Rozwiązanie równania oscylatora harmonicznego

Andrzej Odrzywołek
Instytut Fizyki UJ

1. Wstęp

Motywacją do zebrania różnych sposobów rozwiązania równania oscylatora harmonicznego:

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -kx(t) \tag{1}$$

jest często zadawane przez studentów (i nie tylko) pytanie: **jak rozwiązać** (1)?

Równanie to pojawia się wielokrotnie w wielu działach fizyki i jest standardowym przykładem stosowania różnych metod matematycznych fizyki (MMF). Zapisywane jest w kilku postaciach równoważnych równaniu (1), np.:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{2}$$

Niewiadomą jest funkcja $x(t)$, przy czym często pomija się jej argument t, który *nie występuje* jawnie w równaniu (2). Fakt ten jest okolicznością pozwalającą na obniżenie rzędu równania[1], o czym napiszę dalej. Problem rozwiązania (1) można sformułować słownie w następujący sposób: **jaka funkcja po dwukrotnym zróżniczkowaniu da samą siebie ze znakiem minus, dodatkowo pomnożoną przez pewną stała?** Odpowiedź na takie pytanie jest wiadoma każdemu studentowi, który potrafi różniczkować: taką własność mają funkcje sin (sinus) i cos (kosinus). Parafrazując Lema, można powiedzieć, że taka odpowiedź zadowoli, być może, laika, ale nie jest wystarczająca dla umysłu ścisłego. Dla dociekliwych, przedstawiam dziewięć na pewien sposób różnych metod *„rozwiązania”* równania (2).

Pierwsza z nich, określona jako *Ansatz* (pkt 2), polega na zapostulowaniu pewnego wzoru zawierającego kilka symboli, wstawieniu go do (1), a następnie rozwiązaniu otrzymanego równania algebraicznego. Kolejna metoda (pkt 3) jest bardziej sformalizowaną wersją poprzedniej. Następnie przejdziemy do wyprowadzenia zasady zachowania energii (pkt 4) i blisko spokrewnionej metody rozwiązania poprzez obniżenie rzędu równania (pkt 5). Następnie pokażę ciekawą metodę pochodzącą z podręcznika Landaua i Lifszyca (pkt 6). Równanie można rozwiązać korzystając z rozwinięcia w szereg potęgowy (pkt 7) oraz wykorzystując eksponentę macierzy (pkt 8). Mechanika teoretyczna dostarcza

[1] Rzędem równania różniczkowego zwyczajnego nazywany stopień najwyższej pochodnej w równaniu. Dla (1) rząd wynosi dwa.

jeszcze dwóch metod: przekształcenie kanoniczne (pkt 9) oraz równanie Hamiltona-Jacobiego (pkt 10).

2. Ansatz

Równanie (2) jest na tyle ważne, że jego rozwiązanie każdy szanujący się fizyk powinien umieć podać z pamięci. Gdyby ogłoszono plebiscyt na 10 najważniejszych równań fizyki, równanie (2) wraz z jego rozwiązaniem z pewnością znalazłoby się na tej liście. Trzy podstawowe postacie rozwiązania ogólnego to:

$$x(t) = a\cos\omega t + b\cos\omega t \tag{3a}$$

$$x(t) = A\sin(\omega t + \phi) \quad \text{lub rzadziej:} \quad x(t) = A\cos(\omega t + \phi). \tag{3b}$$

Równanie (2) może być traktowane jako równanie o niewiadomej *zespolonej* funkcji argumentu rzeczywistego. Fakt ten wykorzystuje się w fizyce i elektrotechnice celem ułatwienia obliczeń. Oto postać zespolona rozwiązania:

$$x(t) = \alpha e^{i\omega t} + \beta e^{-i\omega t}. \tag{3c}$$

Aby postać (3c) dawała rozwiązanie **rzeczywiste**, liczby zespolone α i β muszą być sprzężone: $\beta = \bar{\alpha}$.

