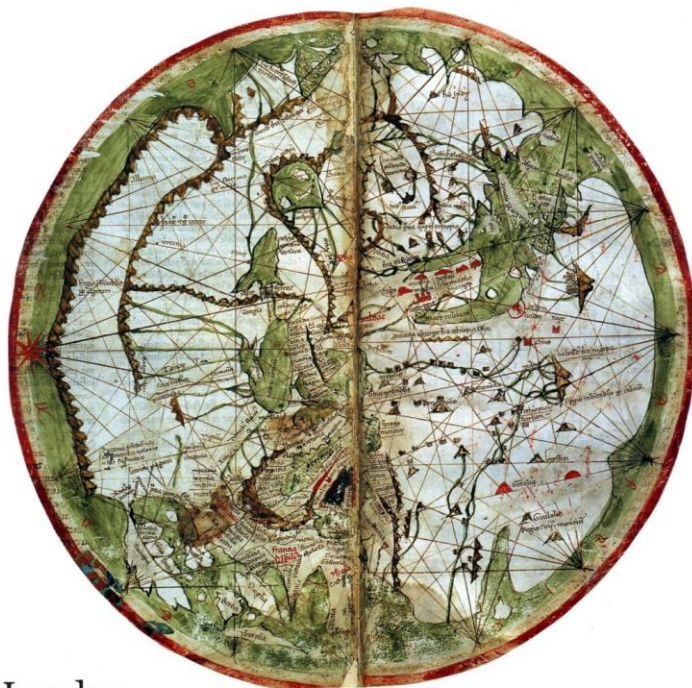


# Foton

117  
Lato  
2012

Pismo dla nauczycieli i studentów fizyki oraz uczniów

INSTYTUT FIZYKI  UNIWERSYTET JAGIELLOŃSKI  
SEKCJA NAUCZYCIELSKA POLSKIEGO TOWARZYSTWA FIZYCZNEGO



Lew Landau  
Różniczkowanie algorytmiczne  
Kiedy Ziemia przestała być płaska  
Promieniowanie naturalne z Ziemi i z Kosmosu

**Lew Dawidowicz Landau**  
**(1908–1968)**



Lew Landau z siostrą Sonią (Baku 1912)



## Przez pot i łzy ku satysfakcji

Piszę ten tekst z uczuciem przygnębienia, ponieważ mam świadomość, że niektórzy z Państwa z powodu utraty pracy mogą zaprzestać lektury *Fotonu*.

Niż demograficzny i reforma dziesiątkują kadrę nauczycielską, a tymczasem niż mógłby być znakomitą okazją do zmniejszenia liczebności klas, do podziału na grupy, do reaktywacji kółek fizycznych, do zindywidualizowanego nauczania. Wszyscy wiemy, że jest to warunek konieczny (choć oczywiście niewystarczający) do poprawy jakości nauczania. Wiemy, że uczniowie rozwijają się w różnym tempie, mają rozmaite zdolności i predyspozycje i wreszcie inną chęć i motywację do nauki. Nad każdym uczniem trzeba się pochylić indywidualnie. Tak z nim pracować, by wzbudzić zainteresowanie i wykrzesać chęć do ciężkiej pracy. Trzeba takich uczniów wyłuskać z większości, która chce mieć w szkole łatwo, miło i przyjemnie. To nie odbywa się „samo”, wymaga od nauczyciela pracy i wysiłku. Przysłowiowe „pot i łzy” są niezbędne i ze strony nauczycieli i uczniów. Samo słuchanie, choćby najefektniej podanych historii o początku Wszechświata i o roli nanotechnologii w produkcji kosmetyków, może poszerzy horyzonty przyszłego obywatela, lecz nie nauczy go fizyki, myślenia ilościowego niezbędnego choćby tylko dla lekarzy, inżynierów, czyli w zawodach koniecznych ludzkości do przetrwania.

Uczniowie muszą przejść trening, czasami żmudny, spędzić godziny na rozumowaniu, wykonywaniu obliczeń, rozwiązywaniu zadań. Rolą nauczyciela jest ukazanie uczniom nagrody w postaci satysfakcji z sukcesów, obdarzania pracowitych pochwałami i nagrodami. Rolą mądrego społeczeństwa jest oferowanie jako nagrody dobrych posad i prestiżu.

Gorąco polecamy artykuł o dawkach promieniowania naturalnego, na jakie jesteśmy eksponowani. Podane są one ze szczegółowymi uzasadnieniami, co pozwoli uniknąć wielu kontrowersji w rozmaitych dyskusjach. Zachęcamy też do lektury bardzo użytecznych, naszym zdaniem, artykułów o różniczkowaniu algorytmicznym i o zastosowaniu całkowania numerycznego. Przypominamy też „łatwe–trudne” zadanie z transporterem, przedyskutowane przez nieżyjącego już Waldemara Gorzkowskiego. Jesteśmy pewni, że życiorys geniusza Lwa Landaua, autora kultowych podręczników, też przyciągnie Państwa uwagę.

Zapraszamy do lektury i zachęcamy do bycia z nami również po przerwie wakacyjnej.

Z.G-M



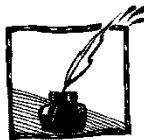
## Contents

Per aspera ad astra <i>Zofia Gołqb-Meyer</i> .....	1
Natural radiation from the Earth and the Cosmos <i>Paweł Moskal</i> .....	4
Algorithmic Differentiation <i>Jerzy Karczmarczyk</i> .....	21
Diffraction from a circular aperture or why physicist needs a numerical integration <i>Jerzy Ginter</i> .....	35
When the Earth stopped to be flat? The visions of Solar System until Kepler <i>Michał Bizoń</i> .....	44
About analogy between Snell's law and the movement of the material point with friction <i>Jacek Ciborowski, Marta Włodarczyk</i> .....	50
The experiment from the Institute of Physics collection <i>Marek Gołqb</i> .....	53
Lew D. Landau <i>Maria Pawłowska</i> .....	54
The task of the transporter is easy-difficult task <u>Waldemar Gorzkowski</u> .....	61
Absorption spectra of a red cabbage pigment <i>Jerzy Ginter</i> .....	64
Students wanted. Coherently prepared media – novel properties and applications <i>Wojciech Gawlik</i> .....	67
19 <sup>th</sup> International Conference of Young Scientists <i>Urszula Woźnikowska-Bezak</i> .....	68
Lew D. Landau in philately <i>Jerzy Bartke</i> .....	71



## Spis treści

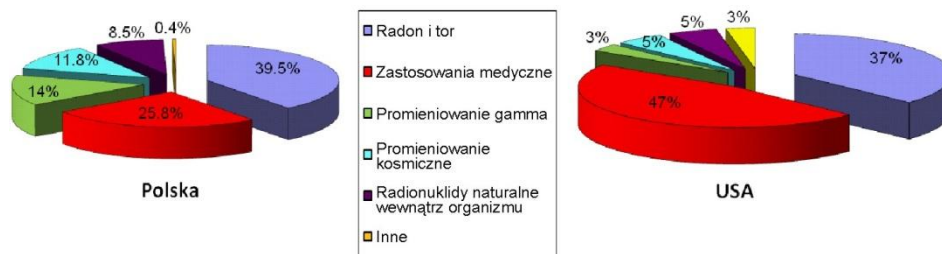
Przez pot i łzy ku satysfakcji <i>Zofia Gołąb-Meyer</i> .....	1
Promieniowanie naturalne z Ziemi i z Kosmosu <i>Paweł Moskal</i> .....	4
Różniczkowanie algorytmiczne <i>Jerzy Karczmarszuk</i> .....	21
Dyfrakcja światła na otworze kołowym, czyli po co fizykowi całkowanie numeryczne <i>Jerzy Ginter</i> .....	35
Kiedy Ziemia przestała być płaska? Wizje Układu Słonecznego do czasów Keplera <i>Michał Bizoń</i> .....	44
O analogii prawa Snelliusa w ruchu punktu materialnego z tarcie <i>Jacek Ciborowski, Marta Włodarczyk</i> .....	50
Doświadczenie ze zbiorów IF UJ <i>Marek Gołąb</i> .....	53
Lew D. Landau <i>Maria Pawłowska</i> .....	54
Zadanie z transporterem – łatwe trudne zadanie <u>Waldemar Gorzkowski</u> .....	61
Badanie widm absorpcyjnych soku z czerwonej kapusty <i>Jerzy Ginter</i> .....	64
Studenci poszukiwani. Ośrodki z koherencją kwantową – nowe właściwości i zastosowania <i>Wojciech Gawlik</i> .....	67
4 medale na ICYS 2012 w Holandii <i>Urszula Woźnikowska-Bezak</i> .....	68
Lew D. Landau w filatelistyce <i>Jerzy Bartke</i> .....	71



## Promieniowanie naturalne z Ziemi i z Kosmosu

*Paweł Moskal, Sedigheh Jowzaee  
Instytut Fizyki UJ*

Organizmy żyjące na powierzchni Ziemi podlegają nieustannemu napromienianiu cząstkami pochodzącymi z Kosmosu, a także tymi z rozpadów jąder atomów stanowiących skorupę Ziemi i jej atmosferę. Źródłem napromieniania istot żywych są także pierwiastki promieniotwórcze zawarte w ich organizmach.



Rys. 1. Przyczynki procentowe napromieniania człowieka pochodzące ze źródeł naturalnych i sztucznych. Jednostką dawki napromieniania organizmu jest Sv (Siwert)<sup>1</sup>. Średnia roczna dawka napromieniania w Polsce wynosi 3,3 mSv, w tym od źródeł naturalnych ~2,45 mSv, a od sztucznych ~0,85. W USA całkowita średnia dawka roczna jest prawie dwa razy większa niż w Polsce i wynosi 6,2 mSv, a procentowy przyczynek od źródeł sztucznych jest także istotnie wyższy. Wynika to z faktu, że w USA medycyna nuklearna jest znacznie powszechniej stosowana niż w Polsce

### Promieniowanie z Kosmosu

Promieniowanie kosmiczne w postaci protonów (87%), jąder helu (11%), a także nieznacznie w postaci innych jąder (1%) i elektronów (1%) dolatuje do atmosfery Ziemi w większości spoza układu Słonecznego, z odległych galaktyk. Część tego pierwotnego promieniowania dociera do powierzchni Ziemi. Pozostała część inicjuje w atmosferze i zawartych w niej pyłach reakcje jądrowe rozbijając jądra atomowe na mniejsze fragmenty, a także wytwarzając, nieraz w wielu następujących po sobie reakcjach, wiele innych cząstek. Spośród wytwarzanych w atmosferze cząstek najistotniejszymi, z punktu widzenia promieniowania

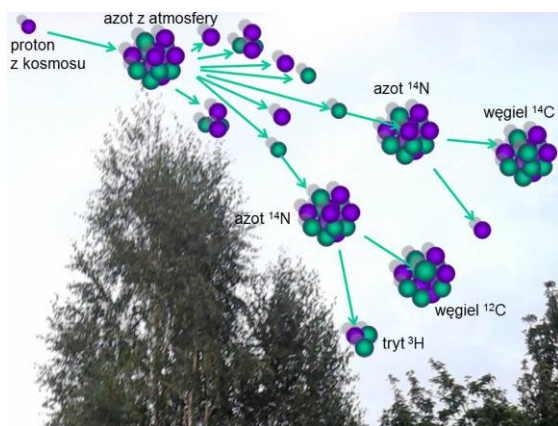
<sup>1</sup> Przypominamy, że  $Sv = J/kg$  jest miarą napromieniania organizmu wyrażaną w jednostkach energii deponowanej w organizmie przez promieniowanie na jednostkę masy napromienianego organizmu. Sv (siwert) jest jednostką dawki skutecznej będącej miarą skutków biologicznych wywołanych w organizmach żywych przez promieniowanie. Dawkę tę oblicza się przemnażając energię kinetyczną zdeponowaną przez promieniowanie na jednostkę masy organizmu przez współczynnik szkodliwości danego rodzaju promieniowania oraz przez współczynnik wagowy uwzględniający wrażliwość na promieniowanie poszczególnych organów.

powierzchni Ziemi, są miony (mion jest cząstką o właściwościach podobnych do elektronu, tylko posiada ponad dwieście razy większą masę niż elektron). W sumie, na skutek pierwotnego i wtórnego promieniowania kosmicznego, w trakcie jednej sekundy przez każdego człowieka przelatuje około siedemdziesiąt mionów, pięćdziesiąt kwantów gamma, kilkadziesiąt elektronów i antyelektronów i kilka protonów i neutronów. W ciągu każdej sekundy przelatuje przez człowieka także wiele miliardów neutrin docierających do Ziemi z Kosmosu. Pomimo tak olbrzymiej liczby ich wpływ na nasze organizmy możemy całkowicie zaniedbać, ponieważ neutrina nie oddziałują ani elektromagnetycznie, ani silnie. Dlatego też średnio tylko raz na kilka dni zdarza się w ciele człowieka reakcja wywołana przez neutrino.

