



Kwantowanie przewodności elektrycznej w nanodrutach

Szymon Godlewski, Antoni Tekiel
Studia Matematyczno-Przyrodnicze, III rok
Uniwersytet Jagielloński

1. Zjawisko

Wiele wieków rozwoju fizyki przyniosło odkrycie i wytłumaczenie olbrzymiej ilości zjawisk zachodzących w przyrodzie. Rozwój technik doświadczalnych, dzięki którym otrzymano narzędzia do badania nowych zjawisk, spowodował, że na początku XX wieku zaobserwowano wiele nieznanymi wcześniej efektów. Większości z nich nie dawało się już wyjaśnić klasycznymi prawami fizyki. Skłoniło to rzeszę naukowców do szczególnie intensywnego poszukiwania nowych teorii. Ich wysiłek doprowadził do powstania mechaniki kwantowej – powstała ona na początku ubiegłego stulecia. Od tego czasu dzięki niej zrozumiano i wyjaśniono bardzo wiele obserwowanych zjawisk, a sama mechanika kwantowa stała się podstawą współczesnej fizyki.

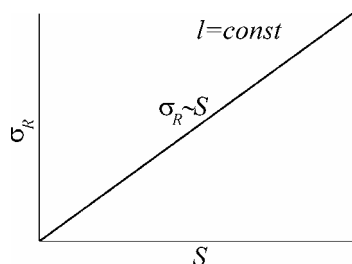
W niniejszej pracy chcielibyśmy przybliżyć pewne zjawisko kwantowe – kwantowanie przewodności elektrycznej – oraz eksperyment, w którym w stosunkowo prosty sposób można je zaobserwować. Zaczniemy jednak od klasycznych praw opisujących przewodność elektryczną. Zapewne wszyscy pamiętają znane ze szkoły wyrażenie opisujące wielkość oporu elektrycznego R przewodnika:

$$R = \frac{\rho \cdot l}{s} \quad (1)$$

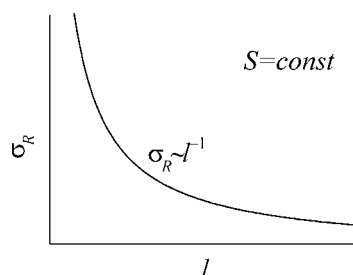
gdzie ρ jest opornością właściwą materiału, z którego wykonano przewodnik, l – długością przewodnika, s zaś jego polem przekroju poprzecznego. Czasem wygodniej jest posługiwać się przewodnością zdefiniowaną jako odwrotność oporu:

$$\sigma_R = \frac{1}{R} = \frac{s}{\rho \cdot l}, \quad (2)$$

Tą właśnie wielkością będziemy się dalej zajmować. Zgodnie z (2) przewodność elektryczna jest wprost proporcjonalna do pola przekroju poprzecznego przewodnika i odwrotnie proporcjonalna do jego długości. Typową zależność przedstawiają rysunki 1a i 1b.



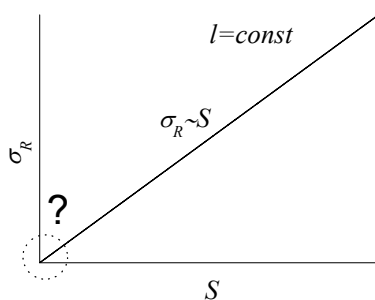
Rys. 1a. Zależność przewodności elektrycznej od pola przekroju poprzecznego przewodnika przy ustalonej długości



Rys. 1b. Zależność przewodności elektrycznej od długości przewodnika przy ustalonym przekroju poprzecznym

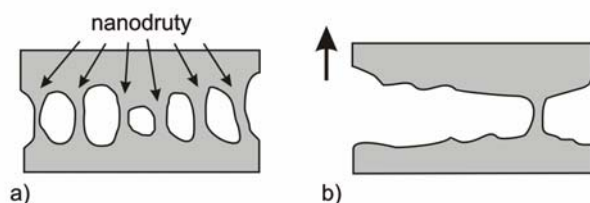
W zasadzie możemy uzyskać dowolną wartość przewodności, odpowiednio dobierając rozmiary przewodnika. Należy się jednak spodziewać, że bardzo mocne zmniejszenie jego rozmiarów może wprowadzić nas w obszar mikroświata rządzonego prawami mechaniki kwantowej, w którym klasyczne przewidywania nie dają dobrych rezultatów. W rzeczywistości okazuje się, że gdy wystarczająco mocno zmniejszymy rozmiary naszego złącza (przez złącze rozumiemy będziemy rozpatrywany fragment przewodnika), wyrażenie (1) przestanie być słuszne.

