



Czy Układ Słoneczny jest chaotyczny?

Bogusz Kinasiewicz, Karol Życzkowski

Instytut Fizyki UJ

Rozumne istoty, które w danej chwili uzyskałyby wiedzę o wszystkich działających w przyrodzie siłach oraz o położeniu wszystkich rzeczy, z których zbudowany jest świat – o ile wspomniane istoty byłyby w stanie zanalizować te dane – mogłyby określić położenia, ruchy i wzajemne oddziaływania największych i najmniejszych ciał w kosmosie. Nie istniałoby dla nich nic nieokreślonego i ujrzałyby przyszłość podobnie jak przeszłość.

Pierre-Simon Laplace

Jeżeli powyższe stwierdzenie Laplace'a [1] byłoby prawdziwe, wtedy znając w pewnej chwili czasu stan dowolnego układu dynamicznego, moglibyśmy przewidzieć przyszłą trajektorię, jak również poznać jego przeszłość. Przykładowo, gdyby Układ Słoneczny składał się z wyidealizowanych punktów materialnych oddziałujących wyłącznie siłami Newtona, to znając dokładne położenia i prędkości Słońca oraz wszystkich planet, potrafilibyśmy określić ich przyszłe położenia w dowolnym czasie. W rzeczywistości, obserwowana regularność zachowania planet naszego układu, oparta na wielowiekowych obserwacjach, mogła dostarczyć takiego właśnie punktu widzenia.

Opis ruchu planet na niebie był jednym z głównych problemów, który zapoczątkował wielki postęp nauk przyrodniczych. Decydujące kroki wyjaśniające prawa ruchu planet zostały poczynione przez „ojców” współczesnej astronomii, matematyki i fizyki: Kopernika, Galileusza, Keplera i Newtona. Chociaż mechanika nieba dwóch ciał, oddziałujących grawitacyjnie, jest dobrze znana, to jednak dodanie trzeciego ciała (tzw. zagadnienie trzech ciał) czyni problem dużo bardziej złożonym, do tego stopnia, że nie potrafimy go rozwiązać analitycznie.

W ciągu ostatnich trzech wieków ważne rezultaty otrzymali Leonard Euler (1707–1783), Louis Lagrange (1736–1813), Carl G. Jacobi (1804–1851), George W. Hill (1938–1914), Henri Poincaré (1854–1912), Tullio Levi-Civita (1873–1941), George D. Birkhoff (1884–1944) i wielu innych. Pomimo tego problem trzech oddziałujących ciał nie został rozwiązany analitycznie, a jedynie znane są metody otrzymywania rozwiązań numerycznych. Nawet uproszczona wersja modelu (tak zwany uproszczony problem trzech ciał), w którym masa jednego z ciał jest zaniedbywalnie mała w porównaniu z całkowitą masą układu, może prowadzić do skomplikowanej dynamiki. Wyobraźmy sobie ciało próbne, obraca-

jące się dookoła jednego ze źródeł pola grawitacyjnego. Gdy energia i moment pędu takiego układu są dość duże, po upływie pewnego czasu ciało to mogłoby zacząć okrążyć drugie źródło. Problem polega na tym, że nie potrafimy sprecyzować, w jakiej chwili takie przejście wystąpi i w konsekwencji nie możemy przewidzieć zachowania ciała próbnego. Ruch układu, w którym małe zaburzenie warunków początkowych typowej trajektorii powoduje jej zmiany wykładniczo rosnące w czasie nazywamy chaotycznym. W przeciwnym razie dynamikę nazywamy stabilną lub regularną.

Nasuwa się więc naturalne i ważne pytanie: czy możemy przewidzieć ruch Ziemi, powiedzmy na bilion lat? Lub inaczej: czy Układ Słoneczny jest stabilny?

Na to pytanie próbowali znaleźć odpowiedź uczeni kilku pokoleń. Początkowe wyniki, jakie otrzymali Laplace i Lagrange, bezsprzecznie sugerowały pozytywną odpowiedź.