Dla przykładu, sprawdzimy postać (3b). Obliczamy pierwszą pochodną po t:

$$\dot{x} \equiv \left(A\sin(\omega t + \phi)\right)' = A(\sin\omega t + \phi)' = A\cos(\omega t + \phi)\cdot(\omega t + \phi)' = A\omega\cos(\omega t + \phi)$$

oraz drugą pochodną (tj. pochodną pierwszej pochodnej):

$$\ddot{x} \equiv \left(A\omega\cos(\omega t + \phi)\right)' = -A\omega^2\sin(\omega t + \phi).$$

Po wstawieniu do (2) otrzymujemy:

$$-A\omega^2\sin(\omega t + \phi) + \omega^2\cdot A\sin(\omega t + \phi) = 0,$$

bo obydwa wyrazy upraszczają się. Analogicznie można sprawdzić prawdziwość postaci (3a), która jest równoważna (3b). Można to sprawdzić rozwijając $\sin(\omega t + \phi)$ ze wzoru na sinus sumy:

$$A\sin(\omega t + \phi) = A\sin\phi\cos\omega t + A\cos\phi\sin\omega t = a\cos\omega t + b\cos\omega t,$$

gdzie $a = A\sin\phi, b = A\cos\phi.$

Użycie postaci zespolonej (3c) wymaga komentarza. Równanie (2) jest liniowe, czyli każda kombinacja liniowa rozwiązań $x_1(t)$ i $x_2(t)$ też jest rozwiązaniem:

$$x(t) = \lambda_1 x_1(t) + \lambda_2 x_2(t), \tag{4}$$

co łatwo sprawdzić wstawiając (4) do (2):

$$\left(\lambda_1 x_1(t)+\lambda_2 x_2(t)\right)''+\omega_2\left(\lambda_1 x_1(t)+\lambda_2 x_2(t)\right)=\lambda_1\ddot{x}_1+\lambda_2\ddot{x}_2+\lambda_1\omega^2 x_1+\lambda_2\omega_2 x_2=$$
$$=\lambda_1\left(\ddot{x}_1+\omega^2\ddot{x}_1\right)+\lambda_2\left(\ddot{x}_2+\omega^2\ddot{x}_2\right)=\lambda_1\cdot 0+\lambda_2\cdot 0=0,$$

bo funkcje x_1 i x_2 z założenia spełniają (2).

Jeżeli teraz wybierzemy zespolone λ_1 i λ_2 (np.: $\lambda_1=1$ oraz $\lambda_2=i$), to możemy z dwóch rozwiązań rzeczywistych utworzyć **zespolone** rozwiązanie (2). Część rzeczywista (a także urojona) rozwiązania zespolonego jest więc rozwiązaniem rzeczywistym. Jeżeli potraktujemy liczby α i β w (3c) jako zespolone:

$$\alpha=\alpha_1+i\alpha_2,\qquad \beta=\beta_1+i\beta_2,$$

to otrzymamy:

$$Re\left[(\alpha_1+i\alpha_2)e^{i\omega t}+(\beta_1+i\beta_2)e^{-i\omega t}\right]=(\alpha_1+\beta_1)\cos\omega t+(\beta_2-\alpha_2)\sin\omega t,$$

gdzie wykorzystano fundamentalną tożsamość Eulera:

$$e^{i\phi}=\cos\phi+i\sin\phi. \tag{5}$$

Fakt powyższy ma duże znaczenie praktyczne, gdyż posługując się zespoloną amplitudą drań, możemy do niej „zaabsorbować” fazę ϕ. Oznaczmy przez $\hat{A}\equiv Ae^{i\phi}$, gdzie $\hat{A}$ – zespolona amplituda, A – rzeczywista amplituda drgań, ϕ – faza:

$$Re[\hat{A}e^{i\omega t}]=Re[Ae^{i\phi}e^{i\omega t}]=ARe[e^{i(\omega t+\phi)}]=A\cos(\omega t+\phi).$$

Dzięki użyciu liczb zespolonych, rachunki są czysto algebraiczne, i nie zawierają funkcji trygonometrycznych.

