Zadanie z transporterem – łatwe trudne zadanie

Waldemar Gorzkowski

Od Redakcji

Redakcja postanowiła przypomnieć czytelnikom piękne standardowe zadanie z transporterem, które zaliczamy do „łatwych trudnych”. Łatwe, gdyż temat jest bardzo prosty i zrozumiały, a rachunki dostępne nawet dla bardzo przeciętnego ucznia. A jednak zadanie sprawia trudność.

Zadanie dotyczy opisu zjawisk w układzie nieinercjalnym. Trudność występuje w identyfikacji układu izolowanego i rozumienia zachowania energii. Zadanie pochodzi z wydanego 25 lat temu *Zbioru zadań z olimpiad fizycznych* Waldemara Gorzkowskiego. Wiem od znajomych fizyków Chińczyków, że zbiory Waldemara Gorzkowskiego są tłumaczone na chiński i w dużych nakładach tam wydawane.

Zadanie polecamy tylko wtedy, gdy jest dość czasu na dyskusję.

Zadanie

Na poziomy pas transportera poruszający się ruchem jednostajnym z szybkością v = 5 m/s upuszczono z bardzo małej wysokości kostkę kredy w ten sposób, żeby jedna ze ścianek była pozioma (kreda spada „na płasko”). Okazało się, że kreda zrobiła na pasie smugę długości s = 5 m. Nieco później zatrzymano napęd transportera i pas poruszał się dalej ruchem opóźnionym z opóźnieniem a = 5 m/s^2.

Czy kreda znowu pozostawiła smugę na pasie? Jakiej długości? Czy można dokładnie obliczyć, w jakich granicach może się zawierać wartość opóźnienia pasa, by kreda nie pozostawiła smugi?

Rozwiązanie

W układzie odniesienia poruszającym się ruchem jednostajnym wraz z pasem sytuacja wygląda tak, jakby na nieruchomy pas położono kredę z prędkością początkową równoległą do pasa (poziomą) o wartości v = 5 m/s. Niech masa kredy wynosi m. Początkowa energia kinetyczna kredy (w rozważanym układzie odniesienia) zostaje w całości zużyta na pracę siły tarcia. Oznaczając współczynnik tarcia kredy o transporter przez f możemy napisać

$$\frac{1}{2}mv^2 = fmgs$$

Stąd

$$f = \frac{v^2}{2gs}$$

Po włączeniu hamowania z opóźnieniem a układ odniesienia związany z transporterem staje się układem nieinercjalnym. Na kredę działa teraz siła bezwładności o wartości ma zwrócona w kierunku ruchu transportera. Siła ta ma dokładnie taki sam charakter jak siła działająca na pasażerów podczas hamowania tramwaju lub pociągu. Aby podczas hamowania kreda uległa przesunięciu, siła ma musi przekroczyć maksymalną wartość siły tarcia równą fmg. W przeciwnym wypadku kreda nie poruszy się, gdyż siła ma zostanie zrównoważona przez siłę tarcia. Zatem, aby kreda nie pozostawiła smugi, musi być spełniony warunek

$$ma \le fmg,$$

czyli
$$a \le \frac{v^2}{2s} = 2{,}5\ \mathrm{m/s^2}.$$

Zgodnie z danymi w tekście zadania wartość a = 5 m/s^2 nie spełnia tego warunku, a więc podczas hamowania kreda przesunie się po transporterze i zrobi białą smugę. Obliczmy długość tej smugi s_1.

Kreda będzie poruszać się po transporterze ruchem przyspieszonym dopóki będzie działała siła ma, czyli podczas hamowania. Po zatrzymaniu się pasa kreda będzie miała niezerową prędkość początkową i będzie się poruszała ruchem opóźnionym z powodu siły tarcia. Ruch ten będzie trwał do czasu zatrzymania się kredy.

Czas trwania hamowania wynosi

$$t_1 = \frac{v}{a}.$$

Przyspieszenie kredy a_1 względem transportera obliczamy z zależności

$$ma_1 = ma - T,$$

wyrażającej II zasadę Newtona w układzie nieinercjalnym związanym z transporterem. T oznacza wartość siły tarcia równą fmg. Współczynnik tarcia f wyznaczyliśmy już wcześniej. Zatem możemy napisać

$$ma_1 = ma - fmg,$$

$$a_1 = a - \frac{v^2}{2s}.$$

Droga przebyta przez kredę podczas hamowania transportera wynosi (względem transportera) $\frac{1}{2}a_1t_1^2$, czyli $\frac{1}{2}\left(a - \frac{v^2}{2s}\right)\frac{v^2}{a^2}$.

W chwili zatrzymania się transportera prędkość kredy względem transportera wynosi

$$v_1 = a_1t_1 = \left(a - \frac{v^2}{2s}\right)\frac{v}{a}.$$

Opóźnienie kredy po zatrzymaniu się transportera wynosi

$$a_2 = T/m = fg = \frac{v^2}{2s}.$$

Czas trwania ruchu opóźnionego kredy jest równy

$$t_2 = \frac{v_1}{a_2} = (2as / v^2 - 1)\frac{v}{a}.$$

W czasie tego ruchu kreda przebywa drogę $\frac{1}{2}a_2t_2^2$,

czyli

$$\frac{1}{2}\frac{v^2}{2s}\left(\frac{2as}{v^2} - 1\right)^2\frac{v^2}{a^2}.$$

Długość smugi zastawianej przez kredę na transporterze jest zatem równa

$$s_1 = \frac{1}{2}\left(a - \frac{v^2}{2s}\right)\frac{v^2}{a^2} + \frac{1}{2}\frac{v^2}{2s}\left(\frac{2as}{v^2} - 1\right)^2\frac{v^2}{a^2},$$

czyli

$$s_1 = \left(a - \frac{v^2}{2s}\right)\frac{s}{a}.$$

Liczbowo

$$s_1 = 2{,}5 \text{ m}.$$

W zadaniach takich bardzo łatwo jest popełnić gruby błąd związany z prawem zachowania energii. Wyjaśnijmy dokładniej, o co chodzi. Weźmy pod uwagę sytuację, gdy kredę kładziemy na transporter. Na pierwszy rzut oka mogłoby się wydawać, że w celu wyznaczenia długości smugi s zakreślonej przez kredę, można skorzystać z rozważań energetycznych w układzie nieruchomym względem, powiedzmy, podłogi. W układzie tym transporter porusza się z prędkością v. Można by sądzić, że całkowita energia mechaniczna kredy tuż przed położeniem na transporter (równa zeru) powinna być równa sumie pracy sił tarcia podczas kreślenia smugi (= $fmgs$) i końcowej całkowitej energii kinetycznej kredy $\left(= \frac{1}{2}mv^2\right)$:

$$0 = fmgs + \frac{1}{2}mv^2.$$

Otóż równanie to nie może być prawdziwe. Po lewej stronie mamy zero, a po prawej wielkość dodatnią! Rzecz w tym, że w rozważaniach powyższych nie uwzględniliśmy pracy silników zapewniających równomierne przesuwanie się pasa transportera niezależnie od tego, co się dzieje z kredą. To właśnie kosztem pracy silników kreda wykonuje pracę podczas przesuwania się po transporterze i kosztem pracy silników nabywa ona energii kinetycznej.

Kłopotów powyższych oczywiście nie mamy prowadząc rozważania w układzie związanym z jednostajnie przesuwającym się pasem transportera.