Pozostałe cząstki, takie jak miony, protony czy elektrony posiadające ładunek elektryczny, przelatując przez organizm jonizują na swojej drodze atomy. Jonizację pośrednio mogą wywołać także elektrycznie obojętne neutrony lub kwanty gamma: neutrony na skutek reakcji jądrowych, w których uwalniane są cząstki naładowane, a kwanty gamma poprzez elektromagnetyczne wybijanie elektronów. W sumie promieniowanie kosmiczne w ciągu roku wywołuje jonizację zawartych w człowieku atomów, a tym samym uszkodzenia komórek, wynoszące średnio około 0,39 mSv. Na terenie Polski napromieniowanie człowieka bezpośrednio w wyniku promieniowania kosmicznego stanowi jedynie 11,8% całkowitej dawki, wynoszącej 3,3 mSv na rok (rys. 1).

### Substancje promieniotwórcze wytwarzane w atmosferze

Promieniowanie kosmiczne prowadzi także do powstania izotopów promieniotwórczych, które napromieniowują nas od wewnątrz. Izotopy te wytwarzane są w atmosferze Ziemi w wyniku łańcuchów reakcji jądrowych inicjowanych przez pierwotne promieniowanie kosmiczne (rys. 2). Do takich kosmopochodnych izotopów mających znaczący przyczynek do napromieniowania żywych organizmów należą jądra promieniotwórcze węgla  $^{14}\text{C}$ , sodu  $^{22}\text{Na}$ , wodoru  $^3\text{H}$  i berylu  $^9\text{Be}$ .



Rys. 2. Łańcuch reakcji jądrowych inicjowany promieniowaniem kosmicznym prowadzący do powstania izotopów węgla  $^{14}\text{C}$  i wodoru  $^3\text{H}$ . Zarówno  $^{14}\text{C}$  jak i  $^3\text{H}$  powstaje głównie w wyniku oddziaływań neutronów promieniowania kosmicznego z azotem i tlenem.

Jądro atomowe wodoru  $^3\text{H}$  podobnie jak  $^{14}\text{C}$  powstaje w reakcji neutronów termicznych z jądrami azotu, na przykład w wyniku reakcji:  $n + ^{14}\text{N} \rightarrow ^{12}\text{C} + ^3\text{H}$  i  $n + ^{14}\text{N} \rightarrow ^{14}\text{C} + p$ . W wyniku reakcji jądrowych indukowanych promieniowaniem kosmicznym koncentracja węgla  $^{14}\text{C}$  w węglu wynosi  $10^{-12}$ , a trytu ( $^3\text{H}$ ) w wodorze  $10^{-18}$ .

Atomy z jądrami promieniotwórczymi posiadają praktycznie takie same właściwości chemiczne jak zwykłe atomy, dlatego zużywane są w procesach metabolicznych przez organizmy żywe podobnie jak atomy z jądrami stabilnymi. Przykładowo wdychamy znajdujący się w powietrzu promieniotwórczy dwutlenek węgla  $^{14}\text{CO}_2$  czy molekuly promieniotwórczej pary wodnej  $^3\text{H}_2\text{O}$ . W konsekwencji atomy z jądrami promieniotwórczymi, takimi jak na przykład  $^{14}\text{C}$  czy  $^3\text{H}$ , stanowią część naszych organizmów.

### Promieniowanie z wnętrza człowieka

Największy wkład do wewnętrznego napromieniowania pochodzi od promieniotwórczego potasu  $^{40}\text{K}$ , który nie powstaje na skutek promieniowania kosmicznego, lecz jest jednym z 18 pierwiastków promieniotwórczych występujących w skorupie Ziemi, których czas życia jest większy lub niewiele mniejszy niż wiek Ziemi (około pięć miliardów lat). Potas  $^{40}\text{K}$  występuje powszechnie w żywności i w konsekwencji wchłaniany drogą pokarmową stanowi składnik organizmu człowieka.

Biorąc pod uwagę stosunkową zawartość promieniotwórczego potasu  $^{40}\text{K}$  w potasie (około  $10^{-4}$ ), węgla  $^{14}\text{C}$  w węglu (około  $10^{-12}$ ), zawartość tych pierwiastków w organizmie człowieka (~18% masy człowieka to węgiel, a 0,2% to potas) oraz średnie czasy życia pojedynczych jąder  $\sim 1,85 \cdot 10^9$  lat ( $^{40}\text{K}$ ) i  $\sim 8500$  lat ( $^{14}\text{C}$ ) otrzymujemy<sup>2</sup>, że w człowieku o masie 70 kg na sekundę rozpada się około 4300 jąder potasu  $^{40}\text{K}$  i około 2500 jąder węgla  $^{14}\text{C}$ . Biorąc pod uwagę także inne pierwiastki promieniotwórcze okazuje się, że średnio w trakcie jednej sekundy w człowieku następuje około 8000 rozpadów promieniotwórczych, w wyniku których człowiek od wewnątrz napromieniowuje się głównie elektronami i kwantami gamma. Dawka napromieniowania wynikająca z rozpadów radionuklidów zawartych w ciele człowieka wynosi około 0,28 mSv, co w Polsce stanowi 8,5% całkowitej dawki rocznej (rys. 1).

<sup>2</sup> Aktywność potasu  $^{40}\text{K}$  w człowieku możemy obliczyć dzieląc liczbę jąder atomowych  $^{40}\text{K}$  znajdujących się w człowieku przez średni czas życia jednego jądra. Aby to zrobić musimy wiedzieć, że:

średni czas życia jądra  $^{40}\text{K}$  wynosi 1,85 miliarda lat  $\sim 58,2 \cdot 10^{15}$  sekund;

zawartość procentowa potasu w człowieku wynosi 0,2% = 0,002;

zawartość stosunkowa potasu  $^{40}\text{K}$  do potasu naturalnego (stabilnego) wynosi 0,000117;

masa molowa potasu wynosi  $\sim 39,1$  grama, czyli  $6,02 \cdot 10^{23} / 39,1 = 154 \cdot 10^{20}$  atomów na gram.

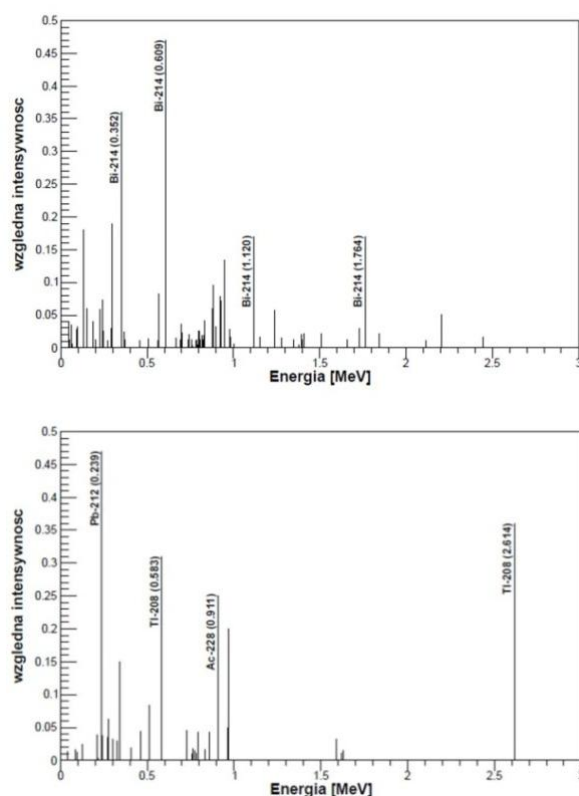
Biorąc pod uwagę powyższe wartości dla człowieka o masie 70 kg otrzymujemy:

$70 \text{ kg} \cdot 0,002 \cdot 0,000117 \cdot 154 \cdot 10^{23} \text{ kg}^{-1} / (58,2 \cdot 10^{15} \text{ s}) = 4334$  rozpady potasu  $^{40}\text{K}$  na sekundę.



### Promieniowanie z Ziemi

Spośród 18 długożyjących pierwiastków promieniotwórczych znajdujących się w skorupie Ziemi tylko uran ( $^{238}\text{U}$ ,  $^{235}\text{U}$ ) i tor ( $^{232}\text{Th}$ ), inicjując szereg następujących po sobie rozpadów, powodują, że w skorupie Ziemi znajdują się jeszcze 43 inne promieniotwórcze izotopy. Czas życia tych pochodnych izotopów jest o wiele rzędów wielkości mniejszy niż wiek Ziemi, więc można by w uproszczeniu przyjąć, że są one „na bieżąco” wytwarzane i w związku z tym ich aktywność jest taka sama jak aktywność protoplastów inicjujących łańcuch rozpadów. Przykładowo na jeden rozpad  $^{238}\text{U}$  mamy po jednym rozpadzie każdego z pierwiastków z szeregu<sup>3</sup> (patrz tabele 1 i 2).



Rys. 3. Widmo energii kwantów gamma emitowanych z rozpadu izotopów w szeregu uranowo-radowym (górny wykres) oraz torowym (dolny wykres); patrz także tabele 1 i 2. Na wykresie zaznaczone są wszystkie wartości energii emitowanych kwantów w poszczególnych szeregach. Intensywność podana jest w stosunku do aktywności prekursora szeregu

<sup>3</sup> Mniejszą aktywność będą miały pochodne nuklidów rozpadających się na dwa lub więcej sposobów.

Izotopy promieniotwórcze znajdujące się w skorupie Ziemi napromieniowują żyjące na powierzchni Ziemi organizmy głównie poprzez promieniowanie gamma, ponieważ promienie beta i alfa są w większości pochłaniane zanim wydadzą się na powierzchnię. Największy wkład do promieniowania gamma pochodzącego z Ziemi mają izotopy z szeregu promieniotwórczych uranu i toru (65%) oraz potas  $^{40}\text{K}$  (35%). W Polsce powodują one dawkę wynoszącą 0,462 mSv co stanowi 14% całkowitej dawki napromieniowania (rys. 1). Energia kwantów gamma emitowanych w wyniku rozpadu potasu wynosi 1461 keV, a izotopy z szeregu  $^{238}\text{U}$  i  $^{232}\text{Th}$  emitują kwanty gamma o energiach od kilku keV do ~3300 keV. Widma promieniowania gamma z szeregu torowego ( $^{232}\text{Th}$ ) oraz uranowo-radowego ( $^{238}\text{U}$ ) pokazane są na rys. 3. Na widmach tym widać wiele linii zarówno dla szeregu uranowo-radowego jak i dla szeregu torowego, jednak emisja większości z nich jest mało prawdopodobna. W tabelach 1 i 2 dane są energie kwantów gamma dla najbardziej intensywnych przejść po rozpadzie danego izotopu.