Pod koniec XIX wieku rozwiązanie zagadnienia stabilności Układu Słonecznego było jednym z największych wyzwań dla nauki i w związku z tym król Szwecji, Oskar II, ufundował specjalną nagrodę za rozstrzygnięcie tego problemu. Otrzymał ją w 1887 roku francuski matematyk Henri Poincaré, który uzyskał ważne, lecz nie do końca rozstrzygające wyniki. Dowiódł on, że wielokrotnie używane techniki zaburzeń mogą nie prowadzić do poprawnego rozwiązania, gdyż rozważane szeregi zawierają wyrazy coraz wyższych rzędów i mogą być rozbieżne.

Podstawy matematycznej teorii stabilności ruchu stworzył Aleksander M. Lapunow (1857–1918), który rozpatrzył jak szybko wzrasta w czasie odległość pomiędzy dwiema bliskimi trajektoriami. Jeżeli układ, o którym mowa, jest chaotyczny, taka odległość rośnie w czasie jak $e^{L \cdot t}$ gdzie współczynnik L w eksponentcie, zwany *wykładnikiem Lapunowa*, jest dodatni¹. Takie układy były znane matematykom już od początków XIX wieku, ale rozważano je raczej w ramach matematycznych ciekawostek i naukowcy nie zdawali sobie sprawy z ich znaczenia dla fizyki i astronomii. Sytuacja zmieniła się przez ostatnie czterdzieści lat, kiedy to Edward Lorenz, meteorolog z Massachusetts Institute of Technology, skonstruował uproszczony model zmian pogody, zależny jedynie od dwunastu czynników². W swojej pracy z 1963 [2] pokazał, że mała zmiana danych początkowych

¹ Jako wprowadzenie do zagadnień chaosu i dynamiki nieliniowej polecamy, przetłumaczone na język polski, książki Stewarta [5] i Gleicha [6].

² Aktualna pogoda zależy od ogromnej liczby czynników. Aby podać prognozę pogody na 5 dni naprzód, trzeba znać warunki panujące dziś w innych rejonach świata. Mianowicie należałoby wziąć pod uwagę temperaturę, ciśnienie, wilgotność we wszystkich punktach na powierzchni Ziemi i ponad nią na dużych wysokościach, a ponadto pamiętać o warstwie ozonowej i wielu innych parametrach [4]. Chcąc uwzględnić wszystkie te informacje, musielibyśmy rozwiązać wiele skomplikowanych równań. W praktyce nie jest to wykonalne.

powoduje całkowicie inne zachowanie się układu. Ta własność, nazywana obecnie „efektem motyla”, okazała się typowa dla większości układów dynamicznych, stosowanych przy modelowaniu różnych zjawisk w fizyce, chemii czy biologii.

Efekt motyla – skutek efektu wzmocnienia tak błahe zdarzenie jak trzepot skrzydeł motyla w Australii może spowodować tornado na Florydzie.

Co może być źródłem chaosu w układach dynamicznych? Już uproszczony układ trzech ciał może być niestabilny, wystarczy, że istnieją w nim dwie siły tego samego rzędu wielkości, które oddziałują na trzecie ciało. My, mieszkańcy Ziemi, możemy odetchnąć z ulgą, bowiem masa Słońca jest prawie tysiąc razy większa niż masa wszystkich planet, dlatego oddziałują one ze sobą znacznie słabiej aniżeli ze Słońcem. Dlatego też w przypadku Układu Słonecznego stopień chaosu, wyrażony w wykładnikach Lapunowa, nie powinien być duży. Z drugiej strony, biorąc pod uwagę odkrycie Lorenza, nie powinniśmy się dziwić na myśl o chaotycznej naturze Układu Słonecznego. Przeciwnie, byłoby zaskakujące, gdyby układ o tak dużej liczbie stopni swobody (Słońce plus 7 głównych planet, razy trzy stopnie swobody, daje razem 24 stopnie swobody) był całkowicie regularny.

Pierwszy numeryczny dowód chaotycznej natury dynamiki Plutona został otrzymany w 1988 roku przez Sussmanna i Wisdoma, którzy śledzili numerycznie trajektorie planet zewnętrznych przez 875 milionów lat i oszacowali czas Lapunowa na około 10 milionów lat.

Czas Lapunowa – odwrotność wykładnika Lapunowa, określający co do rzędu wielkości czas, na który można przewidywać trajektorię układu.

