Zadania

ze zbioru „25 lat Olimpiad Fizycznych” Waldemara Gorzkowskiego

Od Redakcji: Cytowany w tym zeszycie profesor Iwo Białynicki-Birula jest laureatem I Olimpiady Fizycznej. Poniżej przytaczamy pouczające i warte przypomnienia dwa zadania z pierwszych olimpiad.

Wózek z wahadłem na pochylni

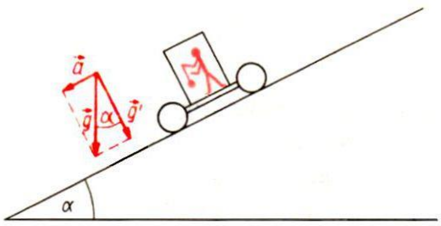
Wózek, na którym umocowano wahadło o okresie wahań wynoszącym 0,5 sekundy, zjeżdża po pochylni, a następnie jedzie po torze poziomym. Kąt, jaki tworzy pochylnia z poziomem, wynosi 45°. Jaki będzie okres drgań wahadła, gdy

a) wózek zjeżdża po pochylni?

b) jedzie po torze poziomym?

Przyjmujemy, że wózek podczas ruchu po pochylni i po torze poziomym nie doznaje siły tarcia i że ruch wahadła na ruch wózka nie ma praktycznie żadnego wpływu (wózek ciężki, wahadło lekkie).

Rozwiązanie. Weźmy pod uwagę układ odniesienia związany z wózkiem. Jest to układ nieinercjalny, gdyż wózek stacza się z równi z pewnym przyspieszeniem. Przyspieszenie to bardzo łatwo obliczyć – jest to po prostu składowa przyspieszenia ziemskiego równoległa do równi (rys.)



$$a = g \sin \alpha.$$

Składową przyspieszenia ziemskiego w kierunku prostopadłym do równi oznaczmy przez g'. Mamy

$$g' = g \cos \alpha.$$

W układzie związanym z wózkiem działają dwa przyspieszenia: przyspieszenie ziemskie $\vec{g}$ skierowane pionowo w dół i przyspieszenie związane z nieinercjalnością układu równe $-\vec{a}$, skierowane równolegle do równi (w górę, ku jej wierzchołkowi). W efekcie obserwator znajdujący się na wózku doznaje przyspieszenia wypadkowego równego

$$\vec{g} + (-\vec{a}).$$

Łatwo zauważyć, że przyspieszenie to ma wartość równą g' i jest skierowane prostopadle do równi. Gdyby obserwator na wózku znajdował się w nieprzezroczystej klatce, to jego wszystkie doznania i obserwacje byłyby takie, jakby znajdował się w polu ciężkości o przyspieszeniu g' skierowanym ku podłodze. W szczególności, w stanie równowagi wahadło byłoby skierowane ku podstawie wózka, a więc ukośnie w stosunku do obserwatora znajdującego się poza wózkiem i nieruchomego względem równi.

Jak wiadomo, okres drgań wahadła matematycznego o długości l, znajdującego się w polu przyspieszenia ziemskiego g, jest dany wzorem

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Zgodnie z podanymi wyżej rozważaniami, aby wyznaczyć okres T' drgań wahadła matematycznego o długości l poruszającego się wraz z wózkiem, należy g zastąpić przez g'. Mamy zatem

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g'}}.$$

Wielkości T, T' i α nie są niezależne. Zachodzi między nimi następujący związek

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g\cos\alpha}}. = \frac{T}{\sqrt{\cos\alpha}}.$$

Podstawiając dane liczbowe na T i α otrzymujemy

$$T' = 0{,}6 \text{ s}.$$

Zadanie rozwiązaliśmy przy założeniu, że nie ma tarcia między wózkiem a równią. Gdyby tarcie występowało, to przyspieszenie wózka byłoby mniejsze niż α. W rezultacie wypadkowe przyspieszenie działające w układzie związanym z wózkiem nic byłoby skierowane dokładnie ku podstawie wózka, lecz nieco na skos, w kierunku jazdy wózka. Poza tym wartość przyspieszenia byłaby większa niż g' (chociaż oczywiście nadal mniejsza niż g). Okres drgań byłby wtedy zawarty między T a T'.