W przeprowadzonym eksperymencie zbadaliśmy zachowanie przewodności elektrycznej w bardzo małych strukturach (obszar zaznaczony na rys. 2).



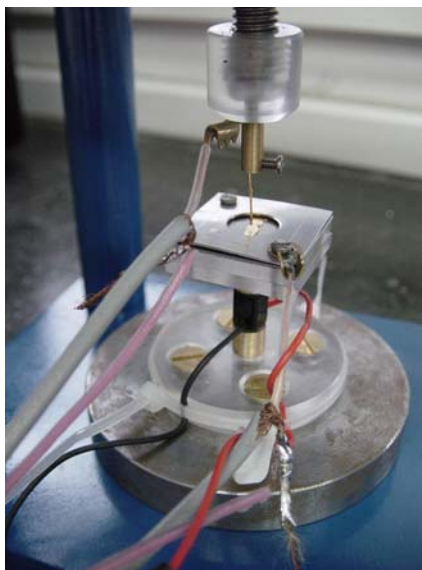
Rys. 2. Oczekując zaobserwowania nietypowego dla obiektów makroskopowych zachowania przewodności elektrycznej, zbudowano nieskomplikowany układ doświadczalny do badania przewodności w bardzo małych strukturach. Okazuje się, że zależność przewodności od rozmiaru przewodnika w opisie kwantowym jest zasadniczo inna niż w opisie klasycznym

Należało zatem takie odpowiednio małe struktury wytworzyć. W tym celu można posłużyć się np. dwoma opartymi o siebie drutami (najlepiej złotymi, gdyż nie zachodzi wtedy utlenianie się powierzchni metalu). Wprawiając taki układ elektrod w drgania, spowodujemy, że kontakt między nimi będzie cyklicznie tworzony i niszczone. Rysunek 3a przedstawia pewien punkt styku dwóch elektrod – jest on złożony z wielu równoległych nanodrutów. W wyniku drgań układu oba makroskopowe druty zaczynają się od siebie oddalać i poszczególne nanodrutu ulegają zniszczeniu. W końcu połączenie obu makroskopowych elektrod ogranicza się do jednego uformowanego nanodrutu, tak jak to pokazano na rysunku 3b. Otrzymaliśmy w ten sposób prymitywny układ do wytwarzania nanodrutów.



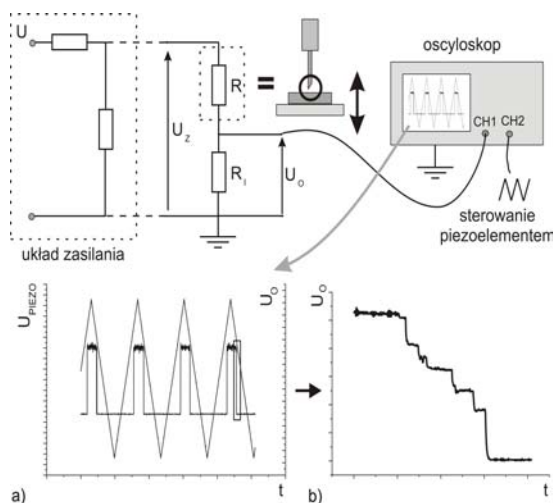
Rys. 3. Tuż przed zerwaniem kontaktu obie elektrody połączone są tylko jednym nanodrutem

Lepsze efekty można uzyskać, jeśli zamiast drgań, które wywołują cykliczne zanikanie kontaktu między drutami, użyjemy elementu pozwalającego na niewielką zmianę położenia któregoś z drutów. Można to zrealizować dzięki piezokryształom, które pod wpływem przyłożonego napięcia ulegają małym odkształceniom. Jeśli umocujemy na takim elemencie jedną z elektrod, którą może być np. próbka, to będziemy mogli cyklicznie uderzać nią w drugą elektrodę, np. ostrą igłę. Na rysunku 4 przedstawiono układ igły z próbką w wykorzystywanym przez nas układzie doświadczalnym. Całość wbudowana jest w masywny statyw, a najważniejszą częścią jest piezoelement. Może nim być nawet piezokryształ wyjęty z zapalniczki do gazu, jednak wymaga on stosowania napięć rzędu 1 kV.