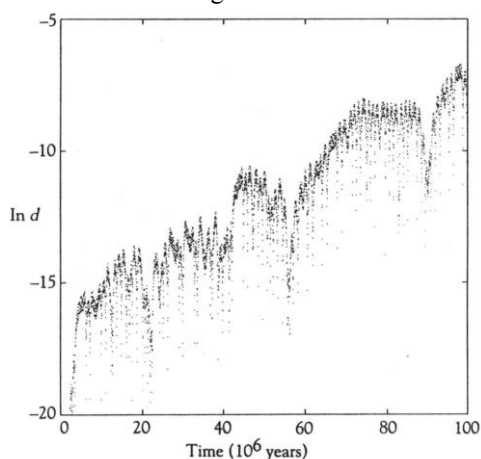
Dalsze numeryczne badania dynamiki całego Układu Słonecznego, wykonane przez Laskara i jego współpracowników, którzy uwzględnili newtonowskie oddziaływania 8 głównych planet (bez Plutona) z poprawkami relatywistycznymi i księżycowymi, pozwoliły im oszacować czas Lapunowa całego układu na 5 milionów lat.

Okazuje się, że błąd 1 km w określeniu położenia początkowego planety może wzrosnąć do 1 jednostki astronomicznej po czasie 95 milionów lat.

1 jednostka astronomiczna – jest równa odległości Ziemi od Słońca i wynosi 150 milionów km.

Chociaż powyższa wartość wykładnika Lapunowa Układu Słonecznego została później potwierdzona w badaniach bardziej realistycznego modelu przez Sussmanna i Wisdoma, źródło chaosu nie zostało dotychczas przekonująco ustalone.

Z matematycznego punktu widzenia takie numeryczne wyniki nie dostarczają ścisłego dowodu na to, że Układ Słoneczny jest chaotyczny, niemniej podważają stwierdzenie Laplace'a. Nawet gdybyśmy znali dane początkowe układu z dowolnie dużą, ale skończoną dokładnością, nie byłibyśmy w stanie przewidzieć zachowania układu przez dowolnie długi przedział czasu. W celu odsłonięcia przyszłości układu, który jest chaotyczny, musielibyśmy znać dane początkowe z nieskończoną dokładnością, a uzyskanie takich danych nie jest po prostu możliwe. Ponadto nie znamy dokładnie całkowitej energii Układu Słonecznego: oprócz newtonowskich sił grawitacyjnych, mamy wiele efektów o różnym pochodzeniu (np. poprawki relatywistyczne, zmienność masy Słońca, konsekwencje niesferyczności planet, promieniowania termicznego, i wielu innych), których nie rozważamy. Jednak nawet ich uwzględnienie, choć poprawiłoby wynik, nie zmieniłoby chaotycznej natury Układu Słonecznego i nie pozwoliłoby na przepowiedzenie jego dynamiki na dowolnie długi czas.



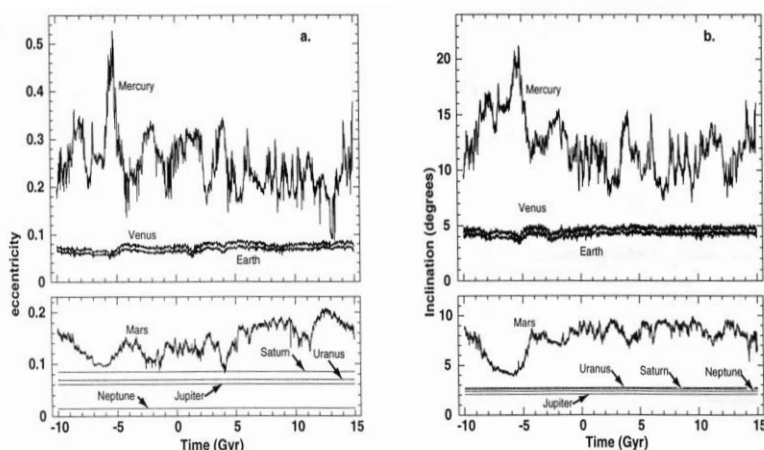
Wykres 1. Rozbieżność d (wyrażona w jednostkach astronomicznych i podana w skali logarytmicznej) pomiędzy dwiema początkowo bliskimi orbitami Plutona rośnie wykładniczo w czasie (G.J. Susmann i J. Wisdom, *Numerical evidence that the motion of Pluto is chaotic*, Science, 241, 433 (1988)). Dopasowanie daje przybliżone nachylenie $1/12$, które odpowiada czasowi Lapunowa równemu około 10 milionom lat

