraczającej poza program licealny, ale które są wprowadzane od początku na *wszystkich studiach fizyki oraz technicznych na całym świecie*. Nie da się ich uniknąć i nie należy się ich obawiać, gdyż rachunki zespolone są stosunkowo proste i często bardzo zabawne. Wiele języków programowania ma wbudowane operacje na liczbach zespolonych, a w wielu innych możemy takie operacje łatwo skonstruować sami.

2. Co to są liczby zespolone

Celem tego zwartego wstępu jest jedynie dyskusja podstawowych własności algebraicznych tych obiektów matematycznych. Wszyscy „wiedzą”, że równanie $x^2 = -1$ nie ma rozwiązań. Ściślej mówiąc, nie ma *rozwiązań rzeczywistych*. Jednak to „nieistnienie” rozwiązań ma podobny charakter jak brak rozwiązań równania $2x = 1$, jeśli ograniczyć się do liczb całkowitych, lub równania $x^2 = 2$, jeśli nie chcemy wyjść z dziedziny liczb wymiernych.

Matematycy maja jednak przywilej do tworzenia bytów nieoczywistych i obiekt $\sqrt{-1}$ pojawił się w nauce już bardzo dawno temu, pewne spekulacje można już znaleźć w literaturze starogreckiej. Poważniejsze prace sięgają XVI wieku (Cardano). W 1637 Descartes nazwał ten obiekt „liczbą urojoną”.

Liczby te doczekały się trwałego obywatelstwa w matematyce dopiero 100 lat później, w czasach Eulera. W szczególności niezbyt przychylnie traktowano własność $\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1} = -1$, która gwałciła uznane od dawna prawo $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$. Należało przyjrzeć się głębiej własnościom funkcji $\sqrt[2]{\ }$ i uznać, że fakt iż pierwiastek kwadratowy jest funkcja dwuwartościową, np. $\sqrt{4} = \pm 2$, jest dość fundamentalny...

Liczbą zespoloną będziemy nazywać obiekt zapisywany jako $x+iy$, gdzie i jest naszą liczbą urojoną, $i=\sqrt{-1}$, a x i y są zwykłymi liczbami rzeczywistymi. (Inżynierowie często używają litery j zamiast i, gdyż I zwyczajowo oznacza natężenie prądu i obawiano się pomyłek). Liczby rzeczywiste można traktować jako zespolone z zerową częścią urojoną: $a = a + 0 \cdot i$.

Algebra tych liczb wygląda dość standardowo. Mnożenie przez liczbę rzeczywistą ma postać: $a(x + iy) = ax + iay$. Dodawanie i mnożenie spełniają następujące własności:

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d), \tag{1}$$

$$(a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc). \tag{2}$$

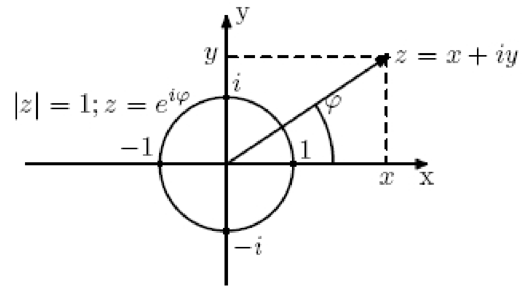
Odejmowanie wygląda podobnie jak dodawanie, dzielenie także jest łatwe. Wprowadźmy pojęcie sprzężenia zespolonego. Jeśli $z = x + iy$, liczbą doń sprzężoną będzie z definicji $\bar{z} = x - iy$. Łatwo sprawdzić, że $\bar{z}z = x^2 + y^2$ i jest liczbą rzeczywistą (brak członu z i). W związku z tym odwrotność liczby zespolonej możemy obliczyć następująco:

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2} \tag{3}$$

Stąd w oczywisty sposób wynika wzór na dzielenie $z/w = \frac{1}{w\bar{w}} \cdot z\bar{w}$. Liczbę rzeczywistą $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$ nazwiemy modułem, lub wartością bezwzględną liczby z. Liczbę $|z|$ okresla sie także jako *normę* z. Gdy spotykamy się po raz pierwszy z liczbami zespolonymi, jedną z pierwszych wątpliwości jest: a co będzie jeśli chcemy obliczyć $\sqrt{i}$? Czy zmusi nas to do wprowadzenia kolejnych, jeszcze bardziej „urojonych" tworów? Otóż nie. Ciało liczb zespolonych jest *zupełne*, wielomian N-tego stopnia ze współczynnikami zespolonymi, posiada gwarantowanie N pierwiastków (zer; niekoniecznie różnych). I tak łatwo sprawdzić, że $\sqrt{i} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$.