Tabela 1. Szereg torowy  $^{232}\text{Th}$ . Przedstawiono łańcuch rozpadów:  $\text{Th} \rightarrow \text{Ra} \rightarrow \text{Ac} \rightarrow \text{Th} \rightarrow \text{Ra} \rightarrow \text{Rn} \rightarrow \text{Po} \rightarrow \text{Pb} \rightarrow \text{Bi} \rightarrow (\text{Po}, \text{Tl}) \rightarrow \text{Pb}$ . Podane są energie kwantów gamma emitowanych tylko z największą intensywnością

Izotop	Czas połowicznego zaniku	Rozpady o największej intensywności*					
		alfa		beta		gamma	
		E	I	E	I	E	I
$^{232}\text{Th}$	$1,39 \cdot 10^{10}$ y	3,95	(24%)	–	–	–	–
		4,01	(76%)				
$^{228}\text{Ra}$	5,75 y	–	–	0,055	(100%)	–	–
$^{228}\text{Ac}$	6,13 h	–	–	2,11	(100%)	0,34	(15%)
						0,908	(25%)
						0,968	(20%)
$^{228}\text{Th}$	1,913 y	5,34	(28%)	–	–	0,084	(1,6%)
		5,42	(71%)			0,214	(0,3%)
$^{224}\text{Ra}$	3,64 d	5,45	(5,5%)	–	–	0,241	(3,7%)
		5,68	(94,5%)				
$^{220}\text{Rn}$	55,6 s	6,30	(~100%)	–	–	0,55	(0,07%)
$^{216}\text{Po}$	0,145 s	6,78	(100%)	–	–	–	–
$^{212}\text{Pb}$	10,64 h	–	–	0,580	–	0,239	(47%)
						0,300	(3,2%)
$^{212}\text{Bi}$	60,5 m	6,05	(70%)	2,25	(100%)	0,040	(2%)
		6,09	(30%)			0,727	(7%)
						1,620	(1,8%)
$^{212}\text{Po}$	–	–	–	–	–	–	–
		8,78	(100%)				
				1,80	(100%)	0,511	(23%)
						0,583	(86%)
						2,614	(100%)
$^{208}\text{Pb}$	Stabilny	–	–	–	–	–	–

\* Względna intensywność dotyczy rozpadów danego izotopu a nie prekursora szeregu.

Tabela 2. Szereg uranowo-radowy  $^{238}\text{U}$ . Przedstawiono łańcuch rozpadów:  $\text{U} \rightarrow \text{Th} \rightarrow \text{Pa} \rightarrow (\text{Pa}, \text{U}) \rightarrow \text{Th} \rightarrow \text{Ra} \rightarrow \text{Rn} \rightarrow \text{Po} \rightarrow (\text{Pb}, \text{At}) \rightarrow \text{Bi} \rightarrow (\text{Po}, \text{Tl}) \rightarrow \text{Pb}$ . Podane są energie kwantów gamma emitowanych tylko z największą intensywnością

Izotop	Czas połowicznego zaniku	Rozpady o największej intensywności* Energia „E” cząstek podana jest w [MeV], a intensywność „I” podana jest w procentach					
		alfa		beta		gamma	
		E	I	E	I	E	I
$^{238}\text{U}$	$4,468 \cdot 10^9$ y	4,15 4,19	(24%) (76%)	–		–	
$^{234}\text{Th}$	24,1 d	–		~ 0,103 0,191	(19%) (81%)	0,063 0,924 0,928	(3,5%) (2,81%) (2,77%)
$^{234\text{m}}\text{Pa}$ ↙ 99,86% ↘ ↘ 0,14%	1,18 m	–		2,29	(98%)	0,569 0,883 0,946	(8,2%) (9,6%) (13,4%)
– $^{234}\text{Pa}$	6,7 h	–		0,53 1,13	(66%) (13%)	0,10 0,131 0,946	(50%) (18%) (13,4%)
$^{234}\text{U}$	$2,48 \cdot 10^5$ y	4,72 4,77	(28%) (72%)	–		0,053	(0,2%)
$^{230}\text{Th}$	$7,52 \cdot 10^4$ y	4,62 4,68	(24%) (76%)	–		0,068 0,142	(0,6%) (0,07%)
$^{226}\text{Ra}$	1602 y,	4,60 4,78	(5,5%) (94,5%)	–		0,186	(4%)
$^{222}\text{Rn}$	3,825 d,	5,49	(~100%)	–		0,510	(0,07%)
$^{218}\text{Po}$ ↙ 99,98% ↘ ↘ 0,02%	3,05 m	6,11	(100%)	0,33	(100%)	–	
$^{214}\text{Pb}$	–	–	–	1,03	(6%)	0,241 0,295 0,352	(7,3%) (19%) (36%)
– $^{218}\text{At}$	2 s	6,65 6,70	(6%) (94%)	0,67	(94%)	–	
$^{214}\text{Bi}$ ↙ 99,96% ↘ ↘ 0,04%	19,7 m	5,61	(100%)	3,26	(100%)	0,609 1,120 1,764	(47%) (17%) (17%)
$^{214}\text{Po}$	–	–	–	–	–	0,799	(0,014%) )
– $^{210}\text{Tl}$	1,32 m	–		2,3	(100%)	0,296 0,795 1,07 1,31	(80%) (100%) (17%) (21%)
$^{210}\text{Pb}$	~22 y	3,7	( $1,8 \cdot 10^{-8}$ )	0,017 0,064	(85%) (15%)	0,047	(4%)
$^{210}\text{Bi}$ ↙ ~100% ↘ ↘ ~,00001%	5,02 d	4,93 4,89 4,59	(60%) (34%) (5%)	1,155	(100%)	–	
$^{210}\text{Po}$	–	–	–	–	–	0,803	(0,0011%)
– $^{206}\text{Tl}$	4,19 m	–		1,520	(100%)	–	
$^{206}\text{Pb}$	Stable	–		–		–	

\* Względna intensywność dotyczy rozpadów danego izotopu, a nie prekursora szeregu.

### Z jakiej głębokości docierają kwanty gamma?

Przelatując przez materię kwanty gamma ulegają pochłanianiu lub rozproszeniu na elektronach i w efekcie tych reakcji ich strumień zostaje osłabiony. Podobnie jak w przypadku rozpadów promieniotwórczych liczba kwantów gamma wraz z grubością warstwy „ $x$ ”, przez którą przechodzą, maleje wykładniczo jak  $e^{-x/x_0}$ , gdzie  $x_0$  nazywany jest współczynnikiem osłabiania i jest on równy średniej grubości, jaką przebywa kwant gamma w danym materiale.

Współczynnik osłabienia zależy od energii i dla kwantów gamma emitowanych z potasu ( $E = 1,46$  MeV) wynosi on około 150 m dla powietrza i 17 cm dla wody. Biorąc pod uwagę, że skład atomowy gleby jest podobny do wody i że gęstość gleby wynosi około<sup>4</sup>  $1,5$  g/cm<sup>3</sup> (1,5 razy więcej niż gęstość wody), możemy przyjąć, że współczynnik osłabienia dla gleby wynosi około  $17$  cm/ $1,5 \approx 11$  cm. Widzimy zatem, że do powierzchni Ziemi będą docierały kwanty gamma głównie z cienkiej warstwy gleby<sup>5</sup> wynoszącej około 30 cm.

### Zawartość promieniotwórczego uranu, toru i potasu w glebie

Głównymi składnikami gleby są tlen O i krzem Si, a po kilka procent wkładu stanowi także aluminium Al, żelazo Fe, węgiel C, wodór H czy potas K. Wprawdzie interesujące nas izotopy potasu  $^{40}\text{K}$ , uranu  $^{238}\text{U}$  i toru  $^{232}\text{Th}$  oraz izotopy promieniotwórcze pochodzące z ich rozpadów stanowią w glebie procentowo bardzo mały wkład  $^{40}\text{K}$  ( $\sim 3 \cdot 10^{-4}\%$ ),  $^{238}\text{U}$  ( $\sim 3 \cdot 10^{-4}\%$ ),  $^{232}\text{Th}$  ( $\sim 10^{-3}\%$ ), to mimo to jest ich zaskakująco dużo. Zauważmy, że  $1$  km<sup>2</sup> warstwy gleby o grubości 30 cm waży około 500 000 ton ( $10^6$  m<sup>2</sup>  $\cdot$   $0,3$  m  $\cdot$   $1,5$  ton/m<sup>3</sup>). Nawet tak mała procentowa zawartość oznacza, że w warstwie ziemi o grubości 30 cm i powierzchni  $1$  km<sup>2</sup> jest około 4,5 tony toru  $^{232}\text{Th}$ , 1,5 tony uranu  $^{238}\text{U}$  i 1,5 tony promieniotwórczego potasu  $^{40}\text{K}$ <sup>6</sup>. Biorąc pod uwagę masę atomową i średni czas życia  $^{232}\text{Th}$  ( $2,03 \cdot 10^{10}$  lat), uranu  $^{238}\text{U}$  ( $6,45 \cdot 10^9$  lat) i potasu  $^{40}\text{K}$  ( $1,85 \cdot 10^9$  lat) otrzymujemy, że aktywności właściwe, czyli liczby rozpadów na sekundę na jednostkę masy, wynoszą:  $^{232}\text{Th} - 4,06 \cdot 10^6$  Bq/kg,  $^{238}\text{U} - 1,24 \cdot 10^7$  Bq/kg oraz  $^{40}\text{K} - 2,58 \cdot 10^8$  Bq/kg; zatem w jednym kilogramie gleby następuje w ciągu sekundy około 770 rozpadów promieniotwórczych potasu  $^{40}\text{K}$ , 37 rozpadów  $^{238}\text{U}$  oraz 41 rozpadów  $^{232}\text{Th}$ .

<sup>4</sup> W zależności od zawartości wody i rodzaju gleby gęstość może się znacznie wahać, u jednego z autorów w ogrodzie dość mokra gleba miała gęstość 2 g/cm<sup>3</sup>.

<sup>5</sup> Jeśli współczynnik pochłaniania wynosi  $x_0 = 11$  cm, to prawdopodobieństwo, że kwant gamma wyemitowany na skutek rozpadu potasu  $^{40}\text{K}$  przeleci warstwę ziemi o grubości 11 cm wynosi  $e^{-x/x_0} = e^{-1} = 0,37$ . Prawdopodobieństwo przejścia przez warstwę o grubości 22 cm maleje do  $e^{-2} = 0,14$ , a dla warstwy o grubości 33 cm wynosi ono już tylko  $e^{-3} = 0,05$ .

<sup>6</sup> Zawartość pierwiastków promieniotwórczych w glebie mocno waha się. Podane liczby są raczej oszacowaniami od dołu. Zawartość uranu w 500 000 ton gleby waha się od kilku do 30 ton.

### Ile kwantów gamma na sekundę emituje kilogram gleby?

W wyniku rozpadów  $^{40}\text{K}$  oraz pierwiastków promieniotwórczych powstałych z rozpadów uranu i toru emitowane są cząstki alfa, elektrony, a także kwanty gamma. W przypadku potasu  $^{40}\text{K}$  kwant gamma emitowany jest w 11% rozpadów, czyli na skutek 770 rozpadów  $^{40}\text{K}$  w jednym kilogramie gleby powstaje około 85 kwantów gamma na sekundę. Jeden rozpad  $^{232}\text{Th}$  czy  $^{238}\text{U}$  może powodować emisję bardzo wielu kwantów gamma pochodzących z kolejnych rozpadów pochodnych w szeregu (rys. 3 oraz tabele 1 i 2). Biorąc jednak pod uwagę prawdopodobieństwa emisji, okazuje się, że rozpad  $^{232}\text{Th}$  i wszystkich jego pochodnych w szeregu powodują emisję średnio tylko około 2,5 kwantów gamma, a w przypadku rozpadu  $^{238}\text{U}$  i jego pochodnych powstaje średnio tylko 3,6 kwantów gamma (można to wywnioskować z tabeli rozpadów dostępnych np. na stronie <http://ie.lbl.gov/education/isotopes.htm>). Zatem w jednym kilogramie gleby w ciągu sekundy powstaje około 85 kwantów gamma z potasu  $^{40}\text{K}$ , około 102 kwanty gamma z pochodnych w szeregu torowym i około 133 kwanty gamma z szeregu uranowo-radowego.