Kolejne pytanie, jakie się nasuwa, dotyczy długości czasu życia Ziemi. Okazuje się, że przesunięcie Ziemi tylko o 150 metrów (co odpowiada względnej zmianie wartości mimośrodowej jej orbity o 10^{-9}) po 100 milionach lat prowadzi do zupełnie innej trajektorii, a to z kolei potwierdza chaotyczną naturę układu. Z drugiej strony, wszystkie te wspomniane trajektorie są *podobne* do „rzeczywistych”. Dlatego Układ Słoneczny jest *formalnie stabilny*: pomimo, że nie możemy prze-

widzieć dokładnie trajektorii po długim czasie, mamy dobre argumenty aby oczekiwać, że globalna struktura układu nie ulegnie zniszczeniu. Przypomina to twierdzenie o *cieniowaniu*, znane z teorii układów dynamicznych.

Twierdzenie o cieniowaniu – numeryczna iteracja chaotycznych odwzorowań dla czasów dłuższych niż czas Lapunowa nie może dostarczać dokładnych rozwiązań problemu, a jednak pod pewnymi technicznymi założeniami można ściśle dowieść, że istnieje rzeczywista trajektoria układu, pochodząca od nieznacznie różniących się warunków początkowych³, która opisywana jest przez otrzymane wyniki numeryczne.

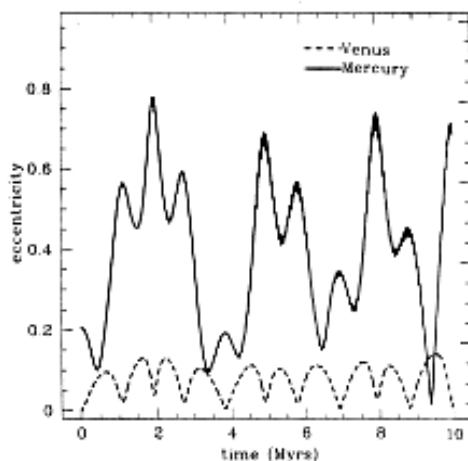
Wyniki numeryczne sugerują, że planety Układu Słonecznego wykazują różne zachowanie. Oprócz chaotycznej trajektorii Plutona (wykres 1), dynamika zewnętrznych Planet (od Jowisza po Neptuna) jest w znacznej mierze regularna, podczas gdy ruch wewnętrznych planet (od Merkurego po Marsa) jest w dużej mierze chaotyczny (wykres 2). Podczas gdy zachowanie planet olbrzymów jest dość regularne, krzywe odpowiadające wewnętrznym planetom wykazują nieregularne fluktuacje, które świadczą o obecności chaosu.



Wykres 2. Maksymalny mimośród (a) i nachylenie (b) 8 planet Układu Słonecznego w funkcji czasu mierzonego w miliardach lat (Gyr). Źródło: J. Laskar, *Large scale chaos in the solar system*, *Astron. Astrophys.* **287**, L9 (1994). Zwróćmy uwagę na różny charakter dynamiki zewnętrznych i wewnętrznych planet

³ W takim przypadku otrzymujemy „przybliżone orbity”, tzn. orbity dowolnie bliskie szukanej trajektorii.

Astronomów zawsze intrygowała Wenus, która obraca się wokół własnej osi w kierunku przeciwnym niż pozostałe planety. Znajdując się na Wenus i spoglądając w kierunku Gwiazdy Polarnej, doszlibyśmy do wniosku, że Słońce wschodzi na zachodzie, a zachodzi na wschodzie. Laskar odkrył, że ruch Wenus jest do tego stopnia chaotyczny, że mógł on odwrócić planetę, nawet kilka razy od czasu powstania Układu Słonecznego. Nie jest więc wykluczone, że obecnie Wenus obraca się „do góry nogami” w stosunku do swojej pozycji wyjściowej.