3. Równanie charakterystyczne dla problemu liniowego

Ogólna metoda rozwiązywania równań i układów **liniowych** równań różniczkowych zwyczajnych opiera się na podstawieniu:

$$x(t)=e^{\lambda t}. \tag{6}$$

Podstawienie (6) sprowadza równanie różniczkowe do równania algebraicznego, które daje tyle różnych[2] wartości λ, ile wynosi rząd równania. Równania

[2] Przypadek, gdy wartości λ powtarzają się, wymaga dokładniejszego zbadania. Zob. np. I.N. Bronsztejn, K.A. Siemiendiajew, *Matematyka. Poradnik encyklopedyczny*, dowolne wydanie, cz. IV, rozdz. 5. Układy równań różniczkowych liniowych o stałych współczynnikach.

odpowiadające różnym wartościom λ są liniowo niezależne, a rozwiązanie ogólne będzie miało postać:

$$x(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}. \tag{7}$$

Dla równania (2) procedura wygląda następująco. Obliczamy pierwszą i drugą pochodną:

$$\dot{x} = \lambda e^{\lambda t}, \quad \ddot{x} = \lambda^2 e^{\lambda t}. \tag{8}$$

Przypominam, że różniczkowanie funkcji $e^{\lambda t}$ sprowadza się do mnożenia przez λ. Wstawiając (8) do (2) otrzymujemy:

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + \omega^2 e^{\lambda t} = \left(\lambda^2 + \omega^2\right) e^{\lambda t} = 0.$$

Z powyższego otrzymujemy *równanie charakterystyczne* o niewiadomej λ:

$$\lambda^2 = -\omega^2.$$

Jest to równanie kwadratowe z $\Delta < 0$, posiadające dwa rozwiązania urojone:

$$\lambda_1 = i\omega,\ \lambda_2 = -i\omega. \tag{9}$$

Wstawiając (9) do (7) otrzymujemy rozwiązanie ogólne, identyczne z (3c).

4. Zasada zachowania energii

Równanie (2) nie zawiera czasu t w sposób jawny. Oznacza to możliwość obniżenia rzędu równania o jeden. Z fizycznego punktu widzenia w układzie (2) jest zachowana energia. Mnożymy (2) przez $\dot{x}$:

$$\ddot{x}\dot{x} + \omega^2 x\dot{x} = 0.$$

Całkujemy obustronnie po czasie $(\int \ldots dt)$:

$$\int \ddot{x}\dot{x}\, dt + \int \omega^2 x\, \dot{x}\, dt = E/m \tag{10}$$

gdzie wszystkie stałe całkowania zostały przeniesione na prawą stronę i oznaczone literą E. Całki (10) są łatwe do obliczenia, pomimo że zawierają *nieznaną* (dowolną) funkcję czasu $x(t)$. W pierwszej stosujemy podstawienie $u = \dot{x}(t)$, a w drugiej $w = x(t)$:

$$\dot{x}(t) = u, \rightarrow \ddot{x}dt = du, \quad x(t) = w, \rightarrow \dot{x}dt = dw,$$

czyli:

$$\int u\, du + \omega^2 \int w\, dw = E/m, \quad \rightarrow \quad \frac{u^2}{2} + \omega^2 \frac{w^2}{2} = E/m.$$

Ostatecznie otrzymujemy:

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2 = E/m. \tag{11}$$

Równanie (11) można wyprowadzić jako sumę energii kinetycznej i potencjalnej.