### Ile kwantów gamma dociera do powierzchni Ziemi?

Każdy kwant gamma przelatując przez materię wcześniej czy później ulegnie rozproszeniu lub pochłonięciu, głównie na skutek oddziaływania z elektronami, dlatego nie wszystkie kwanty gamma powstające w glebie dotrą do jej powierzchni. Dla oszacowania, ile kwantów dociera do powierzchni, przyjmijmy najpierw, że wszystkie lecą pionowo do góry (za chwilę uwolnimy to upraszczające, ale nierealistyczne założenie). Przy takim założeniu liczba kwantów gamma docierających na sekundę do powierzchni Ziemi S z warstwy o grubości dx na głębokości x jest następująca:

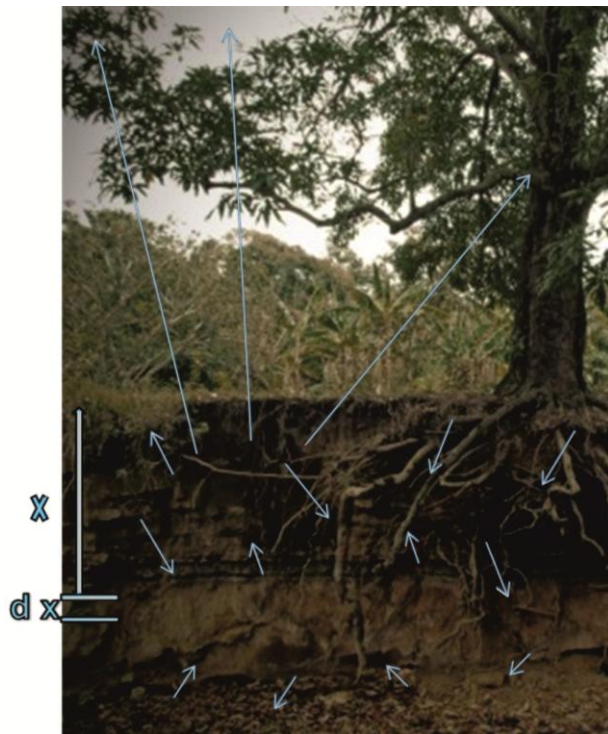
$$\rho \cdot dx \cdot S \cdot A \cdot e^{-x/x_0}, \quad (1)$$

gdzie,  $\rho$  oznacza gęstość gleby,  $x_0$  – współczynnik osłabienia promieniowania gamma, A – oszacowaną powyżej przez nas liczbę kwantów gamma emitowanych na sekundę przez jednostkę masy gleby.

A zatem z całej głębokości będzie docierać do powierzchni:

$$\int_0^{\infty} (\rho \cdot dx \cdot S \cdot A \cdot e^{-x/x_0}) = \rho \cdot x_0 \cdot S \cdot A, \quad (2)$$

czyli tyle kwantów gamma w ciągu sekundy ile emituje warstwa o grubości równej współczynnikowi osłabienia.



Rys. 4. W wyniku rozpadów jąder atomów stanowiących naturalny składnik ziemi emitowane są kwanty gamma. Część kwantów gamma wydostaje się na powierzchnię i może przelecieć w powietrzu nawet kilkaset metrów zanim ulegną rozproszeniu lub pochłonięciu

Zanim podstawimy wartości do równania (2) zauważmy, że – by uwolnić założenie, że wszystkie kwanty gamma lecą pionowo do góry – wystarczy, jak w grubym przybliżeniu podzielimy ich liczbę przez cztery<sup>7</sup>. Zatem podstawiając wartości do równania (2) i dzieląc przez 4 otrzymujemy<sup>8</sup>, że do powierzchni dolatuje około 10 000 kwantów gamma na m<sup>2</sup>.

<sup>7</sup> Czynniki 2, ponieważ połowa leci w dół, a drugi czynnik 2 jest grubym przybliżeniem tego, że im mniejszy kąt tworzy kierunek lotu kwantu gamma z poziomem tym mniejsze szanse na wydostanie się na powierzchnię. Jest to grube założenie, ale w obliczu dużych wahań zawartości uranu i potasu w glebie, które mogą być nawet o rząd wielkości większe niż oszacowane w tym artykule, taka dokładność, mająca na celu jedynie uchwycenie rzędu wielkości, wydaje się wystarczająca.

<sup>8</sup> Współczynnik osłabienia zmienia się z energią, zatem do dokładnych obliczeń należałoby uwzględnić tę zależność. Dla naszych grubych oszacowań przyjmujemy wartość współczynnika pochłaniania dla średniej energii kwantów gamma w danym szeregu. Przy takim założeniu wynik byłby dokładny, gdyby zależność współczynnika pochłaniania od energii była liniowa. Średnie energie kwantów gamma emitowanych w całym ciągu rozpadów w szeregu torowym i uranowo-radowym wynoszą odpowiednio ~0,9 i ~0,7 MeV. Współczynniki osłabienia w glebie dla tych energii wynoszą w przybliżeniu około 9 cm dla 0,9 MeV oraz 8 cm dla kwantów gamma o energii

Gdyby człowiek położył się na ziemi (zajmując około  $0,7 \text{ m}^2$ ) to na jego ciało wpadałoby około 7000 kwantów gamma na sekundę pochodzących z rozpadu  $^{40}\text{K}$ ,  $^{238}\text{U}$  i  $^{232}\text{Th}$ . W pierwszym przybliżeniu podobna liczba kwantów gamma będzie promieniować na człowieka będącego w pozycji pionowej. W powietrzu współczynnik osłabienia promieniowania gamma o energii rzędu 1 MeV wynosi około 120 metrów, dlatego znaczna część kwantów gamma dolatuje na wysokość do kilkuset metrów. W latach pięćdziesiątych wykorzystywano ten fakt do poszukiwania złóż uranu – tereny badano przy użyciu samolotów i helikopterów z zamontowanymi detektorami promieniowania gamma.

### Promieniowanie radonu na świeżym powietrzu

Do tej pory nie omówiliśmy głównego składnika dawki napromieniowania naturalnego, która pochodzi z rozpadów promieniotwórczych radonu<sup>9</sup>. Radon jest jednym z pierwiastków promieniotwórczych powstających w łańcuchu rozpadów inicjowanych zarówno przez uran jak i tor (tabele 1 i 2), jednak wyróżnia się od pozostałych pierwiastków tym, że w atomie radonu wszystkie powłoki elektronowe są w całości zapełnione i dlatego jest on gazem szlachetnym bardzo słabo reagującym z otoczeniem.

W szeregu uranowo-radowym (tabela 2) powstaje izotop radonu  $^{222}\text{Rn}$ , a w szeregu torowym (tabela 1) izotop  $^{220}\text{Rn}$ , ten ostatni przyjęło się nazywać toronem. Atomy radonu powstające blisko powierzchni minerałów (w skałach i w glebie) uwalniają się do powietrza i wody (fazy powietrznej lub wodnej między cząsteczkami) dzięki kinetycznej energii odrzutu uzyskiwanej w rozpadzie jądra atomu radu. W glebie z ziaren minerałów uwalnia się do 70% powstającego w nich radonu. Szybkość wydostawania się radonu na powierzchnię ziemi zależy od porowatości i wilgotności gleby, od ciśnienia atmosferycznego i innych czynników meteorologicznych. Na emisję radonu na powierzchnię wpływa także układ stref tektonicznych. Szczególnie sprzyjające wydobywaniu się radonu z dużych głębokości są uskoki skalne charakteryzujące się rozkruszeniem skał i szczelinami. O ile stężenie w atmosferze węgla  $^{14}\text{C}$  powstającego w wyniku promieniowania kosmicznego jest w miarę stałe w czasie, to stężenie radonu i toronu ulega dużym wahaniom w zależności od lokalizacji, pory dnia, pory roku, a także od pogody. Większe stężenia radonu są późnym latem, a mniejsze w zimie. W Warszawie aktywność radonu wynosi około  $2,7 \text{ Bq/m}^3$ , ale w niektórych miejscowościach jest aż o rząd wielkości większa: na przykład

---

0,7 MeV. Podstawiając wartości do równania (2) i dzieląc przez 4 otrzymujemy, że do powierzchni  $1 \text{ m}^2$  w ciągu sekundy dociera:

$$^{40}\text{K} \rightarrow 1500 \text{ kg/m}^3 \cdot 0,11 \text{ m} \cdot 1 \text{ m}^2 \cdot 85 \text{ kg}^{-1} / 4 \approx 3500$$

$$^{238}\text{U} \rightarrow 1500 \text{ kg/m}^3 \cdot 0,08 \text{ m} \cdot 1 \text{ m}^2 \cdot 133 \text{ kg}^{-1} / 4 \approx 4000$$

$$^{232}\text{Th} \rightarrow 1500 \text{ kg/m}^3 \cdot 0,09 \text{ m} \cdot 1 \text{ m}^2 \cdot 102 \text{ kg}^{-1} / 4 \approx 3400$$

<sup>9</sup> Radon jest najcięższym gazem szlachetnym mającym najwyższą temperaturę topnienia i wrzenia.

w Kowarach ( $30 \text{ Bq/m}^3$ ) czy w Świeradowie ( $24 \text{ Bq/m}^3$ )<sup>10</sup>. Podwyższona aktywność w południowo-zachodniej Polsce wynika z budowy geologicznej Sudetów z dużymi obszarami z odsłoniętymi skałami magmowymi. Średnia aktywność radonu w powietrzu na Ziemi nad lądami wynosi około  $3,7 \text{ Bq/m}^3$ .

### Promieniowanie radonu wewnątrz budynków

Stężenie radonu jest znacznie większe wewnątrz budynków niż na zewnątrz. W Polsce średnie stężenie aktywności radonu w mieszkaniach wynosi około  $40 \text{ Bq/m}^3$  i jest ono, odwrotnie niż na świeżym powietrzu, większe w zimie niż w lecie, co wynika zapewne z częstszego wietrzenia pomieszczeń latem niż zimą. W krajach skandynawskich na przykład stężenie radonu jest znacznie większe niż w Polsce; średnia aktywność radonu w domach wynosi tam około  $100 \text{ Bq/m}^3$ . Dla porównania w tabeli 3 podane są wartości aktywności radonu w domach w kilku wybranych obszarach w Polsce i Iranie. Jak widać w Iranie aktywność ta też jest znacznie większa niż w Polsce, choć i w Polsce zdarzają się obszary o podniesionym stężeniu aktywności radonu. Na przykład, średnia wartość stężenia radonu w pokojach na parterze budynków w Jeleniej Górze w 2000 roku wynosiła około  $170 \text{ Bq/m}^3$ , a najwyższą zmierzoną w pomieszczeniach mieszkalnych wartość zaobserwowano w domu jednorodzinnym w Jeleniej Górze i wynosiła ona około  $3800 \text{ Bq/m}^3$ , czyli prawie 100 razy więcej niż średnia w Polsce.

Tabela 3. Stężenie radonu w domach w kilku wybranych obszarach w Polsce i Iranie

Polska	Rn ( $\text{Bq/m}^3$ )	Iran	Rn ( $\text{Bq/m}^3$ )
Olsztyńskie	51,1	Ramsar	578
Elbląskie	29,3	Tehran	80
Gdańskie	33,8	Babolsar	88
Konińskie	57,2	Gonabad	84

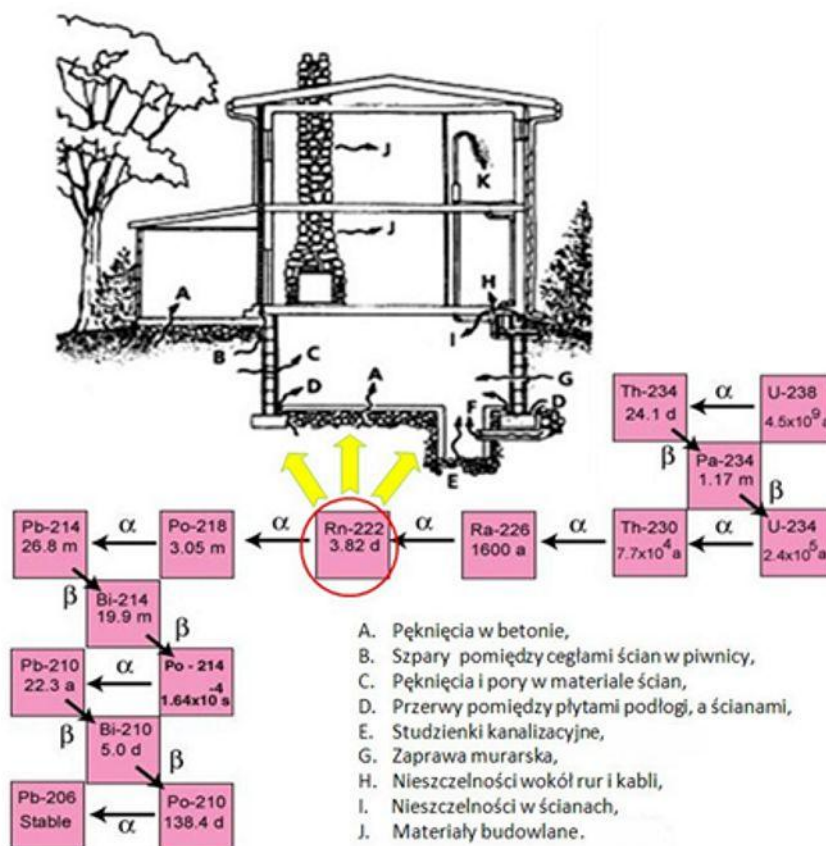
### Jak radon dostaje się do domów?

