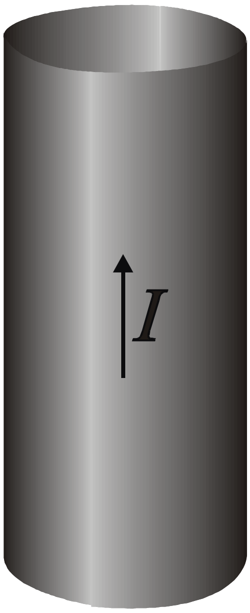
KĄCIK ZADAŃ

Rura przewodząca prąd – bilans energii

Sławomir Brzezowski
Instytut Fizyki UJ

Rozważmy długą prostą okrągłą cienkościenną rurę o promieniu r, której ściankami (wzdłuż rury) płynie prąd elektryczny o natężeniu I.



1. Jakie naprężenia wystąpią w rurze? Spróbuj udzielić ilościowej odpowiedzi na to pytanie w takiej formie, jaką uznasz za właściwą.

2. Wyobraź sobie, że rura jest zupełnie wiotka i utrzymuje swój kształt tylko dzięki temu, że jest wypełniona nieściśliwą, nieprzewodzącą substancją, utrzymywaną pod odpowiednim ciśnieniem p. Oblicz to ciśnienie.

3. Wyobraź sobie, że do rury wtłoczono taką ilość ww. substancji, że promień rury zwiększył się o dr (zakładamy, że ścianki rury są idealnie rozciągliwe i dla ich rozciągania nie trzeba wykonywać pracy). Rozważ następujący bilans energii:
a. Wtłoczenie cieczy wymaga wykonania pracy.
b. Na skutek zgrubnięcia rury tracimy energię zawartą w polu magnetycznym wypełniającym cienką warstwę przestrzeni otaczającej rurę przed napompowaniem, bo wewnątrz rury pola magnetycznego nie ma.

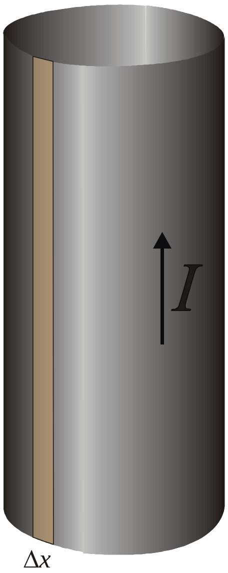
Bilans ten jest jawnie niedomknięty. Wskaż brakujący element w tym bilansie i przeprowadź odpowiedni rachunek wykazujący domykanie się bilansu.

xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx

Ad 1 i 2
Jak wiemy, wartość pola na zewnątrz rury maleje jak odwrotność odległości R od osi rury

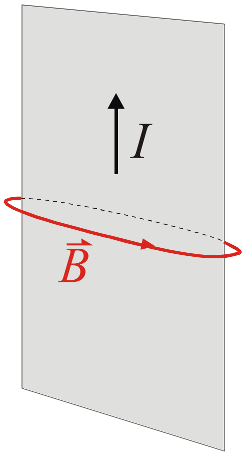
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}.$$

Rozważmy wąski pasek powierzchni rury, równoległy do jej osi. Szerokość tego paska oznaczmy przez Δx. Pokażemy, że pasek ten wciągany jest do wnętrza rury, i obliczymy siłę działającą na odcinek paska o dowolnie wybranej, ustalonej długości l.



W tym celu zastanówmy się nad tym, jakie pole magnetyczne zastalibyśmy w szczelinie, która powstałaby po usunięciu paska. Pytanie tylko na pozór jest trudne. Zakładamy, że pasek jest na tyle wąski, że może być uznany za płaską wstęgę przewodzącą prąd elektryczny. Jak wiemy, wstęga taka otoczona jest polem magnetycznym, którego linie są zamkniętymi pętlami. Przy samej powierzchni wstęgi linie te są do powierzchni wstęgi równoległe, a wartość bezwzględna pola magnetycznego po obydwu stronach jest blisko wstęgi jednakowa i wynosi (σ oznacza gęstość powierzchniową prądu, o wymiarze $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$)

$$B_0 = \frac{\mu_0 \sigma}{2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}.$$



Dodanie tego pola do pola panującego w szczelinie sprawia, że po jednej stronie wstęgi pole znika, a po drugiej wynosi $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$. Na tej podstawie stwierdzamy, że pole w szczelinie jest prostopadłe do jej brzegów, jego wartość wynosi $B_0 = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}$, a jego zwrot jest taki, jak pokazano na rysunku (pole $\vec{B}_0$).