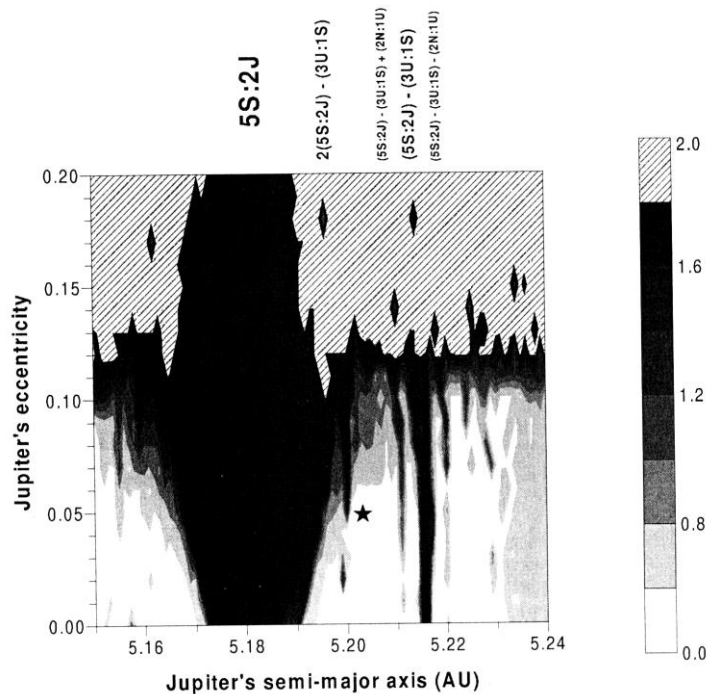
Wykres 3. Mimosród orbit Merkurego i Wenus w funkcji czasu mierzonego w milionach lat (Myrs) (K. Innanen, S. Mikkola, P. Wiegert, *The Earth-Moon system and the dynamical stability of the inner system*, *Astron. J.* **116**, 205 (1998)), otrzymany przy założeniu braku Ziemi w układzie. Fluktuacje tego parametru stają się znacznie większe niż w rzeczywistości (patrz wykres 2), zatem możemy być dumni z naszej Ziemi: stabilizuje ona dynamikę wewnętrznych rejonów Układu Słonecznego

Badając rolę układu Ziemia – Księżyc, jaką odgrywa on w stabilności Układu Słonecznego, Innanen, Mikkola i Wiegert otrzymali zaskakujący wynik: Ziemia odgrywa pierwszoplanową rolę w utrzymywaniu stabilności orbit planet wewnętrznych. Przy jej nieobecności orbity Wenus i Merkurego byłyby nastawione na silne rezonanse pochodzące od planet olbrzymów.

Rezonans jest znanym zjawiskiem, pojawiającym się w układzie złożonym, gdy dwa podukłady periodyczne mają częstości wyrażające się prostym ułamkiem: 1/1, 1/2, 2/3 itp. Wtedy energia może ulec „przepompowaniu” z jednego układu do drugiego i dość dramatycznie wzmocnić jego drgania, co może prowadzić do destabilizacji jego ruchu.

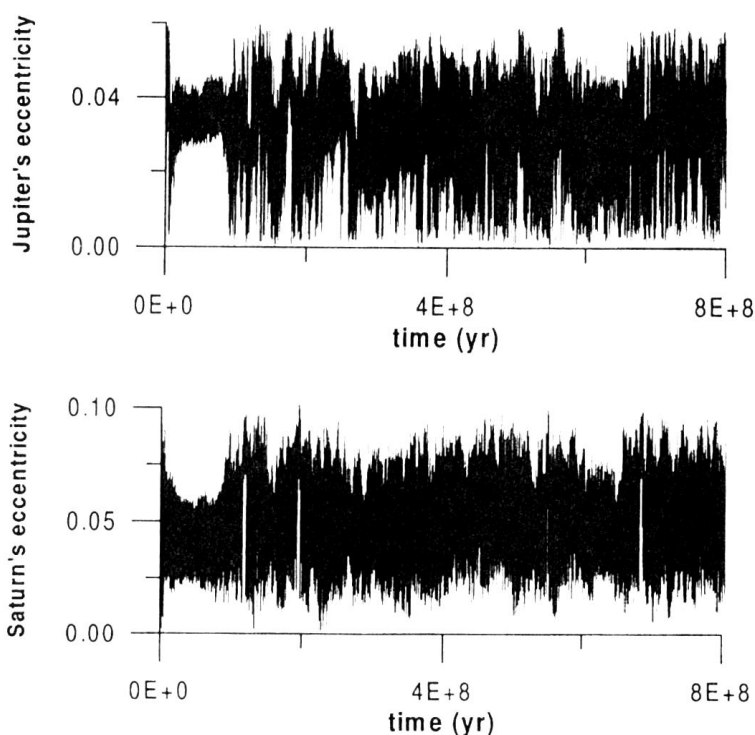
Rolę rezonansów możemy zilustrować dyskutując dynamikę prostego układu – wahadła matematycznego, umieszczonego w stałym polu grawitacyjnym. Wyroźnimy tutaj dwa rodzaje ruchu: *obroty* (wahadło obraca się w jednym kierunku, więc znak momentu pędu jest stały) i *oscylacje* dookoła ustalonego punktu (znak momentu pędu zmienia się dwukrotnie w ciągu jednego okresu oscylacji). Przy małym zaburzeniu ruch wahadła staje się niestabilny w pobliżu separatysy, czyli krzywej rozdzielającej w przestrzeni fazowej dwa odmienne charaktery ruchu.