Rys. 4. Na piezoelemencie umocowano złotą próbkę, którą uderzano cyklicznie w przycięty, złoty drut stanowiący igłę

Badanie przewodności złącza sprowadza się do zastosowania prawa Ohma: znając napięcie na końcach przewodnika i natężenie płynącego przez niego prądu, możemy określić jego opór. Pomiar natężenia prądu wygodnie jest przeprowadzić, mierząc spadek napięcia na znanym, szeregowo włączonym w układ oporniku. Schematycznie metodę pomiaru przedstawia rysunek 5. Na piezoelement podawano sygnał trójkątny, który wymuszał ciągłe, wzajemne przybliżanie i oddalanie się igły i próbki. Na ekranie oscyloskopu obserwowano czasowy przebieg spadku napięcia na szeregowo włączonym do złącza igła-próbka oporniku R_f . W przypadku gdy na jeden kanał oscyloskopu podamy sygnał sterowania piezoelementem (przebieg trójkątny), natomiast na drugi kanał spadek napięcia na oporniku R_f , na ekranie oscyloskopu zobaczymy przebieg przedstawiony na rysunku 5a. Obserwowany sygnał prostokątny związany jest ze skokowym (w tej skali czasu) procesem tworzenia i niszczenia kontaktu między igłą i próbką. Jeżeli dokonamy zmiany skali czasu i tym samym skoncentrujemy się na zaznaczonym fragmencie, to będziemy mogli dostrzec skokowe zmiany rejestrowanej wielkości (rys. 5b). Całkowite zerwanie kontaktu między elektrodami, co można poznać po zerowym spadku potencjału na oporniku R_f , stanowi dokładne wskazanie momentu czasu, tuż przed którym połączenie realizowane było tylko przez jeden nanodrut. Obserwowane zmiany przewodności związane są więc ze zjawiskami zachodzącymi wewnątrz jednego, ostatniego nanodrutu. Wraz z upływającym czasem dochodzi do zmian w jego rozmiarze i kształcie. Jak się okaże, szczególnie ważne są tutaj zmiany przekroju nanozłącza w jego przewężeniu.



Rys. 5. Schemat metody pomiaru przebiegów czasowych spadku napięcia na oporniku R_f

Pozostaje jedynie odwickłać z rejestrowanych danych, odpowiadających napięciu na oporniku R_I wartość przewodności złącza igła-próbka. Układ stanowi dzielnik napięcia, więc napięcie rejestrowane przez oscyloskop U_0 związane jest z napięciem zasilania U_Z i występującymi oporami w układzie poprzez związek:

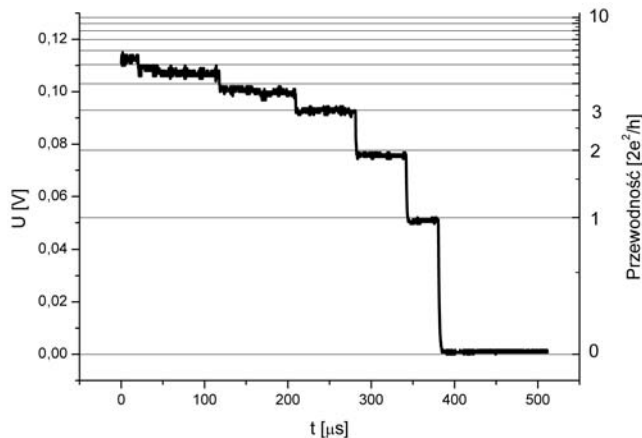
$$U_0 = \frac{R_I}{R + R_I} U_Z,$$

a stąd:

$$\sigma_R = \frac{1}{R} = \frac{1}{R_I} \frac{U_0}{U_Z - U_0}, \quad (3)$$

Na rysunku 6 przedstawiono przebieg zarejestrowany podczas eksperymentu, który otrzymano w przypadku zastosowania złotej igły przy napięciu zasilania $U_Z = 153,4$ mV. Dane są przedstawiane w formie zebranej z oscyloskopu. Lewa oś odpowiada napięciu rejestrowanemu przez oscyloskop, natomiast prawa, dodatkowa skala stanowi nieliniową, zgodną z równaniem (3) skalę przewodności elektrycznej.

Widzimy więc, że wyrażenie (1) opisujące klasycznie zjawisko przewodności elektrycznej przestaje być prawdziwe.