W tym właśnie polu zanurzony jest prąd płynący wyodrębnionym paskiem, na który ze strony tego pola działa siła Lorentza, wgniatająca pasek do wnętrza rury, o wartości

$$\Delta F = \Delta x \sigma l B_0 = \Delta x l \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2}.$$

Dzieląc przez powierzchnię paska, otrzymujemy stąd poszukiwane ciśnienie

$$p = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2}.$$

Możemy teraz obliczyć naprężenia powstające w ściankach realnej, sztywnej rury. Obliczmy siłę, jaką dociskane są do siebie połówki odcinka rury o długości l. Połówki wiotkiej rury utrzymywane byłyby w równowadze przez siłę powstającą z pomnożenia ciśnienia p przez powierzchnię przekroju, oddzielającą połówki rury równą $2rl$, czyli połówki dociskane są siłą o wartości $F = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi^2 r}$. Tak więc w ściankach rury powstaje naprężenie ściskające styczne do obwodu rury, o wartości $N = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r}$ na jednostkę długości rury.

Ad 3

Wtłaczając substancję nieściśliwą, wkładamy pracę dW_1 i jeszcze tracimy część energii zawartej w polu magnetycznym dW_2. Na co idą te dwie porcje energii? Obliczmy je najpierw.

Jeżeli promień rury ma wzrosnąć o dr, to do odcinka rury o długości l musimy wtłoczyć objętość $dV = 2\pi r l dr$. Przy znanym ciśnieniu p wymaga to pracy

$$dW_1 = p dV = \frac{\mu_0 I^2 l dr}{4\pi r}.$$

W tej samej objętości znika pole magnetyczne o wartości $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$, czyli tracimy energię

$$dW_2 = \frac{1}{2\mu_0} B^2 dV = \frac{\mu_0 I^2 l dr}{4\pi r}.$$

Co stało się z energią $dW_1 + dW_2 = \frac{\mu_0 I^2 l dr}{2\pi r}$?

Musimy uświadomić, sobie, że rura jest częścią zamkniętego obwodu: w nieskończoności do „końców” rury przyczepione są przewody zasilające. Obwód ten obejmuje określony strumień pola magnetycznego, który ulega uszczupleniu, gdy rura grubieje. Na odcinku l oznacza to zmniejszenie się strumienia o $d\Phi = Bldr$. Podczas zwiększania grubości rury na odcinek l przypada siła elektromotoryczna samoindukcji, która – jak można łatwo pokazać – działa w kierunku płynącego prądu. Siła ta przyczyniałaby się do wzrostu prądu, chyba że na czas zwiększania grubości rury włączymy do obwodu odpowiednio dobrany dodatkowy opór, który ten wzrost prądu uniemożliwi. Na tym oporze wydzieli się energia dW, którą teraz obliczymy.

Niech wzrost grubości rury nastąpi w czasie dt. Siła elektromotoryczna indukcji rodząca się na odcinku rury o długości l wyniesie $E = \frac{d\Phi}{dt}$ (możemy założyć, że siła elektromotoryczna samoindukcji jest stała podczas całego odcinka czasu dt – nie ma to istotnego znaczenia dla wyniku naszego rozumowania). Podczas pęcznienia rury siła elektromotoryczna samoindukcji wykona pracę $dW = Edq$, gdzie dq jest ładunkiem, który zdąży przepłynąć przez rurę w czasie dt, równym Idt.

Mamy więc $dW = \frac{Bldr}{dt} Idt = BlIdr = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} lIdr = \frac{\mu_0 I^2 ldr}{2\pi r}$, czyli bilans energetyczny został domknięty.