W rozwiązaniu założyliśmy, że wózek zsuwa się ruchem jednostajnie przyspieszonym i prostoliniowym. W rzeczywistości ruchem takim powinien poruszać się nie sam wózek, lecz środek masy układu wózek + wahadło. Podczas drgań wahadła środek masy rozważanego układu przesuwa się względem wózka. Oznacza to, że – ściśle biorąc – wózek nie porusza się tak, jak założyliśmy. Jednakże łatwo zauważyć, że jeżeli wahadło ma masę znacznie mniejszą niż wózek, to przesuwanie się środka masy układu względem wózka można zaniedbać, co uzasadnia poczynione przez nas założenie.

W przypadku ruchu po torze prostoliniowym, ruch wózka odbywa się ze stałą prędkością (przy założeniu, że nasze wahadło jest znacznie mniejsze niż masa wózka). Układ związany z wózkiem jest wtedy układem inercjalnym – nie działają w nim siły bezwładności. Na wahadło działa tylko przyspieszenie ziemskie i okres drgań wahadła będzie taki sam, jak dla wahadła na wózku nieruchomym.

Transporter z upuszczoną na niego kredą

Na poziomy pas transportera poruszający się ruchem jednostajnym z prędkością υ = 5 m/s upuszczono z bardzo małej wysokości kostkę kredy w ten sposób, że jedna ze ścianek była pozioma. Okazało się, że kreda zrobiła na pasie smugę długości s = 5 m. Nieco później zatrzymano napęd transportera i pas poruszał się dalej ruchem opóźnionym z opóźnieniem a = 5 m/s^2.

Czy kreda znowu pozostawiła smugę na pasie? Jakiej długości? Czy można dokładnie obliczyć, w jakich granicach może się zawierać wartość opóźnienia pasa, by kreda nie pozostawiła smugi?

Rozwiązanie. W układzie odniesienia poruszającym się ruchem jednostajnym wraz pasem sytuacja wygląda tak, jakby na nieruchomy pas położono kredę z prędkością początkową υ = 5 m/s. Niech masa kredy wynosi m. Początkowa energia kinetyczna kredy (w rozważanym układzie odniesienia) zostaje w całości zużyta na pracę siły tarcia. Oznaczając współczynnik tarcia kredy o transporter przez f możemy napisać

$$\frac{1}{2}m\upsilon^2 = fmgs.$$

Stąd

$$f = \frac{\upsilon^2}{2gs}.$$

Po włączeniu hamowania z opóźnieniem a układ odniesienia związany z transporterem staje się układem nieinercjalnym. Na kredę działa teraz siła bezwładności o wartości ma zwrócona w kierunku ruchu transportera. Siła ta ma dokładnie taki sam charakter jak siła działająca na pasażerów podczas hamowania tramwaju lub pociągu. Aby podczas hamowania kreda uległa przesunięciu, siła ma musi przekroczyć maksymalną wartość siły tarcia równą fmg. W przeciwnym wypadku kreda nie poruszy się, gdyż siła ma zostanie zrównoważona przez siłę tarcia. Zatem, aby kreda nie pozostawiła smugi, musi być spełniony warunek

$$ma \leq fmg,$$

czyli

$$a \leq \frac{v^2}{2s} = 2{,}5\ \mathrm{m/s^2}.$$

Zgodnie z danymi w tekście zadania wartość a = 5 m/s^2 nie spełnia tego warunku, a więc podczas hamowania transportera kreda przesunie się po transporterze i zrobi białą smugę. Obliczmy długość tej smugi s_1.