Rys. 6. Przebieg zarejestrowany podczas wytworzenia się nanodrutu

Dlaczego tak się dzieje? Otóż wszelkie „kłopoty” klasycznej mechaniki pojawiają się, gdy zaczynamy rozpatrywać odpowiednio małe obiekty. Należy wtedy –

w celu rozwiązania jakiegoś zagadnienia – posłużyć się mechaniką kwantową. Ścisłej rzecz ujmując, przewidywania teorii kwantowej są słuszne również w przypadku obiektów „dużych” – ale wtedy różnica w przewidywaniach teorii klasycznej i kwantowej jest tak mała, że niewykrywalna doświadczalnie, i z powodzeniem można stosować teorię klasyczną. W przypadku przewodności mamy do czynienia z elektronami. Ale tu pojawia się pewien problem. Przecież elektrony są „bardzo małe”. Zatem do nich teoria klasyczna nie powinna się w ogóle stosować. Okazuje się jednak, że wyprowadzone na podstawie klasycznych równań zależności są w pewnych warunkach, np. przy dużej liczbie elektronów, dobrym przybliżeniem rzeczywistości. Jeżeli jednak rozmiary złącza zredukujemy do bardzo małych, to efekty kwantowe zaczną odgrywać znaczącą rolę. Okazuje się, że w takich warunkach przewodność może przyjmować tylko pewne, dyskretne wartości – mówimy, że jest ona skwantowana. Wy tłumaczenie kwantowego charakteru przewodności elektrycznej w nanodrutach wymaga znajomości pewnych elementów mechaniki kwantowej i fizyki ciała stałego, które pokrótce omówimy poniżej.

2. Model Fermiego elektronów swobodnych

Za własności elektryczne metali odpowiedzialne są elektrony walencyjne. W najprostszym modelu (okazuje się, że na jego podstawie można jakościowo wytłumaczyć kwantowanie przewodności) zakładamy, że wszystkie elektrony walencyjne mogą się poruszać swobodnie w całej objętości przewodnika. Stają się one nośnikami elektryczności i nazywane są elektronami przewodnictwa. Przyjmujemy przy tym, że nie mogą one w żaden sposób wydostać się z obszaru przewodnika (tzn. że są uwięzione w nieskończonej studni potencjału). Opisany tu model nazywamy modelem elektronów swobodnych Fermiego. Powrócimy do niego za chwilę, ale na razie musimy zapoznać się z pewnymi elementami mechaniki kwantowej, a w szczególności z funkcją falową.

3. Funkcja falowa

Dwoistość korpuskularno-falowa materii przewiduje, że z każdą cząstką możemy związać pewną falę¹ – falę materii. W mechanice kwantowej mówimy o funkcji falowej, którą możemy wyobrazić sobie jako przestrzenną mapę tej fali. Zaznaczyć należy, że funkcja falowa przyjmuje w ogólności wartości zespolone. Dla naszych celów wystarczy wiedzieć, że kwadrat modułu funkcji falowej ma probabilistyczną interpretację jako gęstość prawdopodobieństwa (tzn. prawdopodobieństwo na jednostkę objętości) znalezienia cząstki w danym punkcie przestrzeni. Wiemy już zatem, że z każdą cząstką związana jest funkcja falowa. Od tej pory

¹ Przedstawione tutaj rozważania mają jedynie charakter poglądowy. Dokładniejsze omówienie można znaleźć w każdym podręczniku mechaniki kwantowej.

będziemy zajmowali się wyłącznie funkcjami falowymi, to one bowiem dostarczą nam wszystkich możliwych do poznania informacji na temat cząstek. W mechanice kwantowej nie zawsze (a dokładniej: prawie nigdy) możemy powiedzieć, że dana cząstka znajduje się w jakimś konkretnym miejscu w przestrzeni. Możemy jedynie – na podstawie znajomości funkcji falowej – powiedzieć jakie jest prawdopodobieństwo, że cząstka znajduje się w konkretnym obszarze przestrzeni. Mechanika kwantowa jest teorią probabilistyczną. Skoro wszystkie dostępne informacje o obiekcie zawarte są w funkcji falowej, to warto dowiedzieć się, jak funkcje te wyznaczyć. Otóż są one rozwiązaniami pewnego równania różniczkowego, zwanego równaniem Schrödingera. Nie będziemy tutaj podawać postaci tego równania ani tym bardziej go rozwiązywać. Skorzystamy za to z gotowych rozwiązań, które na szczęście w naszym przypadku mają prostą formę. Funkcja falowa elektronu zamkniętego w nieskończonej jednowymiarowej studni potencjału ma postać (w obszarze studni):