Radon przedostaje się do wnętrza domów z podłoża i z materiałów budowlanych, a także z wody i gazu ziemnego używanych w codziennych czynnościach domowym (patrz rys. 5), jego stężenie wewnątrz domu mocno zależy od konstrukcji budowli oraz od rodzaju podłoża. W materiałach budowlanych radon powstaje jako jeden z pochodnych pierwiastków z szeregów promieniotwórczych uranu i toru (tabele 1 i 2). Stężenie radonu w materiałach budowlanych bardzo mocno zależy od miejsca gdzie były one wykonane. Miarą tego stężenia może być aktywność radu, z którego radon powstaje. Na przykład w jednym

<sup>10</sup> Jednostką aktywności jest Bq (bekerel). 1 Bq oznacza, że średnio następuje jeden rozpad na sekundę. Do opisu stężenia radonu w powietrzu używamy jednostkę  $\text{Bq/m}^3$  oznaczającą liczbę rozpadów jąder radonu w  $1 \text{ m}^3$  powietrza w ciągu jednej sekundy.



kilogramie cegły polskiej następuje średnio około 20 rozpadów  $^{226}\text{Ra}$  na sekundę, a w niemieckiej aż około 290. Ale za to aktywność radu w gipsie w Polsce waha się od 26 do 740 Bq/kg, a w Niemczech nie przekracza od 20 Bq/kg<sup>11</sup>.



Rys. 5. Szereg promieniotwórczy prowadzący do powstania radonu  $^{222}\text{Rn}$  oraz drogi, którymi radon przedostaje się do wnętrza domów

Różnice ciśnienia pomiędzy podłożem a wnętrzem domu powodują, że radon jest „wsysany” do wnętrza budynków z gleby (rys. 5). Radon dostający się z podłoża stanowi średnio większy przyczynek do stężenia w domach niż jego emanacja z materiałów budowlanych. Radon przedostaje się do środka domów poprzez pęknięcia w płytach betonowych, studzienki kanalizacyjne, nieszczelności wokół rur doprowadzających wodę, niedokładności przy łączeniach różnych części budynku. Radon przenika do środka także z wodą.

<sup>11</sup> Największa aktywność w materiałach budowlanych pochodzi od potasu  $^{40}\text{K}$ . Na przykład w ceglach w Iranie wynosi ona średnio 850 Bq/kg.

### Zawartość radonu promieniotwórczego w wodzie

Radon jest rozpuszczalny w wodzie, ale jego rozpuszczalność spada ze wzrostem temperatury, dlatego radon znajdujący się w wodzie używanej w domu do codziennych czynności uwalnia się, jeśli tylko następuje wzrost jej temperatury, na przykład w trakcie gotowania, ciepłych kąpeli czy brania prysznic. Jednak nie każda woda zawiera znaczące ilości radonu. Jeśli woda pochodzi z ujęć z rzek czy jezior, wtedy większość radonu zostaje uwolniona zanim woda dotrze do domów. Zawartość radonu może być jednak znacznie większa, jeśli woda pochodzi ze źródeł podziemnych, choć stężenie aktywności radonu i tak bardzo mocno zależy od lokalnych warunków geologicznych. W niektórych miejscach w Polsce jest ono stosunkowo wysokie, na przykład w obszarze Jeleniej Góry gdzie ponad połowa potrzeb miasta pokrywana jest wodą o stężeniu aktywności radonu wynoszącą około 200 Bq/l. Średnia aktywność promieniotwórcza wód jest mała i wynosi około 15 Bq/l wody morskiej i tylko 0,1 Bq/l wody z Wisły, ale dużo większe stężenia radonu występują w niektórych wodach podziemnych. Na przykład w wodach ze źródła Marii Skłodowskiej-Curie w Świeradowie Zdroju stwierdzono aktywność 3000 Bq/l.

### Dawka napromieniowania otrzymana z wodą pitną

Zastanówmy się, jaką dawkę napromieniowania otrzymuje człowiek w Jeleniej Górze wypijający jedną szklankę wody dziennie (~0,2 litra) o stężeniu aktywności radonu wynoszącym ~200 Bq/l. Jedna szklanka wody dziennie oznacza, że w ciągu roku człowiek wypija  $0,2 \cdot 365 = 73$  l takiej wody, a zatem wypija ilość radonu, która w sumie powoduje aktywność  $200 \text{ Bq/l} \cdot 73 \text{ l} \approx 15\,000 \text{ Bq}$ .

15 000 Bq wchłoniętego radonu oznacza, że do organizmu dostało się około  $7 \cdot 10^9$  atomów radonu<sup>12</sup>. Gdyby każde z tych jąder atomowych rozpadło się w organizmie, to wtedy pochłonęlibyśmy w wyniku jonizacji wywoływanej przez cząstki alfa emitowane z radonu i jego pochodnych ( $^{222}\text{Rn}$  (5,49 MeV)  $\rightarrow$   $^{218}\text{Po}$  (6,11 MeV)  $\rightarrow$   $^{214}\text{Po}$  (7,83 MeV)) dawkę energii wynoszącą:  $7 \cdot 10^9 \cdot 19,43 \text{ MeV} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J/eV} \approx 22 \text{ mJ}$ . W przypadku człowieka o masie 70 kg oznaczałoby to dawkę pochłoniętą w wysokości 0,31 J/kg. Biorąc pod uwagę współczynnik szkodliwości biologicznej cząstek alfa wynoszący 20 otrzymujemy dawkę skuteczną równą ~6,2 mSv. Jednak nie każdy atom radonu pozostaje w człowieku

<sup>12</sup> Liczba jąder promieniotwórczych zanika w czasie zgodnie z prawem

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-t/t_{\text{średni}}}, \quad (3)$$

gdzie  $t$  oznacza czas, a  $t_{\text{średni}}$  oznacza średni czas życia pojedynczego jądra,  $N(t)$  – liczbę jąder, które dotrwały do czasu  $t$ , a  $N_0$  – liczbę jąder w chwili  $t = 0$ . Stąd aktywność w chwili  $t$ , czyli liczba rozpadów na sekundę, wynosi:

$$A(t) = |dN/dt| = N(t)/t_{\text{średni}}. \quad (4)$$

Zatem, aktywność w danej chwili jest równa liczbie jąder, które dotrwały do tej chwili podzielone przez ich średni czas życia. Średni czas życia radonu  $^{222}\text{Rn}$  wynosi około 5,5 dnia (475 200 s), czyli 15 000 Bq wchłoniętego radonu oznacza, że do organizmu dostało się  $15\,000 \text{ Bq} \cdot 475\,200 \text{ s} \approx 7,1 \cdot 10^9$  atomów radonu.

do momentu rozpadu tylko w większości wydalany jest wraz z wodą w tym samym dniu, więc dawka napromieniowania, jaką otrzymujemy w wyniku picia dziennie szklanki wody o aktywności radonu 200 Bq/l, wynosi około  $1 \text{ mSv} = (6,2 \text{ mSv} \cdot (1 - e^{-1/5,5}))$ , czyli zwiększa naturalne napromieniowanie z 2,4 do 3,4 mSv, a więc jest to wciąż znacznie mniej niż dawka promieniowania otrzymywana przez Skandynawów czy Amerykanów w USA. Jest to oczywiście oszacowanie górnej granicy, ponieważ jeśli woda zostanie przed spożyciem podgrzana, to część rozpuszczonego w niej radonu się ulotni, a zagotowanie jej spowoduje prawie całkowite pozbycie się radonu.

### **Dawka napromieniowania radonem z powietrza**

Oszacujmy teraz zewnętrzne napromieniowanie człowieka z powodu obecności radonu w powietrzu. Jest ono praktycznie zaniedbywalne, ponieważ większość cząstek alfa o energii kilku MeV nie przeleci przez ubranie. Rozważmy więc dla zabawy dawkę napromieniowania nagiego człowieka przebywającego przez cały rok w domu. Otaczająca go warstwa powietrza, z której może dolecieć do skóry cząstka alfa emitowana z radonu, wynosi około 4 cm. Zakładając  $2 \text{ m}^2$  powierzchni ciała człowieka daje to objętość  $2 \cdot 0,04 = 0,08 \text{ m}^3$ . Energia cząstek alfa maleje wraz z grubością warstwy powietrza, przez którą przeleciały, więc z grubsza średnia energia cząstek alfa dolatujących do człowieka będzie wynosić  $\sim 2,5 \text{ MeV}$ . Przyjmując, że aktywność radonu w mieszkaniu wynosi  $40 \text{ Bq/m}^3$  otrzymamy, że cząstki alfa z radonu deponują w ciągu roku w skórze nagiego człowieka energię równą:

$$2,5 \text{ MeV} \cdot 0,08 \text{ m}^3 \cdot 40 \text{ Bq/m}^3 \cdot 3600 \cdot 24 \cdot 365 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J/eV} = 4,0 \cdot 10^{-5} \text{ J}$$

Masa skóry człowieka ważącego 70 kg wynosi około 4 kg, współczynnik szkodliwości cząstek alfa wynosi 20, a współczynnik wagowy do obliczania dawki dla skóry jest równy 0,01. Dawka skuteczna otrzymywana w ciągu roku przez nagiego człowieka przebywającego cały rok w domu wynosiłaby zatem:

$$4 \cdot 10^{-5} \text{ J/4 kg} \cdot 20 \cdot 0,01 = 0,002 \text{ mSv.}$$

Jest to wartość zaniedbywalna w porównaniu z całkowitą dawką od promieniowania naturalnego.

### **Dawka napromieniowania radonem wdychanym wraz z powietrzem**

Obliczmy, jaki przyczynek daje promieniowanie radonu wdychanego razem z powietrzem. Zakładając, że podczas jednego oddechu wdychamy średnio jeden litr powietrza, i że wdychamy i wydychamy ze stałą szybkością możemy przyjąć, że średnio przez cały czas mamy w płucach około 0,5 litra powietrza ciągle wymienianego z otoczeniem.

Zakładając dodatkowo, że przebywamy przez całą dobę w domu, w powietrzu tym następowałoby średnio około 40 rozpadów radonu w  $\text{m}^3$  na sekundę, czyli  $4 \cdot 10^{-2}$  rozpadów na litr na sekundę. W ciągu roku w naszym układzie

oddechowym nastąpi zatem około:  $4 \cdot 10^{-2} \cdot 3600 \cdot 24 \cdot 365 \approx 13 \cdot 10^5$  rozpadów. W jednym rozpadzie  $^{222}\text{Rn}$  emitowana jest cząstka alfa o energii 5,5 MeV, a zatem dawka promieniowania w przeliczeniu na 1 kg (płuca człowieka ważą około 1 kg) będzie wynosić:

$$5,5 \cdot 10^6 \text{ eV} \cdot 13 \cdot 10^5 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J/eV/kg} = 1,1 \cdot 10^{-6} \text{ J/kg}$$

W przypadku promieniowania alfa współczynnik szkodliwości biologicznej wynosi 20, a współczynnik wagowy dawki dla tkanek płuc wynosi 0,12 stąd otrzymujemy dawkę skuteczną w wielkości  $20 \cdot 0,12 \cdot 1,1 \cdot 10^{-6} \text{ Sv} = 0,0026 \text{ mSv}$ .