Wychodząc od (11) można rozwiązać (1). Przepisujemy (11) podstawiając $\dot{x} \equiv dx/dt$:

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{2E/m - \omega^2 x^2}.$$

Powyższe jest równaniem o zmiennych rozdzielonych. Przenosimy wszystkie wyrazy zawierające *x* (w tym *dx*) na lewą stronę, natomiast *t* na prawą:

$$\frac{dx}{\sqrt{2E/m - \omega^2 x^2}} = dt.$$

Całkujemy obustronnie:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2E/m - \omega^2 x^2}} = \int dt.$$

Aby obliczyć całkę po prawej stronie przekształcamy:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2E/m - \omega^2 x^2}} = \sqrt{\frac{m}{2E}} \int \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{2E/m} x^2}}.$$

Podstawiamy:

$$\sqrt{\frac{\omega^2}{2E/m}}\, x = u, \quad \rightarrow \quad dx = \sqrt{\frac{2E/m}{\omega^2}}\, du,$$

co daje:

$$\sqrt{\frac{1}{\omega^2}} \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{\omega} \arcsin u.$$

Rozwiązanie ma postać (stała całkowania została oznaczona przez ϕ):

$$\arcsin u = \omega t + \phi.$$

Podstawiając $u = x\sqrt{\omega^2/(2E/m)}$, dostajemy ostatecznie:

$$x(t) = \sqrt{\frac{2E}{m}}\, \omega \sin(\omega t + \phi). \tag{12}$$

Ze wzoru (12) można odczytać zależność amplitudy A we wzorze (3b) od energii:

$$E = \frac{1}{2}kA^2.$$

5. Obniżenie rzędu równania

Przepisujemy równanie (2) wprowadzając prędkość $\upsilon = \dot{x}$:

$$\frac{d\upsilon}{dt} + \omega^2 x = 0.$$

W powyższym równaniu dokonujemy zamiany zmiennej niezależnej, z t na x:

$$\frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d\upsilon}{dx} \cdot \frac{dx}{dt},$$

ale:

$$\frac{dx}{dt} = \upsilon,$$

i ostatecznie:

$$\upsilon \frac{d\upsilon}{dx} + \omega^2 x = 0.$$

Otrzymaliśmy równanie pierwszego rzędu o zmiennych rozdzielonych:

$$\upsilon d\upsilon = -\omega^2 x dx, \quad \rightarrow \quad \int \upsilon d\upsilon = -\omega^2 \int x dx, \quad \rightarrow \quad \frac{\upsilon^2}{2} = -\omega^2 \frac{x^2}{2} + const.$$

Ponieważ $\upsilon = dx/dt$ otrzymujemy równanie:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = -\omega^2 \frac{x^2}{2} + const,$$

prawie identyczne z (11). Dalszy sposób postępowania w celu znalezienia funkcji $x(t)$ został opisany poniżej równania (11) w poprzednim rozdziale.

6. Metoda Landaua i Lifszyca

Opisany sposób pochodzi od Landaua i Lifszyca. Przekształcamy (2):

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{d}{dt}\left(\dot{x} - i\omega x\right) + i\omega x + \omega^2 x = \frac{d}{dt}\left(\dot{x} - i\omega x\right) + i\omega\left(\dot{x} - i\omega x\right).$$

Podstawiamy za wyrażenia w nawiasach:

$$\zeta = \dot{x} - i\omega x,$$

co daje:

$$\dot{\zeta} + i\omega\zeta = 0. \tag{13}$$

Równanie (13) jest równaniem pierwszego rzędu o zmiennych rozdzielonych. Jego rozwiązanie jest proste do uzyskania:

$$\frac{d\zeta}{dt} = -i\omega\zeta, \quad \rightarrow \quad \frac{d\zeta}{\zeta} = -i\omega dt.$$