Niszczący wpływ takich rezonansów może być widoczny przy badaniu różnych szczegółów Układu Słonecznego. Słynne przerwy Kirkwooda na histogramie gęstości asteroid, wyrysowanych w funkcji ich wielkich półosi, mogą być wytłumaczone jako efekt oddziaływania z Jowiszem. Ścisłej mówiąc, tory, po których poruszają się asteroidy, stają się niestabilne w wyniku rezonansowego oddziaływania z największą planetą naszego układu.



Wykres 4. Diagram ilustrujący dynamikę Jowisza na płaszczyźnie jego parametrów – mimośrodów w funkcji półosi planety: jasne (ciemne) pola oznaczają regularny (chaotyczny) ruch, podczas gdy zakresowane pole odpowiada orbitom, dla których możliwe są zderzenia planet. Gwiazdka oznaczająca rzeczywiste parametry Jowisza szczęśliwie leży w obszarze dynamiki regularnej

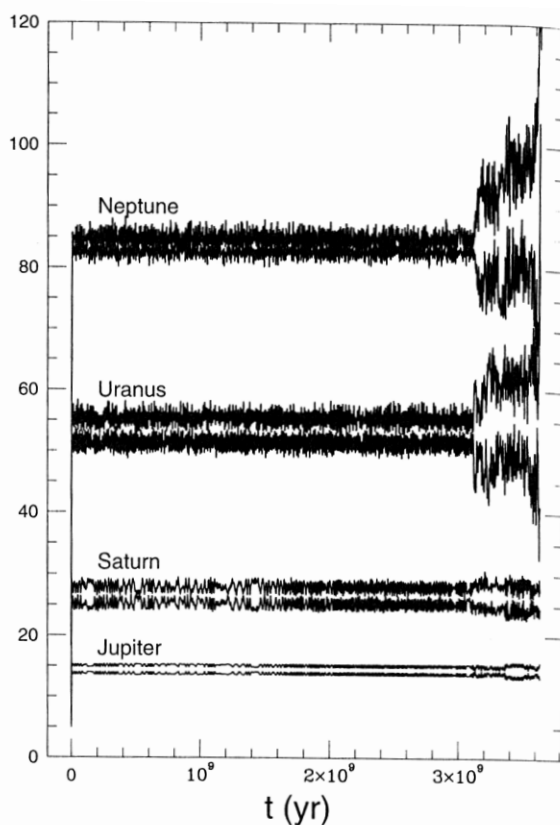
Z kolei oddziaływanie z Neptunem wpływa na dynamikę ciał w zbiorze drobnych ciał niebieskich krążących poza orbitą Neptuna, zwanych Pasem Kuipera⁴. Okazuje się, że rezonansowe oddziaływanie pomiędzy Saturnem i Jowiszem może przyczynić się do destabilizacji Układu Słonecznego. W roku 2001 Michtchenko i Ferraz-Mello pokazali, że względnie mała zmiana parametrów określających orbitę Jowisza mogłaby zwiększyć wpływ rezonansu i w konsekwencji prowadzić do chaotycznego zachowania obu największych planet naszego układu (wykres 6).