3. Interpretacje geometryczne liczb zespolonych i formuła Eulera

Możemy zadać pytanie: „gdzie leżą liczby zespolone"? Na osi rzeczywistej nie ma dla nich miejsca. Ponieważ strukturalnie liczba zespolona $z = x+iy$ zawiera tę samą informację co *para* liczb rzeczywistych (x, y), naturalne było spostrzeżenie, że liczby te trzeba ulokować w przestrzeni dwuwymiarowej, na płaszczyźnie. Pierwszym, który opisał tę interpretację, w 1799 roku, był Caspar Wessel, ale pewne rozważania można znaleźć już u Wallisa, sto lat wcześniej. Płaszczyznę zespoloną spopularyzował dopiero – wiele lat później – Gauss, mający olbrzymi wpływ na współczesnych. Często więc mówi się o płaszczyźnie Gaussa (choć i są tacy, którzy wolą mówić, jeszcze z innych historycznych powodów, o diagramie Arganda).



Rys. 1. Płaszczyzna Gaussa: $z = x + iy$

Okrąg na rysunku 1 przedstawia miejsce geometryczne liczb zespolonych o module równym jedności. Dowolną liczbę z możemy naturalnie przedstawić w postaci $z = |z|\cdot\left(\hat{x} + i\hat{y}\right)$. Po wyłączeniu normy, część rzeczywista: $\hat{x}$ i urojona: $\hat{y}$ spełniają związek $\hat{x}^2 + \hat{y}^2 = 1$. Możemy z oczywistych względów napisać: $z = |z|(\cos(\varphi)+i\,\sin(\varphi))$. Jednak można to zapisać prościej. Leonhard Euler wykazał, że następująca równość ma miejsce:

$$\cos(x) + i\,\sin(x) = e^{ix}, \tag{4}$$

dla dowolnej liczby x. Tak wiec, $z = |z|e^{i\varphi}$. Kąt φ bywa nazywany argumentem albo fazą liczby zespolonej z.

Szczególną postacią formuły Eulera jest $e^{i\pi} + 1 = 0$, wzór, którego intuicyjnie pojąć nie sposób, ale który wiąże w jedno równanie 5 najważniejszych liczb w matematyce: 0, 1, i, e, oraz π. Dowodów formuły Eulera jest sporo, najprościej jest zauważyć, że funkcja $f(x) = e^{ix}$ równa jest jedności dla $x = 0$ i spełnia równanie różniczkowe $f'(x) = if(x)$. *Dokładnie* takie same własności ma funkcja $g(x) = \cos(x) + i\,\sin(x)$. Te dwie funkcje muszą więc być identyczne. Czytelnik zechce sprawdzić, że pochodna wyrażenia $(\cos(x) + i\,\sin(x))/\exp(ix)$ się zeruje, wiec to wyrażenie jest stałą, która musi być równa 1.

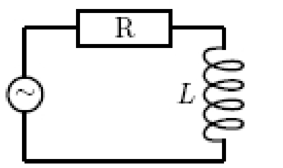
Formuła Eulera ma sporo zastosowań. Pozwala wykorzystać funkcję wykładniczą zamiast trygonometrycznych, z późniejszą separacją części rzeczywistej i urojonej. Pozwala wyrazić potęgi $\cos(x)^n$ i $\sin(x)^n$ przez sinusy i kosinusy zwielokrotnionego argumentu x dzięki tożsamościom: $\cos(x) = (e^{ix} + e^{-ix})/2$, oraz $\sin(x) = (e^{ix} - e^{-ix})/(2i)$. Pozwala obliczać takie nieintuicyjne wielkości jak i^i, sprawdźmy: $i^i = \exp\left(\frac{\pi}{2} i\cdot i\right) = \exp\left(-\frac{\pi}{2}\right)$. Formuła Eulera pozwala także zorientować się, co to jest logarytm z liczby zespolonej: $\log(z) = \log(|z|e^{i\varphi}) = \log(|z|) + i\varphi$.

4. Zespolony zapis prądu zmiennego

Przejdźmy teraz do opisu prądu zmiennego za pomocą liczb zespolonych. Jeśli zmienna siła elektromotoryczna w obwodzie wyraża się sinusem albo kosinusem (co jest konwencją), np.: $E = E_0 \cos(\omega t)$, przyjmiemy zapis $E = E_0 \exp(i\omega t)$ i w przypadku jeśli w końcu rachunków będzie nam potrzebna zależność liczbowa napięcia lub natężenia od czasu, wybierzemy wartość składowej rzeczywistej otrzymanego wyrażenia zespolonego. Wybór kosinusa lub sinusa do opisu zmian siły elektromotorycznej zależy od ustalenia fazy początkowej i zwykle nie ma znaczenia dla rachunków. Prawo Ohma i prawa Kirchhoffa funkcjonują dalej, tylko wzory wyrażające napięcia i natężenia prądu stają się zespolone i nie mają natychmiastowej interpretacji fizycznej. Jednak, zarówno część rzeczywista jak i składowa urojona tych wyrażeń są liczbami rzeczywistymi i ich interpretacja jest naturalna. Można zadać pytanie: jeśli fizyczne natężenie prądu jest równe $A\cos(\omega t)$, a my je zapisujemy w postaci zespolonej funkcji wykładniczej, to czemu fizycznie odpowiada część urojona, ale *nie należy* doszukiwać się „dziwnej" fizyki w technikach ściśle rachunkowych. Liczby zespolone w teorii elektryczności (a także w teorii fal elektromagnetycznych) są bardzo pożyteczne, ale są jedynie chwytem obliczeniowym. W tym przypadku część urojona odpowiadałaby po prostu innej konfiguracji dynamicznej, schematowi, w którym natężenie ma przesuniętą fazę w stosunku do kosinusa. (Dla porządku można wspomnieć, że w mechanice kwantowej sytuacja jest o wiele bardziej skomplikowana, tam podstawowe wielkości jak wektory stanów i podstawowe równania mają składowe zespolone od początku i ich interpretacja wymaga zupełnie innego spojrzenia na struktury matematyczne opisujące fizykę...)