Obliczona powyżej dawka skuteczna jest znacznie mniejsza niż rzeczywiste napromieniowanie powodowane przez radon. Rzeczywistą dawkę trudno jest oszacować, ponieważ trzeba uwzględnić także przyczynę od produktów rozpadu radonu, głównie od izotopów polonu  $^{218}\text{Po}$  i  $^{214}\text{Po}$ , które jako metale ciężkie osadzają się na śluzie układu oddechowego wraz z pyłami i aerozolami, podczas gdy radon razem z powietrzem jest wydychany na zewnątrz. W wyniku rozpadu promieniotwórczego polonu emitowane są cząstki alfa o łącznej energii kinetycznej  $\sim 14 \text{ MeV}$ , czyli na skutek rozpadu  $^{218}\text{Po}$  i  $^{214}\text{Po}$  w nabłonku dróg oddechowych deponowane jest kilkakrotnie więcej energii niż z jednego rozpadu samego radonu. Ale ze względu na absorpcję w śluzie dróg oddechowych aerozoli zawierających polon, ołów i bizmut, dawka od nich jest dużo większa niż od samego radonu. W Polsce, średnia dawka wywoływana promieniotwórczością radonu wynosi 1,3 mSv. Dawka ta jest większa w domach drewnianych, gdzie średnio stężenie radonu wynosi  $61 \text{ Bq/m}^3$ , a mniejsza w domach betonowych ze średnim stężeniem wynoszącym  $27 \text{ Bq/m}^3$ .

### **Ile cząstek alfa napromieniowuje nas w ciągu sekundy?**

Na koniec, z czystej ciekawości obliczmy jeszcze, ile cząstek alfa z rozpadów promieniotwórczych radonu i jego pochodnych grzęźnie w naszych komórkach w ciągu sekundy.

W pierwszym przybliżeniu, ze względu na znacznie mniejsze energie elektronów z rozpadów beta oraz 20 razy mniejszą szkodliwość biologiczną elektronów w stosunku do cząstek alfa możemy przyjąć, że główny wkład do dawki od radonu i jego pochodnych mają cząstki alfa. Zakładając, że średnio w Polsce większość dawki od radonu przyjmowana jest w układzie oddechowym, pamiętając, że czynnik szkodliwości biologicznej dla cząstek alfa wynosi 20 i czynnik wagowy dla płuc 0,12 otrzymujemy, że w komórkach układu oddechowego w ciągu roku jest deponowana energia 0,54 mJ, a to odpowiada pochłanianiu około 18 cząstek alfa na sekundę<sup>13</sup>.

<sup>13</sup> Dawka napromieniowania od radonu i jego pochodnych wynosi w Polsce średnio 1,3 mSv. Taka dawka skuteczna napromieniowania oznacza, że w człowieku cząstki alfa musiały zdeponować energię wynoszącą:  $1,3 \cdot 10^{-3} \text{ J/kg} \cdot 1 \text{ kg} / 20 / 0,12 = 0,54 \cdot 10^{-3} \text{ J} = 0,54 \text{ mJ}$ . Co odpowiada  $0,54 \text{ mJ} \cdot 0,625 \cdot 10^{19} \text{ eV} / \text{J} / 6 \text{ MeV} = 5,6 \cdot 10^8$  cząstkom alfa. Po podzieleniu przez liczbę sekund

**W CIĄGU JEDNEJ SEKUNDY:**

- Wewnątrz człowieka następuje około 8000 rozpadów promieniotwórczych jąder atomowych, głównie izotopów promieniotwórczych potasu  $^{40}\text{K}$ , węgla  $^{14}\text{C}$  oraz wodoru  $^3\text{H}$ .
- Przez człowieka przelatuje ponad 100 wysokoenergetycznych cząstek z promieniowania kosmicznego, w tym około 70 mionów, 50 kwantów gamma, kilkadziesiąt elektronów i antyelektronów oraz kilka protonów i neutronów.
- Przez człowieka przelatuje około 7000 kwantów gamma emitowanych z ziemi, głównie z rozpadów potasu  $^{40}\text{K}$  oraz ciągów rozpadów z szeregu promieniotwórczego uranu  $^{238}\text{U}$  oraz toru  $^{232}\text{Th}$ .
- Człowiek pochłania około 18 cząstek alfa na skutek promieniowania radonu i jego pochodnych.

Nieustannie naświetlani jesteśmy:

- promieniowaniem alfa – radon i polon (wdychany oraz z pożywienia),
- promieniowaniem beta – węgiel, potas, wodór (wdychany i z pożywienia),
- promieniowaniem gamma – głównie z potasu oraz pochodnych uranu i toru.

**Podziękowania**

Autorzy są wdzięczni za wsparcie finansowe Fundacji na rzecz Nauki Polskiej w ramach programu MPD oraz pani Teresie Gucwie-Ryś za pomoc w przygotowaniu rysunków i tabel.

**Literatura**

- [1] A. Hrynkiewicz, *Postępy Fizyki*, t. 44 (1993) 439.
- [2] *Biuletyn Informacyjny Polskiej Agencji Atomistyki*, Nr 2(84)/2011.
- [3] K. Nakamura et al., *Review of Particle Physics*, *J. Phys. G* 37 (2010) 075021, [http://pdg.lbl.gov/2011/reviews/contents\\_sports.html](http://pdg.lbl.gov/2011/reviews/contents_sports.html)
- [4] *Rocznik Państwowego Zakładu Higieny, Kwartalnik* 2011, t. 62, Nr 1.
- [5] J. Kastlander, *In situ measurements of radionuclide concentration in soil*, praca doktorska, Uniwersytet w Sztokholmie (2010).
- [6] S. Jowzaee et al., *Radon detection in mineral waters by liquid scintillation technique and geological investigation in the north of Iran*, Environmental Radioactivity 2010 conference, Rome, Advances in Liquid Scintillation Spectrometry.
- [7] P. Moskal, *Metoda datowania węglem  $^{14}\text{C}$ . Skąd wiemy, kiedy wymarły mamuty*, *Neutrino* Nr 16 (2012) 1.
- [8] P. Moskal, *Dawki promieniowania jądrowego*, *Foton* Nr 112 (2011) 9.

---

w roku (365 dni · 24 g/dzień · 3600 s/godzinę = 31 536 000) otrzymujemy około 18 cząstek alfa na sekundę. Dla uproszczenia przyjęliśmy, że cząstki alfa mają średnio energię 6 MeV.

- [9] P. Moskał, *Energia jądrowa w kuchni: konserwowanie żywności za pomocą promieniowania jądrowego*, Foton Nr 109 (2010) 8.
- [10] R. Szepeke, *Promieniowanie jest wśród nas*, Wydawnictwo Ministerstwa Obrony Narodowej, Warszawa 1989.
- [11] P. Jaracz, *Promieniowanie jonizujące w środowisku człowieka*, Wydawnictwo Uniwersytetu Warszawskiego, Warszawa 2001.
- [12] P. Półtorak, *Pomiary aktywności atmosferycznego radonu w Krakowie*, Praca magisterska, AGH, 2007.
- [13] B.R.S. Minty, *AGS Journal of Australian Geology & Geophysics* 17 (1997) 39.
- [14] E. Witkowska, *Zawartość radonu w powietrzu, jego pochodzenie, pomiary, obniżanie stężenia*, Praca zaliczeniowa, Politechnika Warszawska, 2003.
- [15] K. Pachocki, B. Gorzkowski, *Komunikaty z Sesji Naukowej „Radon w środowisku”*, Instytut Fizyki Jądrowej, Kraków 2000, <http://www.staff.amu.edu.pl/~pawula/BIOL.html>
- [16] A. Pawuła, *Komunikaty z Sesji Naukowej „Radon w środowisku”*, Instytut Fizyki Jądrowej, Kraków 2000, <http://www.staff.amu.edu.pl/~pawula/BIOL.html>
- [17] S. Mehdizadeh et al., *Natural radioactivity in building materials in Iran*, *Nukleonika* 56 (2011) 363.
- [18] M. Nowina-Konopka, *Indoor radon levels in north-western Poland*, *Radiation protection dosimetry* 62 (1995) 239.
- [19] M. Sohrabi, A.R. Solaymanian, *Indoor radon level measurements in some regions of Iran*, *International Journal of Radiation Applications and Instrumentation. Part D. Nuclear Tracks and Radiation Measurements* 15 (1988) 613.
- [20] *Average U.S. sources of radiation exposure*, NCRP report no 160/2006, <http://www.epa.gov/rpdweb00/understand/perspective.html>



## Różniczkowanie algorytmiczne

*Jerzy Karczmarczuk*

*Zakład Informatyki, Uniwersytet w Caen, Francja*

### 1. Wstęp

Rachunek różniczkowy i całkowy stanowią chleb powszedni każdego fizyka od najmłodszych lat i nie ma sensu robić tutaj „reklamy” analizy matematycznej. Nie każdy uczeń umie różniczkować, ale każdy student od pierwszego roku oblicza pochodne. Ten tekst jest przeznaczony dla czytelników, dla których rachunek różniczkowy nie stanowi żadnej zagadki, którzy znają podstawy teoretyczne, oraz mają sensowne doświadczenie praktyczne. Mimo banalności poniższych przykładów, celowe będzie podanie kilku kontekstów, w których student musi, i to dość wcześnie, użyć swojej znajomości rachunku różniczkowego.

1. Rachunek niepewności pomiarowych na pracowni. Pochodne służą do oszacowania niedokładności wartości, które są funkcjami zmiennych niezależnych (czyli wielkości mierzonych bezpośrednio).
2. Obliczenia zależności między natężeniem prądu a napięciem w obwodach zawierających oporniki, cewki i kondensatory.
3. Konstrukcja równań ruchu przez różniczkowanie funkcjonałów Lagrange’a czy Hamiltona. Cała mechanika klasyczna jest na tym oparta.
4. Obliczanie relacji między wielkościami termodynamicznymi. Cała ich klasa oparta jest na formach różniczkowych.
5. Rachunki perturbacyjne we wszystkich znanych działach fizyki.

Jest to oczywiście bardzo niekompletna lista. Zauważmy, że obliczanie pochodnych pełni dwie związane ze sobą, ale w dużej mierze rozłączne funkcje: czasami potrzebujemy jawną, funkcyjną postać pochodnej, aby ją analizować, przekształcać i wprowadzać do innych wyrażeń, nad którymi pracujemy, ale niezmiernie często potrzebujemy jedynie wartości numerycznych tych pochodnych. W rachunku błędów towarzyszącemu opracowaniu zadań laboratoryjnych, pochodne jako funkcje niczemu nie służą, potrzeba nam tylko pojedynczych wartości liczbowych.

Rachunek zaburzeń służy zwykle także do otrzymania konkretnych wyników liczbowych. W technologii pochodne są potrzebne, aby np. obliczyć stabilność pewnych wartości, np. sprawności jakiejś maszyny względem zmian jej parametrów. I tu jawna postać funkcji pochodnej jest mało interesująca, chcemy mieć tylko wykres wartości liczbowych w funkcji parametrów.

Ale czy da się obliczać pochodne bez przejścia przez formy symboliczne określające zależność jakiegoś wyrażenia od zmiennej różniczkowania? Oczywiście można wykonać przybliżone rachunki numeryczne, skorzystać z przybli-

żenia pochodnej przez iloraz różnicowy. Wiemy że pochodna bywa definiowana jako

$$y'(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{y(x+\delta) - y(x)}{\delta} \quad (1.1)$$

lub wzorami zbliżonymi. Przybliżenia wykorzystujące formuły takie jak powyżej ze skończoną wartością  $\delta$ , nie są zbyt dokładne i są numerycznie niestabilne, gdy  $\delta$  dąży do zera, błąd jest trudno kontrolować. Wyższe pochodne obarczone są jeszcze większym i źle zachowującym się błędem.

Wydaje się więc, że mamy do wyboru: albo użyć niedokładnych metod numerycznych, albo kosztownych czasowo a czasami niepotrzebnych metod analitycznych, ręcznie, lub z użyciem pakietów do obliczeń symbolicznych, jak Maple, Mathematica, czy Axiom. Okazuje się jednak, że nie jest to prawdą. Poniżej opiszemy jedną z technik (są i inne) tzw. różniczkowania algorytmicznego, albo automatycznego (nazwa historyczna), pozwalającą na różniczkowanie numeryczne, ale bez przybliżeń różnicowych. Pozwoli to w wielu wypadkach uniknąć używania języków do symbolicznych rachunków algebraicznych, które bywają po prostu nadużywane: stosuje się je do obliczania pochodnych, które mają być jedynie użyte w czysto numerycznych programach w Fortranie czy języku „C”, i ten dokonuje końcowych obliczeń. Takie automatycznie utworzone wyrażenia są często źle uproszczone, nieefektywne, gdyż wyrażenie czytelne dla człowieka niekoniecznie jest zoptymalizowane pod względem rachunkowym. Tak więc, takie dwuetapowe implementacje często marnują czas, zarówno człowieka jak i maszyny.