Kreda będzie poruszać się po transporterze ruchem przyspieszonym dopóki będzie działała siła ma, czyli podczas hamowania. Po zatrzymaniu się pasa kreda będzie miała niezerową prędkość początkową i będzie się poruszała ruchem opóźnionym pod wpływem siły tarcia. Ruch ten będzie trwał do czasu zatrzymania się kredy.

Czas trwania hamowania wynosi

$$t_1 = \frac{v}{a}.$$

Przyspieszenie kredy a_1 względem transportera obliczamy z zależności

$$ma_1 = ma - T,$$

wyrażającej II zasadę Newtona w układzie nieinercjalnym związanym z transporterem. T oznacza siłę tarcia równą fmg. Współczynnik tarcia f wyznaczyliśmy już wcześniej. Zatem możemy napisać

$$ma_1 = ma - fmg,$$

$$a_1 = a - \frac{v^2}{2s}.$$

Droga przebyta przez kredę podczas hamowania transportera wynosi (względem transportera) $\frac{1}{2}a_1 t_1^2$, czyli

$$\frac{1}{2}\left(a - \frac{v^2}{2s}\right)\frac{v^2}{a^2}.$$

W chwili zatrzymania się transportera prędkość kredy względem transportera wynosi

$$v_1 = a_1 t_1 = \left(a - \frac{v^2}{2s}\right)\frac{v}{a}.$$

Opóźnienie kredy po zatrzymaniu się transportera wynosi

$$a_2 = T / m = fg = \frac{v^2}{2s}.$$

Czas trwania ruchu opóźnionego kredy jest równy

$$t_2 = \frac{v_1}{a_2} = (2as / v^2 - 1)\frac{v}{a}.$$

W czasie tego ruchu kreda przebywa drogę $\frac{1}{2}a_2 t_2^2$, czyli

$$\frac{1}{2}\frac{v^2}{2s}\left(\frac{2as}{v^2} - 1\right)^2 \frac{v^2}{a^2}.$$

Długość smugi zostawionej przez kredę na transporterze jest zatem równa

$$s_1 = \frac{1}{2}\left(a - \frac{v^2}{2s}\right)\frac{v^2}{a^2} + \frac{1}{2}\frac{v^2}{2s}\left(\frac{2as}{v^2} - 1\right)^2 \frac{v^2}{a^2},$$

czyli

$$s_1 = \left(a - \frac{v^2}{2s}\right)\frac{s}{a}.$$

Liczbowo

$$s_1 = 2{,}5 \text{ m}.$$

W zadaniach takich bardzo łatwo jest popełnić gruby błąd związany z prawem zachowania energii. Wyjaśnijmy dokładniej, o co chodzi. Weźmy pod uwagę sytuację, gdy kredę kładziemy na transporter. Na pierwszy rzut oka mogłoby się wydawać, że w celu wyznaczenia długości smugi s zakreślonej przez kredę, można skorzystać z rozważań energetycznych w układzie nieruchomym względem, powiedzmy, podłogi. W układzie tym transporter porusza z prędkością v. Można by sądzić, że całkowita energia mechaniczna kredy tuż przed położeniem na transporter (równa zeru) powinna być równa pracy sił tarcia podczas kreślenia smugi (= $fmgs$) i końcowej całkowitej energii kinetycznej kredy $\left(= \frac{1}{2}mv^2\right)$:

$$0 = fmgs + \frac{1}{2}mv^2.$$

Otóż równanie to nie może być prawdziwe. Po lewej stronie mamy zero, a po prawej wielkość dodatnią! Rzecz w tym, że w rozważania powyższych nie uwzględniliśmy pracy silników zapewniających równomierne przesuwanie się pasa transportera niezależnie od tego, co się dzieje z kredą. To właśnie na koszt pracy silników kreda wykonuje pracę podczas przesuwania się po transporterze i na koszt pracy silników nabywa ona energii kinetycznej. Kłopotów powyższych oczywiście nie mamy prowadząc rozważania w układzie związanym z jednostajnie przesuwającym się pasem transportera.