Całkując obustronnie otrzymujemy:

$$\int \frac{d\zeta}{\zeta} = \ln\zeta = -i\omega t + const,$$

czyli:

$$\zeta(t) = Ae^{-i\omega t}.$$

Teraz musimy rozwiązać równanie **niejednorodne**:

$$\dot{x} - i\omega x = Ae^{-i\omega t}. \tag{14}$$

Rozwiązanie równania (14) składa się z dwóch członów: rozwiązania równania *jednorodnego*:

$$\dot{x} - i\omega x = 0 \tag{15}$$

i **dowolnego** (jakiegokolwiek) rozwiązania równania *niejednorodnego* (14). Rozwiązanie (15) można uzyskać identycznie jak (13), co daje:

$$x(t) = Be^{i\omega t}. \tag{16}$$

Rozwiązanie równania niejednorodnego otrzymamy **metodą uzmienniania stałych**. Zakładamy, że B w (16) jest funkcją czasu $B \equiv B(t)$, i wstawiamy do (14):

$$\dot{B}e^{i\omega t} + Bi\omega e^{i\omega t} - i\omega Be^{i\omega t} = Ae^{-i\omega t},$$

po uproszczeniu:

$$\dot{B}e^{i\omega t} = Ae^{-i\omega t}, \quad \rightarrow \quad \dot{B} = Ae^{-2i\omega t}.$$

Całkując obustronnie ostatnie równanie po czasie dostajemy:

$$B(t) = \int Ae^{-2i\omega t}\, dt = -\frac{A}{2i\omega}e^{-2i\omega t} + const.$$

Stałą bierzemy równą zero, bo interesuje nas jakiekolwiek rozwiązanie. Ostatecznie dostajemy:

$$x(t) = Be^{i\omega t} - \frac{A}{2i\omega}e^{-2i\omega t}e^{i\omega t} = \alpha e^{i\omega t} + \beta e^{-i\omega t},$$

gdzie podstawiłem $B = \alpha, -A/(2i\omega) = \beta.$

7. Metoda szeregów potęgowych

W tej części, aby nie zaciemniać procedury, rozważymy postać (2) z $\omega = 1$:

$$\ddot{x} + x = 0, \quad \text{z warunkami początkowymi:} \quad x(0) = 1,\ \dot{x}(0) = 0.$$

Rozwiązania poszukujemy w postaci **szeregu potęgowego**:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

gdzie a_n to nieznane liczby. Obliczamy pochodne:

$$\dot{x} = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad \ddot{x} = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

Przenumerowujemy pierwszą sumę:

$$\ddot{x} = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n$$

Wstawiając do równania otrzymujemy:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2}\, x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)\, a_{n+2} + a_n \right] x^n = 0.$$

Aby wyrażenie po lewej stronie było równe zero tożsamościowo, wszystkie współczynniki w nawiasach muszą być równe zeru:

$$(n+2)(n+1)\, a_{n+2} + a_n = 0. \qquad (17)$$

Otrzymaliśmy **równanie rekurencyjne**, które notabene wcale nie jest specjalnie łatwiejsze do rozwiązania niż różniczkowe. W tym przypadku jest to dosyć łatwe. Aby rozpocząć iterację (17) potrzebujemy podać dwa pierwsze wyrazy ciągu: a_0 i a_1. Korzystając z warunków początkowych dostajemy:

$$x(0) = a_0 = 1, \qquad \dot{x}(0) = a_1 = 0.$$

Kolejne wyrazy ciągu (17) to:

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = -\frac{a_0}{1 \cdot 2} = -\frac{1}{2}, \quad a_3 = 0, \quad a_4 = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}, \ldots$$

Widać, że nieparzyste wyrazy ciągu są równe zeru, a parzyste:

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n}{(2n)!}.$$

Suma:

$$x(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}=\cos x.$$

8. Metoda macierzowa

Rozwiązanie zagadnienia początkowego równania oscylatora harmonicznego można uzyskać sprowadzając problem do wektorowego równania liniowego pierwszego rzędu.