## 2. Różniczkowanie to jest algebra

Różniczkowanie wyrażeń zawierających funkcje elementarne i niektóre specjalne nie wymaga obliczania żadnych granic. Korzystamy z „przepisów kulinarnych”, np.  $(x^n)' = nx^{n-1}$ ,  $(\cos f(x))' = -\sin f(x) \cdot f'(x)$  itd. Są to lokalne, punktowe (dla jednej wartości) operacje na wyrażeniach. Na tym opiera się automatyzacja obliczeń pochodnych przez pakiety symboliczne. Pakiety te operują *formami*, a nie liczbami.

Ale ogólne zasady dotyczące różniczkowania mogą być ujęte bardziej *abstrakcyjnie*. Czytelnik nie powinien się zaniepokoić, okaże się zaraz, że ta abstrakcja jest czytelna dla studenta pierwszego roku i niezwykle praktyczna, umożliwiającą różniczkowanie numeryczne, ale **szybkie i dokładne** za pomocą standardowych języków programowania. Dokładność obliczeń pochodnych będzie taka sama jak dokładność maszynowa standardowych operacji arytmetycznych i obliczania wartości funkcji.

Nie będziemy operować (wyłącznie) funkcjami, ale *wyrażeniami* zależnymi – dla uproszczenia – od jednej zmiennej niezależnej, którą możemy nazywać  $x$ , ale jej nazwa nie ma żadnego znaczenia, będzie to *wartość o charakterze lic-*



*bowym* (ale, jak się okaże, będzie to obiekt nieco bardziej skomplikowany niż zwykła liczba). Wyrażenia zawierają tę zmienną, szereg stałych, np. 1, czy  $\pi$ , i wszystko jest połączone zwykłymi działaniami arytmetycznymi. Przypadek wielu zmiennych zostanie omówiony później.

Do tych działań dołączymy jedną specjalną operację, lokalną (punktową, określoną dla jednej konkretnej wartości  $x$ ), oznaczaną przez  $\partial$ , którą nazwiemy derywacją (a czasami po prostu różniczkowaniem...). W pewnym uproszczeniu wystarczy zażądać, aby ta operacja była liniowa, tj. dla dowolnych wyrażeń  $e, f$ :  $\partial(e + f) = \partial e + \partial f$ , oraz spełniała warunek Leibniza:  $\partial(e \cdot f) = \partial e \cdot f + e \cdot \partial f$ . To wszystko, łatwo sprawdzić, że jeśli  $e = f/g$ , a więc  $e \cdot g = f$ , czyli  $\partial e \cdot g + e \cdot \partial g = \partial f$ , dostaniemy  $\partial e = (\partial f - e \cdot \partial g)/g$ , co można zapisać jako  $\partial e = (g \cdot \partial f - f \cdot \partial g)/g^2$ , jest to znany wzór na różniczkowanie ilorazu.

Zauważmy, że w ogólności nie wiemy czym są nasze wyrażenia i *co to jest* derywacja, znamy tylko ich ogólne własności. To wystarczy, aby stwierdzić np., że  $\partial(e^2) = 2 \cdot e \cdot \partial e$ , i wyprowadzić zasady różniczkowania wielomianów i wyrażeń wymiernych bez żadnych operacji obliczania granic. Wszystko sprowadza się do działań algebraicznych.

Dziedzina „wyrażeń” może być dowolna, np. mogą to być liczby całkowite. Wtedy jednak derywacja jest operacją trywialną. Ponieważ  $e + 0 = e$ , widzimy, że  $\partial 0 = 0$ . Ale także, ponieważ  $e \cdot 1 = e$ , równość Leibniza wymaga, aby  $\partial e + e \cdot \partial 1 = \partial e$ , skąd wynika, że  $\partial 1 = 0$ . Stąd, poprzez dodawanie,  $\partial n = 0$  dla dowolnej liczby całkowitej  $n$ , a poprzez różniczkowanie ilorazu widzimy, że derywacja dowolnej liczby wymiernej także się zeruje. Ponieważ na komputerze mamy jedynie liczby wymierne, wygląda, że nasza abstrakcja na nic się nie przyda!

Tak jednak nie jest. Oczywistym przykładem są formy, struktury składniowe, które przedstawiają wyrażenia symboliczne. Programy komputerowe potrafią je różniczkować podobnie jak my to robimy na papierze. Wyrażenia te zawierają stałe liczbowe i referencje do operacji takich jak mnożenie, czy funkcji sinus. Operacje te nie są wykonywane, tylko identyfikowane. Wyrażenia zawierają również referencje do jakichś „zmiennych różniczkowania”, które mają sens *nazw*. Nie należy jednak sądzić, że to, o co chodzi, to obecność nazw czy symboli. Ogólnie rzecz biorąc, wyrażenia po prostu winny stanowić algebrę na tyle skomplikowaną, że różniczkowanie (czyli derywacja) staną się nietrywialne.

Dla nas wystarczy, abyśmy operowali parami liczb, oznaczanymi  $e = D(e_0, e_1)$ . ( $D$  jest tu jedynie etykietą odróżniającą te pary od innych). Pary liczb w rachunkach występują wszędzie. Liczby wymierne przedstawia się jako pary złożone z licznika i mianownika. Liczby zespolone są parami zawierającymi część rzeczywistą i urojoną. Rachunki geometryczne na płaszczyźnie operują wektorami dwuwymiarowymi. Nasze pary są jeszcze inne z punktu widzenia działań na nich.

Tutaj  $e_0$  i  $e_1$  będą dowolnymi liczbami (zwykłymi), które mogą stanowić elementy wyrażeń w naszych programach komputerowych. Język programowania, którym operujemy winien jednak umożliwić zdefiniowanie operacji arytmetycznych na takich parach, zwykle oznaczanych jako  $(a, b)$ . Większość współczesnych języków programowania na to pozwala. Naszym językiem wzorcowym będzie Python, dość popularny w środowiskach naukowych i w dydaktyce programowania.

Nasz uogólniony model obliczeń sprawdzi się do kilka prostych przepisów, o następującej intuicji:  $e_0$  to jest „wartość główna” wyrażenia liczbowego, wartość, która byłaby jedyną w klasycznym programie bez żadnego różniczkowania, zaś  $e_1$  jest to wartość jego pochodnej. Pochodnej względem czego? Względem pewnej szczególnej „zmienną różniczkowania”, która jest wyróżnionym obiektem w naszym programie komputerowym, ale nie jest żadnym symbolem! Oto więc nasze nowe „przepisy kuchenne” dla rozszerzonego programu numerycznego, dość oczywiste:

1. Wszystkie jawne stałe  $c$ , np. 2, czy  $\pi$ , reprezentowane są przez pary  $D(c, 0)$ . Pochodna stałej się zeruje i to wszystko.
2. Wyróżniona zmienna różniczkowania o wartości  $x$  ma postać  $D(x, 1)$ . Powtarzamy: jej wartość liczbową  $x$  może być dowolna i jest to po prostu wyrażenie, niemające więcej sensu „symbolicznego”, niż jakiegokolwiek inne. Ale jej pochodna jest równa zawsze jedności, to oczywiste.

3. Arytmetyka nowych wyrażeń jest zgodna z intuicją. Dla dodawania mamy:

$$D(a, b) + D(c, d) = D(a + c, b + d).$$

4. Mnożenie jest zgodne z regułą Leibniza:

$$D(a, b) \cdot D(c, d) = D(a \cdot c, a \cdot d + b \cdot c).$$

Jak widzieliśmy, to wystarczy, aby zdefiniować dzielenie. *Musi* ono spełniać równość  $D(a, b)/D(c, d) = D(a/c, (bc - ad)/c^2)$ .

### 3. Funkcje elementarne

Wyrażenia arytmetyczne w programach zawierają także logarytmy, funkcje trygonometryczne, itp. Ale jak obliczyć np.  $\sin D(a, b)$ , czy  $\sqrt{D(a, b)}$ ? Teoretycznie wszystko można sprowadzić w przybliżeniu do obliczeń wielomianowych i wymiernych, ale nam zależy na dokładności.

Uzyskamy duże uproszczenie rozumowania zauważając, że nasze pary są równoważne tzw. liczbom dualnym wymyślonym przez Clifforda. Zamiast  $D(a, b)$  zapisujemy je jako  $z = a + \epsilon b$ , gdzie  $\epsilon$  jest specjalną, algebraicznie niezależną jednostką, analogiczną do jednostki urojonej dla liczb zespolonych, tylko *nilpotentną*:  $\epsilon^2 = 0$ . (Fizycy czasami nazywają żargonowo składnik  $b$  „fermionowym”, ze względu na to, że kwadrat fermionowej funkcji falowej w mechanice kwantowej jest równy zeru).

Przy użyciu tej notacji (i tej interpretacji) odtworzenie reguł dodawania i mnożenia dla par różniczkowych jest natychmiastowe. Dla dzielenia wystarczy zauważyć, że  $(a + \epsilon b) \cdot (a - \epsilon b) = a^2$ , co pozwala uprościć mianownik:  $\frac{a+\epsilon b}{c+\epsilon d} = (a + \epsilon b) \cdot \frac{c-\epsilon d}{c^2} = \frac{a}{c} + \epsilon \frac{bc-ad}{c^2}$ . Wszyscy znający rozwijanie funkcji w szeregi potęgowe zauważą, że

$$e^{a+\epsilon b} = e^a \cdot e^{\epsilon b} = e^a \cdot (1 + \epsilon b), \quad (3.1)$$

bo wyższe potęgi  $\epsilon$  znikną. Jest to zgodne ze wzorem na różniczkowanie funkcji wykładniczej:  $(e^f)' = e^f \cdot f'$ . W naszej notacji będziemy mieli  $\exp D(a, b) = D(\exp a, b \cdot \exp a)$ . Wzory na pierwiastek i logarytm uzyskamy przez odwracanie kwadratu i funkcji wykładniczej, a funkcje trygonometryczne przez wzory na sumę i rozwinięcie ich w szereg z dokładnością do członów pierwszego stopnia:  $\sin \epsilon b = \epsilon b$ , i  $\cos \epsilon b = 1$ . Oto niekompletna lista kilku funkcji elementarnych, rozszerzonych do naszej algebry różniczkowej:

$$\begin{aligned} \exp D(a, b) &= D(\exp a, b \cdot \exp a), \\ \ln D(a, b) &= D(\ln a, b/a), \\ \sin D(a, b) &= D(\sin a, b \cdot \cos a), \\ \cos D(a, b) &= D(\cos a, -b \cdot \sin a), \\ \arctan D(a, b) &= D(\arctan a, \frac{b}{1+a^2}), \\ \sqrt{D(a, b)} &= D(\sqrt{a}, \frac{b}{2\sqrt{a}}). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Do tego możemy dopisać reguły obliczania innych funkcji cyklometrycznych, funkcji hiperbolicznych, wyrażeń  $D(a, b)^{D(c, d)}$ , a jeśli ktoś potrzebuje (i zna) funkcje specjalne potrzebne w fizyce, np. funkcje Bessela, także może je dołączyć do powyższych reguł. Jeśli napiszemy mały pakiet pozwalający na wykonywanie standardowych operacji arytmetycznych na złożonych strukturach danych – parach, nasz program będzie obliczał jednocześnie „wartości główne” oraz pochodne wyrażeń, które dostaniemy „automatycznie”, nie musimy ich specjalnie obliczać. Operator derywacji  $\partial$  jest po prostu selektorem drugiego składnika w strukturze  $D(a, b)$ .

#### 4. Konstrukcja programu do różniczkowania

Określenie „program do różniczkowania” jest więc cokolwiek nieściśle. Jedyne, co należy zaimplementować, to konstrukcja złożonych struktur danych – par, oraz wyposażenie tych par w operacje arytmetyczne przedstawione w poprzednim rozdziale. Program oblicza równocześnie wartości „główne” wyrażeń arytmetycznych i ich pochodne. Najwygodniej jest użyć w tym celu tzw. języka

obiekowego, pozwalającego na definiowanie dowolnych złożonych danych, o dowolnych własnościach.