$$\Psi_n(x) = \left(\frac{2}{L}\right)^{1/2} \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L}\right) \quad (4)$$

gdzie L jest szerokością studni, natomiast n liczbą naturalną. Okazuje się, że funkcje falowe elektronu w nieskończonej studni potencjału mogą być różne (dla różnych wartości n). Opisują one cząstki o różnych energiach. Samej postaci funkcji falowej nie będziemy zresztą wykorzystywać – wystarczy nam wiedzieć, że energia elektronu opisanego funkcją falową Ψ_n wynosi:

$$E_n = \frac{h^2}{2m} \cdot \left(\frac{n}{2L}\right)^2 \quad (5)$$

gdzie m jest masą elektronu, a h stałą Plancka. Widzimy zatem, że energia elektronów zamkniętych w nieskończonej studni potencjału jest skwantowana, a poszczególne poziomy energetyczne „podnoszą się” w miarę zwięzania studni. Omówiliśmy tutaj sytuację elektronów zamkniętych w jednowymiarowej studni; dla przypadków dwu i trójwymiarowych sytuacja jest bardzo podobna i poczynione spostrzeżenia są również prawdziwe. Zapoznaliśmy się zatem z niezbędnymi podstawami mechaniki kwantowej. Możemy zatem wrócić do modelu elektronów swobodnych². Założyliśmy w nim, że elektrony przewodnictwa są zamknięte w nieskończonej studni potencjału. Znamy zatem ich funkcje falowe. Wiemy, że układy fizyczne przechodzą do stanu, w którym mają najniższą energię. Najprostszym rozwiązaniem byłoby więc, aby wszystkie elektrony znajdowały się w stanie

² Dokładniejszy opis gazu elektronów swobodnych można znaleźć w podręcznikach fizyki ciała stałego, np. C. Kittel *Wstęp do fizyki ciała stałego*.

opisanym funkcją Ψ_1 . Jednakże sytuacja taka nie jest możliwa. Jest to związane z tzw. zakazem Pauliego, w myśl którego dwa elektrony nie mogą się znajdować w tym samym stanie³. Zatem elektrony będą zajmowały kolejno stany o coraz wyższej energii. Widzimy, że wszystkie stany aż do wyczerpania elektronów będą zajęte, natomiast wszystkie o energiach wyższych – puste. Energię najwyższego zajętego stanu nazywamy energią Fermiego. Opisana sytuacja dotyczy temperatury 0 K, gdyż w wyższych temperaturach będą następowały wzbudzenia termiczne i część elektronów ze stanów poniżej energii Fermiego będzie przechodziła do stanów powyżej energii Fermiego. Sytuacją taką nie będziemy się tu jednak zajmować.

4. Kwantowanie przewodnictwa w nanodrutach

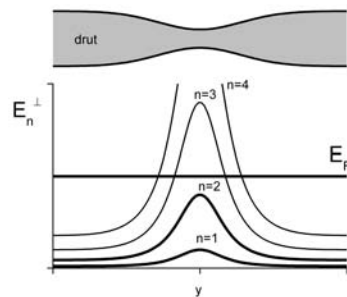
W klasycznej teorii przewodnictwa rozpatruje się ruch elektronów pod wpływem przyłożonego pola i uwzględnia się ich rozpraszanie na węzłach sieci. Jest to model bardzo przybliżony, niemniej można za jego pomocą wytłumaczyć pochodzenie oporu elektrycznego. Wyobraźmy sobie teraz, że stworzyliśmy złącze, którego wymiary są mniejsze od tzw. średniej drogi swobodnej elektronów (średnia droga swobodna to odległość, jaką średnio przebywa elektron pomiędzy zderzeniami). Okazuje się, że wtedy nie występują procesy rozpraszania elektronów (mamy do czynienia z tzw. transportem balistycznym, w odróżnieniu od „normalnej” sytuacji i transportu dyfuzyjnego) i mogłoby się wydawać, że opór takiego złącza jest zerowy. Tak jednak nie jest. Zastanówmy się, dlaczego. Z teorii fizyki ciała stałego wiadomo, że w przewodnictwie prądu mogą brać udział tylko elektrony o energiach bliskich energii Fermiego. Wyobraźmy sobie, co się zatem dzieje w takim złączu. Dla uproszczenia rozważmy przypadek dwuwymiarowy, tzn. złącze, które ma niezerową długość i szerokość, ale nie ma grubości (złącze płaskie). Oczywiście, wszystkie wymiary są mniejsze od średniej drogi swobodnej. Elektrony w takim złączu mogą poruszać się wzdłuż jego długości, mogą również przemieszczać się do obszaru złącza z dalszych fragmentów przewodnika lub też z obszaru złącza do innych części przewodnika. Natomiast poprzeczne ruchy elektronów są ograniczone nieskończoną studnią potencjału o szerokości równej szerokości złącza (można wyobrażać sobie, że złącze jest rurą otwartą z dwóch końców, tak że elektrony mogą przepływać przez tę rurę, ale nie mogą się z niej wydostawać na boki). Możemy zatem napisać, że dla elektronów biorących udział w przewodzeniu prądu:

$$E_n + E = E_F$$

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m} \cdot \left(\frac{n}{2L} \right)^2 \quad (6)$$

³ W rozważaniach nie uwzględniamy spinu elektronu.

gdzie E_F to energia Fermiego, E_n – energia ruchu poprzecznego elektronu znajdującego się w stanie n , E – energia ruchu podłużnego elektronu, a L – szerokość złącza. Istotne dla nas jest to, że żaden składnik wyrażenia [6] nie może być ujemny. Wyobraźmy sobie teraz, że przekrój poprzeczny naszego złącza (będący od-cinkiem) się zmienia. Zastanówmy się, jakie elektrony mogą „przejsć” przez złącze. Otóż mogą to być tylko te elektrony, których energia ruchu poprzecznego E_n w najwęższym punkcie złącza jest nie większa od energii Fermiego (energia E_n osiąga maksimum w najwęższym punkcie złącza, jak wykazaliśmy w punkcie 3). Definiuje to tzw. otwarte kanały, czyli takie stany ruchu poprzecznego elektronów, że elektrony w nich się znajdujące mogą „przejsć” przez złącze. Obrazuje to rysunek 7.



Rys. 7. Zamykanie kanałów w nanozłączu

Jak widzimy, własności złącza determinuje jego szerokość w najwęższym punkcie, gdyż to ona wyznacza ilość otwartych kanałów. Korzystając z praw mechaniki kwantowej, można wykazać, że przewodność każdego pojedynczego kanału jest równa tzw. kwantowi przewodności. Okazuje się, że przewodność takiego pojedynczego kanału jest równa tzw. kwantowi przewodności:

$$G_0 = \frac{2e^2}{h}, \quad (7)$$

$$G_0 \cong \frac{1}{12907 \Omega} \quad (8)$$

gdzie e jest ładunkiem elementarnym. Zatem dla N otwartych kanałów wartość przewodności złącza wynosi:

$$G = N \cdot G_0 = N \cdot \frac{2e^2}{h}. \quad (9)$$

Widzimy więc, że przewodność nanozłącza jest skwantowana, a jej wartość zależy jedynie od szerokości złącza i nie zależy ani od rodzaju materiału, z którego zbudowany jest przewodnik, ani od jego długości (o ile oczywiście jest ona

mniejsza od średniej drogi swobodnej elektronów i zachodzi transport balistyczny).

W przeprowadzonym przez nas doświadczeniu obserwowaliśmy nietypowe dla makroskopowych przewodników zachowanie przewodności elektrycznej. Udało się to zrealizować dzięki nieskomplikowanemu układowi eksperymentalnemu, opartemu na prostej idei wytwarzania struktur o bardzo małych rozmiarach. Należy podkreślić, że zademonstrowane zjawisko jest efektem o czysto kwantowym charakterze i stanowi jeden z przykładów, w których można zaobserwować, w sposób bardzo wyraźny i przy zastosowaniu prostych metod eksperymentalnych, załamania praw fizyki klasycznej i tym samym potwierdzenie kwantowo-mechanicznego opisu.

Chcielibyśmy podziękować Panu prof. dr. hab. Markowi Szymońskiemu za zainteresowanie nas tematyką układów mezoskopowych i umożliwienie wykonania opisanego eksperymentu w pracowni Zakładu Fizyki Doświadczalnej Uniwersytetu Jagiellońskiego, a także Panu mgr. Piotrowi Piątkowskiemu za cenne uwagi techniczne dotyczące doświadczenia.



Antoni Tekiel i Szymon Godlewski, autorzy artykułu