Zapisujemy (2) (używając podstawienia $\dot{x}=\upsilon$, tj. prędkości) jako układ równań liniowych I rzędu:

$$\begin{cases}\dot{x}=\upsilon\\ \dot{\upsilon}=-\omega^2 x\end{cases}$$

lub równoważnie, w postaci macierzowej:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}x\\ \upsilon\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{\upsilon}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\omega^2 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\ \upsilon\end{bmatrix}.$$

Ponieważ rozwiązaniem równania:

$$\dot{y}=A\,y,$$

z warunkiem początkowym $y(0)=y_0$ jest:

$$y(t)=y_0\,e^{At},$$

analogicznie możemy poprawnie napisać rozwiązanie dowolnego układu równań liniowych I rzędu:

$$\dot{\mathbf{X}}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{X},\quad \mathbf{X}=\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ \dots\\ x_n(t)\end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie zagadnienia początkowego $\mathbf{X}(0)=\mathbf{X}_0$ to:

$$\mathbf{X}(t)=e^{\mathbf{A}t}\cdot\mathbf{X}_0. \qquad (19)$$

Dla oscylatora harmonicznego macierz **A** to:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\omega^2 & 0\end{bmatrix}$$

i głównym problemem staje się obliczenie wyrażenia:

$$e^{\begin{bmatrix} 0 & t \\ -\omega^2 t & 0 \end{bmatrix}}$$

Obliczenie eksponenty macierzy jest możliwe z definicji:

$$e^{\mathbf{A}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathbf{A}^n$$

lub poprzez diagonalizację. Więcej szczegółów można znaleźć pod adresem: http://ribes.if.uj.edu.pl/mechanika_klasyczna/Zestaw2_Zad2_rozw.pdf. Wynik końcowy to:

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t)/\omega \\ -\omega \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix},$$

a rozwiązanie równania oscylatora harmonicznego:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ \upsilon(t) \end{bmatrix} = \exp(\mathbf{A}t) \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ \upsilon_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \cos(\omega t) + \dfrac{\upsilon_0}{\omega} \sin(\omega t) \\ \upsilon_0 \cos(\omega t) - x_0\, \omega \sin(\omega t) \end{bmatrix}.$$

9. Przekształcenie kanoniczne

Hamiltonian [3], [4] oscylatora harmonicznego można zapisać w postaci:

$$\mathcal{H}(p,q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2. \tag{20}$$

Równania kanoniczne Hamiltona [1] mają postać:

$$\dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}, \qquad \dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}, \tag{21}$$

czyli:

$$\dot{p} = -m\omega^2 q, \qquad \dot{q} = \frac{p}{m}.$$

Znajdziemy transformację kanoniczną [2] (czyli niezmieniającą *postaci* układu (21)) oryginalnego Hamiltonianu, prowadzącą do jego bardzo prostej postaci, a konkretnie takiej, w której nowe $\mathcal{H}$ będzie zależało tylko od jednej zmiennej [5]. Korzystając z jedynki trygonometrycznej, postulujemy transformację postaci:

$$p = \lambda f(P)\cos Q, \quad q = f(P)\sin Q.$$

Ponieważ transformacja nie zależy od czasu, nowy Hamiltonian ma postać:

$$\mathcal{H}'(P,Q)=\mathcal{H}(p(P,Q),q(P,Q))=\frac{\lambda^2 f(P)^2\cos^2 Q}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2 f(P)^2\sin^2 Q=$$
$$=f(P)^2\left(\frac{\lambda^2}{2m}\cos^2 Q+\frac{1}{2}m\omega^2\sin^2 Q\right).$$

Aby skorzystać z jedynki trygonometrycznej, musi zachodzić:

$$\frac{\lambda^2}{2m}=\frac{1}{2}m\omega^2,\quad \text{czyli}\quad \lambda=m\omega.$$