5. Impedancje: zespolone oporności

Spadek napięcia na oporniku o oporności R jest równy $U_R = I \cdot R$, gdzie I jest natężeniem prądu. Ponieważ w przypadku indukcyjności pojawia się siła elektromotoryczna samoindukcji, związana z *pochodną natężenia*, co w przypadku kosinusoidalnego prądu zmiennego zamienia kosinus na sinus, okazało się, że najprościej to wyrazić przypisując solenoidowi *zespoloną „oporność"*: impedancję równą $ZL = i\omega L$.



Rys. 2. Obwód RL

Spadek napięcia na szeregowo połączonych LR przyjmie więc postać $U = IZ$, gdzie $Z = (R + i\omega L)$. Moduł tej wielkości wynosi $|Z| = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$. Zgodnie z formułą Eulera, faza wyraża się zależnościami trygonometrycznymi:

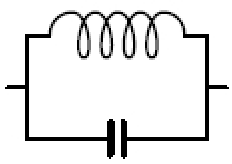
$$\cos(\varphi) = \frac{R}{|Z|}; \qquad \sin(\varphi) = \frac{\omega L}{|Z|}; \qquad \text{lub} \quad \mathrm{tg}(\varphi) = \frac{\omega L}{R}. \tag{5}$$

Jeśli natężenie prądu wyraża się wzorem $I = I_0 e^{i\omega t}$, natychmiast widać, że spowoduje to przesunięcie fazy napięcia względem natężenia: $U = I_0|Z| \exp(i\omega t + \varphi)$, jak opisano w artykule J. Gintera. Ponieważ przy mnożeniu funkcji wykładniczych, wykładniki się po prostu dodają, obliczenie przesunięcia fazy nie wymaga kombinowania funkcji trygonometrycznych.

W podobny sposób opisujemy kondensatory w układzie. Każda pojemność C charakteryzuje się zespoloną impedancją $Z_C = \dfrac{1}{i\omega C} = -i/(\omega C)$. Tak więc w formułach opisujących obwód RLC, indukcyjność i pojemność wchodzą w postaci kombinacji $\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)$, jak we wzorach (31) – (35) u J. Gintera. Wartość bezwzględna impedancji pojemnościowej jest odwrotnie proporcjonalna do pojemności, tj. duże kondensatory „przewodzą lepiej", ale przesunięcie fazowe napięcia względem natężenia wynosi zawsze $\pi/2$.

6. Rezonans

Naszym celem jest jedynie zasygnalizowanie istnienia techniki liczb zespolonych w omawianej dziedzinie, kończymy więc szybko obliczając częstość rezonansową równoległego obwodu LC, jak na rysunku obok. Przy tej częstości, obwód zachowuje się jakby miał nieskończoną impedancję. Aby obliczyć tę impedancję w funkcji częstości, wystarczy zastosować wynikającą z prawa Kirchhoffa regułę: $1/Z = 1/Z_L + 1/Z_C$. Mamy więc



Rys. 3. Obwód LC równoległy

$$Z = i\frac{1}{\dfrac{1}{\omega L} - \omega C} = i\frac{\omega L(1 + \omega^2 LC)}{1 - (\omega^2 LC)^2} \tag{6}$$

Widzimy więc, że $\omega = 1/\sqrt{LC}$ jest częstością rezonansową, gdyż przy niej mianownik formuły (6) się zeruje. Obecność zwykłych oporności bocznikujących pojemność (upływności), zwykłego oporu solenoidu, itp., komplikuje nieco rachunki, ale pozostają one nadal łatwe.

Dzięki zastosowaniu liczb zespolonych zależności różniczkowo/całkowe między prądami i napięciami stały się czysto algebraiczne. Okazuje się, że taka algebraizacja jest możliwa również w przypadku, jeśli przebiegi prądowe w układzie nie są czysto sinusoidalne, ale dowolnie zmienne. Wymaga to zastosowania tzw. transformat Fouriera lub Laplace'a do funkcji opisujących te przebiegi, ale to już jest inna historia. Zainteresowanych odsyłam do podręczników analizy matematycznej i elektrotechniki.