Wykres 5. Chaotyczna ewolucja mimośrodu Jowisza i Saturna jaka wystąpiłaby, gdyby częstości ruchu planet pozostawały ściśle w rezonansowym stosunku 5:2 (Michtchenko i S. Ferraz-Mello, *Resonant structure of outer Solar System in the neighborhood of the planets*, *Astron. J.* **122**, 474 (2001))

⁴ W chwili obecnej jest znanych około 80 obiektów w tym pasie, przypuszcza się zaś, że jest ich około 10 miliardów.

Całkowicie różną, bardziej skomplikowaną ilustrację niszczącego wpływu dynamicznych rezonansów można odnaleźć, badając strukturę pierścieni Saturna. Istnienie luk w pierścieniach można wytłumaczyć za pomocą rezonansowego oddziaływania z Mimasem i innymi satelitami Saturna, przy założeniu, że uwzględnimy fale poruszające się w materii tworzącej pierścienie. Innego przykładu ruchu chaotycznego dostarcza Hyperion. Kształt tego małego satelity Saturna jest niesferyczny, co powoduje dodatkowe sprzężenie jego ruchu orbitalnego i rotacyjnego, a w konsekwencji prowadzi do chaotycznych oscylacji największej osi orbity Hyperiona.



Wykres 6. Chaotyczna ewolucja odległości zewnętrznych planet do Słońca dla zmodyfikowanego Układu Słonecznego, w których masa Słońca jest zmniejszona do 36% jej prawdziwej wartości – czas w latach (yr). Źródło: M.J. Duncan i J. J. Lissauer, *The effects of post-main-sequence Solar mass loss on the stability of our planetary system*, *Icarus* **134**, 303 (1998)

Obecnie, dzięki badaniom przeprowadzonym w ostatnich dwudziestu latach, znacznie lepiej rozumiemy dynamikę Układu Słonecznego aniżeli nasi przodkowie. Analiza numeryczna pozwala udzielić pozytywnej odpowiedzi na pytanie o chaotyczną naturę Układu Słonecznego. Na szczęście fakt ten nie zmieni naszych codziennych przyzwyczajęń i nie wpłynie drastycznie na nasze życie, albowiem czas Lapunowa dla Układu Słonecznego jest o wiele rzędów wielkości dłuższy niż ludzkie życie.

Zatem Układ Słoneczny jest chaotyczny. Stwierdzenie to oznacza, że nie jesteśmy w stanie przewidzieć trajektorii Ziemi na okres przekraczający, powiedzmy, 100 milionów lat. Z drugiej strony, jest on strukturalnie stabilny, gdyż małe odchylenia parametrów charakteryzujących tory planet prowadzą do orbit różnych, ale o podobnych własnościach. Zatem jest mało prawdopodobne, aby Układ Słoneczny rozpadł się w ciągu najbliższego biliona lat. Warto podkreślić, że strukturalna stabilność Układu Słonecznego jest ograniczona. Jeżeliby zmienić parametry układu rzędu 10%, to jego konfiguracja uległaby drastycznym zmianom. Na przykład trzykrotne zmniejszenie masy Słońca silnie zdestabilizowałoby dynamikę naszego Układu, jak ilustruje wykres 6.

Zagadnienie stabilności Układu Słonecznego przyciąga uwagę astronomów, matematyków i fizyków od przynajmniej 400 lat i wciąż jest fascynującym polem badań. Dalszy rozwój możliwości obliczeniowych komputerów ułatwi wykonanie obszernej analizy numerycznej różnych aspektów dynamiki Układu Słonecznego i pozwala oczekiwać nowych interesujących rezultatów. Omówiony problem stabilności Układu Słonecznego nie został więc do końca rozwiązany, a my pragniemy zwrócić nań uwagę wszystkich czytelników *Fotonu*.

Literatura

- [1] P.S. Laplace, *Oeuvres Complete de Laplace*, vol. 8, 144, Imprimerie Royale, Paris 1843; English translation: Princeton University Press 1997
- [2] E.N. Lorenz, *Deterministic nonperiodic flow*, J. Atmos. Sci. **20**, 130 (1963)
- [3] K. Życzkowski, *On the stability of the Solar System*, PAU, Prace Komisji Astrofizyki nr **8** (2003)
- [4] I. Ekeland, *Chaos*, Wydawnictwo Książnica, Katowice 1999
- [5] I. Stewart, *Czy Bóg gra w kości?*, PWN, Warszawa 2001
- [6] J. Gleick, *Chaos*, Zysk i S-ka, Poznań 1996