Aby transformacja $(p, q)\to(P,Q)$ była kanoniczna musi zachodzić:

$$\{p,\ q\}_{P,Q}=1,$$

gdzie po lewej stronie mamy nawias Poissona [2] liczony względem nowych zmiennych (P,Q). Obliczamy:

$$\{p,q\}_{P,Q}=\frac{\partial p}{\partial P}\frac{\partial q}{\partial Q}-\frac{\partial p}{\partial Q}\frac{\partial q}{\partial P}=$$
$$=m\omega f'(P)\cos Q\cdot f(P)\cos Q-(-m\omega f(P)\cos Q)\cdot f'(P)\sin Q=$$
$$=m\omega f(P)f'(P)(\cos^2 Q+\sin^2 Q)=m\omega f(P)f'(P)$$

Aby transformacja była kanoniczna, musi więc zachodzić:

$$m\omega f(P)f'(P)=1.$$

Rozwiązujemy równanie różniczkowe na $f(P)$:

$$m\omega f\frac{df}{dP}=1,\quad fdf=\frac{dP}{m\omega},$$

całkując obustronnie dostajemy:

$$\frac{1}{2}f^2=\frac{P}{m\omega}+const,$$

przyjmujemy stałą całkowania równą zeru i dostajemy:

$$f(P)=\sqrt{\frac{2P}{m\omega}}.$$

Nowym Hamiltonianem jest:

$$\mathcal{H}'(P,Q)=\omega P.$$

Równania kanoniczne przyjmują prostą postać:

$$\dot{P}=0, \quad \dot{Q}=\omega$$

a ich rozwiązanie to:

$$P(t)=P_0, \quad Q(t)=\omega t+\phi.$$

Transformując z powrotem do funkcji (p,q) otrzymujemy:

$$p(t)=\sqrt{2m\omega P_0}\,\cos(\omega t+\phi), \qquad q(t)=\sqrt{\frac{2P_0}{m\omega}}\,\sin(\omega t+\phi).$$

Warto zauważyć, że skoro ωP jest Hamiltonianem, to $\omega P_0 = E$ jest zachowaną energią, i wzór na $q(t)$ jest identyczny z wyprowadzonym wyżej wzorem (12) $(m\omega^2 = k)$.

10. Równanie Hamiltona-Jacobiego

Rozwiązanie równań ruchu układu opisanego pewnym hamiltonianem, jest równoważne szukaniu rozwiązań (cząstkowego) równania Hamiltona-Jacobiego:

$$\frac{\partial S(t,x)}{\partial t}+\mathcal{H}\left(\frac{\partial S(t,x)}{\partial x},x\right)=0.$$

Dla oscylatora harmonicznego, hamiltonian ma postać (20), i podstawiając do niego $p=\partial S/\partial x$ dostajemy:

$$\frac{\partial S(t,x)}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S(t,x)}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{2}m\omega^2x^2=0. \tag{21}$$

Rozwiązania szczególnego (całki zupełnej) szukamy w postaci rozseparowanej:

$$S(t,x)=-Et+s(x).$$

Wstawiając powyższe wyrażenie do (21) otrzymujemy:

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{ds(x)}{dx}\right)^2+\frac{1}{2}m\omega^2x^2=E.$$

Powyższe jest równaniem zwyczajnym o zmiennych rozdzielonych. Jego rozwiązanie to:

$$s=\int\sqrt{2mE-m^2\omega^2x^2}\,dx.$$

Całka jest typu:

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x\right),$$

co ładnie „wyprowadza” Wolfram Alpha: **http://www.wolframalpha.com/input/?i=int+sqrt(1-x^2)**

Po całkowaniu i uporządkowaniu wyrazów mamy:

$$s(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{2mE - m^2\omega^2x^2} + \frac{E}{\omega}\arcsin\left(\sqrt{\frac{m}{2E}}\,\omega x\right)$$

natomiast całka zupełna równania (22) to:

$$S(t,x) = -E\,t + s(x) = -E\,t + \frac{1}{2}x\sqrt{2mE - m^2\omega^2x^2} + \frac{E}{\omega}\arcsin\left(\sqrt{\frac{m}{2E}}\,\omega x\right).$$

Zależność położenia od czasu jest wyznaczona w sposób uwikłany pochodną czasową całki zupełnej względem energii E:

$$\frac{\partial S(t,x)}{\partial E} = -t_0.$$

Obliczenie pochodnej cząstkowej po E jest uciążliwe, ale ostatecznie wyrazy *nie zawierające* $\arcsin$ upraszczają się:

$$\frac{\partial s(x)}{\partial E} = \frac{1}{\omega}\arcsin\left(\sqrt{\frac{m}{2E}}\,\omega x\right),$$

otrzymując:

$$\arcsin\left(\sqrt{\frac{m}{2E}}\,\omega x\right) = \omega(t - t_0).$$

Działając obustronnie funkcją sin dostajemy:

$$\sqrt{\frac{m}{2E}}\,\omega x = \sin\left(\omega(t-t_0)\right),$$

czyli:

$$x = \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{2E}{m}}\sin\left(\omega(t-t_0)\right).$$

Końcowy wynik jest identyczny z (12), bo $\omega = \sqrt{k/m}$.

Pochodna $\partial S(t,x)/\partial x$ z kolei daje pęd:

$$p = \frac{\partial S}{\partial x} = \sqrt{2mE - m^2\omega^2x^2}.$$

Warto zauważyć, że stała t_0 określa translację w czasie, zgodnie z sensem zasady zachowania energii; po energii E różniczkujemy całkę zupełną.

11. Podsumowanie

Przedstawiłem dziewięć możliwych metod rozwiązania równania oscylatora harmonicznego (2). Niektóre są do siebie ewidentnie podobne rachunkowo (np. pkt 2 i 3), ale dostrzeżenie związków pomiędzy pozostałymi wymaga sporej wiedzy z metod matematycznych fizyki i fizyki teoretycznej. Na przykład, obniżenie rzędu równania różniczkowego (pkt 5) jest możliwe, gdy nie zawiera ono jawnie czasu. Jest to równoważne istnieniu symetrii translacyjnej w czasie, a zatem zachowaniu energii (pkt 4).

Rozwiązanie równania rekurencyjnego (17) często wymaga użycia macierzy, a z drugiej strony eksponenta macierzy (19) obliczana może być poprzez rozwinięcie $e^{\mathbf{A}}$ w szereg potęgowy. Metoda Hamiltona-Jacobiego dostarcza systematycznej procedury znajdywania przekształcenia kanonicznego, odgadniętego w rozdziale 9. Szczegółowa eksploracja wszystkich relacji to już temat na inny artykuł.

Przedstawione rachunki są porozrzucane po licznych podręcznikach i wykonywane na ćwiczeniach do rozmaitych przedmiotów. Można powiedzieć, że każda dziedzina ma swoją preferowaną metodę. Elektrotechnika masowo posługuje się liczbami zespolonymi, na mechanice omawiamy zasadę zachowania energii, na metodach matematycznych fizyki rozwiązujemy równania metodą szeregów, na algebrze diagonalizujemy macierz i obliczamy $e^{\mathbf{A}}$, mechanika klasyczna omawia przekształcenia kanoniczne i równanie Hamiltona-Jacobiego. Przedstawiona kompilacja skłania do refleksji nad subtelną siecią powiązań, istniejącą w świecie matematyki i fizyki.

Literatura

[1] L.D. Landau, E.M. Lifszyc, *Krótki kurs fizyki teoretycznej*, t. 1, *Mechanika*, PWN, 1976

[2] L.D. Landau, E.M. Lifszyc, *Mechanika*, PWN (liczne wydania)

[3] D. Stauffer, H.E. Stanley, *Od Newtona do Mandelbrota*, WNT, 1996

[4] R. Penrose, *Droga do rzeczywistości*, rozdz. 20, *Lagranżjany i hamiltoniany*, Prószyński i S-ka, 2006

[5] G.L. Kotkin, W.G. Serbo, *Zbiór zadań z mechaniki klasycznej*, rozdz. 10–12, WNT, 1972