Nie możemy zająć się tutaj nauczaniem programowania w Pythonie. Oto w olbrzymim skrócie struktura naszego dydaktycznego pakietu do różniczkowania automatycznego, który jest dostępny przez internet (<http://users.info.unicaen.fr/~karczma/Foton/Progs/autodif.py>):

`users.info.unicaen.fr/~karczma/Foton/Progs/autodif.py`

Nie ma on nadmiernych ambicji, i nie jest kompletny, ale jest w pełni użyteczny i krótki (poniżej 100 krótkich wierszy), a więc czytelny. W internecie Czytelnik znajdzie i inne programy, np. moduły popularnego pakietu Scientific Python. Polecamy również stronie <http://www.autodiff.org/>.

Nasz program definiuje *klasę* obiektów  $D(a, b)$ , gdzie  $a, b$  są dowolne, oraz działania arytmetyczne na nich, a także kilka funkcji elementarnych zgodnie z dyskusją powyżej. Dostęp do składników par jest następujący, jeśli  $z = D(x, y)$ ,  $x$  otrzymamy jako  $z.e$ , a  $y$ , jako  $z.d$ .

Pakiet dopuszcza arytmetykę „mieszaną”, np.  $3 + D(2.4, 3.9) * 7$  i wprowadza kilka użytecznych skrótów, np. stałe i zmienną: `def cst(x): return D(x, 0.0)` oraz `def var(x): return D(x, 1.0)`.

Definicje funkcji elementarnych są zgodne z (3.2), ale np. sinus hiperboliczny nie wymaga już żadnych specjalnych elementów, wystarczy napisać `def sinh(x): return (exp(x) - exp(-x)) / 2`. Ta definicja jest uniwersalna. Jeśli zażądamy wartości `sinh(1)`, otrzymamy ok. 1.1752012, a `sinh(var(1))` dostarczy `D(1.1752012, 1.5430806)`. Python jest językiem o typach dynamicznych, tj. procedury mogą wykonywać różne operacje w zależności od typów argumentów, a funkcję wykładniczą zdefiniowaliśmy tak, aby w razie gdy argument jest zwykłą liczbą, dostarczała także wartości liczbowej. Zwykle funkcje arytmetyczne, które należą do modułu standardowego `math`, są nadal zawsze dostępne, ale mają nazwy prefiksowane przez literę `m`, np. `m.exp(x)`.

Aby zrobić wykres funkcji i jej pochodnej możemy użyć jednego ze standardowych pakietów graficznych, np. bardzo dobrej biblioteki graficznej Matplotlib. Jeśli `t` zawiera np. listę argumentów `x`, np. od zera do 50, wykres funkcji `x*cos(x)` wraz z wykresem pochodnej, otrzymamy poprzez instrukcje programu poniżej. Jest on kompletny, tylko wymaga instalacji odpowiednich pakietów.

```
from pylab import *
from autodif import *
t=linspace(0,50,600)
y=[var(x)*cos(var(x)) for x in t]
y0=[v.e for v in y]; y1=[v.d for v in y]
plot(t,y0,t,y1); show()
```

## 5. Wyższe pochodne

Wypada zastanowić się jak rozszerzyć formalizm na wyższe pochodne, również bardzo użyteczne. Do obliczania krzywizn w geometrii potrzebujemy drugich pochodnych, rozwinięcia w szereg Taylora wymagają wyższych pochodnych. Są one też użyteczne w technikach rozwiązywania równań, w optymalizacji itp.

Niestety, nasza algebra wyrażeń arytmetycznych rozszerzona o derywację nie jest „zamknięta”, tj. operator  $\partial$  działający na wyrażenie  $D(a, b)$  nie dostarcza wyrażenia podobnego typu, tylko zwykłą liczbę. Nie da się tego dalej różniczkować. Tymczasem wyrażenia symboliczne po zróżniczkowaniu są nadal wyrażeniami symbolicznymi i różniczkowanie można wykonywać dowolnie wiele razy.

Jeśli potrzebujemy tylko drugich pochodnych, lub z rzadka trzecich, nasz formalizm (i nasz pakiet w Pythonie) jest wystarczający, choć niezbyt wygodny. Jeśli zdefiniujemy `p=var(var(1.0))`, wartość `p**3` wyniesie `D(D(1.0, 3.0), D(3.0, 6.0))`. Ostatni człon jest drugą pochodną. Pierwsza występuje podwójnie, w członach pośrednich. Funkcje elementarne także „działają” prawidłowo, np. `exp(p)` daje `D(D(2.718282, 2.718282), D(2.718282, 2.718282))`. Jest to możliwe gdyż nasze funkcje są rekursywne, wywołują same siebie dla składników par i korzystają z funkcji standardowych tylko gdy typ argumentu jest już czysto liczbowy. Widać jednak, że obliczanie w ten sposób np. dziesiątej pochodnej jest dość niewygodne, a wyniki są mało czytelne. Na skutek powielania członów pośrednich, wynik może zająć grubo ponad stronę tekstu.

Oczywiście można to nieco zracjonalizować. Czytelnik zechce sam popracować nad formalizmem, który rozszerza algebrę Clifforda, z wyrażeniami typu  $z = a + \epsilon b + \eta c$ , gdzie  $\eta = \epsilon^2$ , a  $\epsilon^3 = \eta^2 = \epsilon\eta = 0$ . Pozwoli to obliczać wszystko z dokładnością do drugiej pochodnej, pracując na wyrażeniach klasy  $D(a, b, c)$ . Ale ta algebra nadal nie jest zamknięta, otrzymanie wyższych pochodnych cierpi na ten sam problem co poprzednio.

Gdyby było możliwe operowanie listami o nieskończonej długości  $D(e_0, e_1, e_2, \dots, e_n, \dots)$ , teoretycznie problem byłby rozwiązany. Wyrażenie będące elementem algebry różniczkowej, na którym można dokonywać działań arytmetycznych, obliczać funkcje, a także różniczkować, należałoby do zamkniętej dziedziny. Stałe to wyrażenia  $D(x, 0, 0, \dots)$ , zmienna, to:  $D(x, 1, 0, 0, \dots)$ , a derywacja wyrażenia  $D(e_0, e_1, e_2, \dots, e_n, \dots)$  dostarcza  $D(e_1, e_2, \dots, e_n, \dots)$ . To jest również nieskończona lista, a więc wyrażenie tego samego typu co oryginalne, algebra się zamyka.

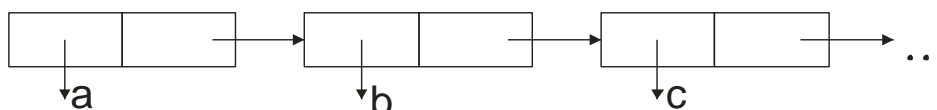
Czytelnik przyzwyczajony do „klasycznego” programowania złapie się tu za głowę... Po pierwsze, w skończonym komputerze nie da się umieścić nieskończonych list, trzeba je jakoś urwać. Po drugie, operacje matematyczne na tych urwanych, ale długich listach chyba będą dość skomplikowane, nieczytelne,

trudne do implementacji, i będą zawierały sporo elementów „administracyjnych” kodu, kontrolujących, aby urywanie wszystkich operacji odbywało się na tym samym poziomie. Wiadomo, że programy do rachunków perturbacyjnych są bardzo nieprzyjemne. Jednym słowem, może już lepiej użyć pakietów symbolicznych, mimo tego, że dziesiąta pochodna w miarę skomplikowanego wyrażenia może „rozsadzić” komputer wzorem, z którego nie ma pożytku, a potrzebna jest jedna liczba?...

Na szczęście nie jest tak. Technika, którą przedstawimy poniżej, nadaje się bardziej do języków tzw. „leniwych”, takich jak Haskell czy Clean, ale i w Pythonie można ją zaimplementować, choć jest to na tyle skomplikowane, że omówimy tylko ogólne zasady, które można zawrzeć na jednej–dwóch stronicach tekstu. Najistotniejsze jest to, że w strukturach danych w programie, w parach, listach itp., **elementami nie muszą być liczby, ale także funkcje**: możemy pobrać wartość pewnego elementu danych i *zastosować ją* do jakiejś wartości liczbowej (lub innej). (Nie jest to żadna nowość ani ciekawostka, tej techniki używa się od zarania komputerów, tylko przez wiele lat proste języki programowania ukrywały to przed początkującymi...). Oto sposób na generowanie i operowanie potencjalnie nieskończonymi ciągami danych.

### 5.1. Programowanie „leniwych list”

Ten rozdział jest poświęcony pewnym elementom programowania list lub ciągów. Jeśli nasz język programowania umożliwia operowanie parami  $(a,b)$  złożonymi z dowolnych elementów, wystarczy to do złożenia ciągów o dowolnej długości, ciąg  $[a,b,c,d]$  może zostać zrealizowany jako struktura  $(a,(b,(c,(d,NIC))))$ , gdzie NIC jest wyróżnionym obiektem – znacznikiem, który służy tylko do sygnalizacji, że lista się kończy. Geometrycznie można to sobie wyobrazić na rysunku poniżej.



Rys. 1. Listy złożone z par

Takie listy możemy tworzyć w prawie wszystkich używanych aktualnie językach programowania. Wyobraźmy sobie, że w naszym programie dysponujemy parami  $L(a,p)$ , gdzie  $a$  jest liczbą, ale  $p$  jest „demonem” – obiektem-procedurą, której wywołanie dostarczy dopiero jakiejś wartości. Jakiej? Sztuka polega na tym, że to wywołanie dostarczy innej pary,  $L(b,q)$ , gdzie  $b$  jest następnym elementem ciągu, a  $q$  – następnym demonem, którego wywołanie da nam kolejną wartość w ciągu, itd. Możemy to powtarzać dowolnie wiele razy, dziesięć, albo milion. To stanowi naszą „nieskończoną” listę danych. Nie cho-

dzi o to, że jest ona fizycznie nieskończona, jest to oczywiście nonsensem, ale o to, że w ogóle *nie musimy myśleć o tym, gdzie ona się kończy*. Jeśli potrzebujemy 3 elementy, generujemy 3, jeśli milion – milion i ani jednego więcej. Program optymalizuje wywołania, jeśli odwołaliśmy się do elementu  $p$  w pierwszej parze, zostanie on fizycznie zastąpiony przez parę  $L(b, q)$  i następnym razem już dostaniemy  $b$  bez potrzeby wywołania procedury  $p$ . Czytelnik zechce zrozumieć poniższą definicję „stałej” w programie:

```
def lcst(c):
    def zr(): return L(0.0, zr)
    return L(c, zr)
```

Ta funkcja, analogiczna do poprzednio wprowadzonej  $cst(c)$ , która dostarczała  $D(c, 0)$ , zawiera wewnętrzną funkcję  $zr()$  (bezparametrową), której wywołanie tworzy parę  $L(0, zr)$ . Odniesienie się do drugiego elementu tej pary, tj. do „ogona” listy, zamienia odnośnik do tej funkcji na następną parę o identycznej wartości. W ten sposób mamy listę o potencjalnie nieskończonej liczbie zer, które są generowane w miarę potrzeby.

Aby otrzymać „zmienną różniczkowania”  $x$ , tworzymy po prostu obiekt  $L(x, lcst(1.0))$ , co generuje listę  $[x, 1, 0, 0, \dots]$ .

## 5.2. „Leniwa”, rekurencyjna arytmetyka

Nasze przepisy dotyczące operacji arytmetycznych nie są o wiele dłuższe od poprzednich, zawierają jednak pewien element programowania, który typowo nie jest uczony na studiach fizyki, mianowicie *odroczonej rekursję*. Zauważmy, że w definicji funkcji  $zr$  odnosi się ona do samej siebie, ale się nie wywołuje. Wywołanie nastąpi dopiero na wyraźne życzenie, w dowolnym późniejszym momencie. W podobny sposób konstruujemy operatory arytmetyczne. Na przykład, aby dodać do siebie dwie leniwe pary  $p$  i  $q$ , o składnikach  $p.e$  i  $p.d$  itp., możemy zaprogramować

```
def add(p, q):
    def der():
        return add(p.d(), q.d())
    return L(p.e+q.e, der)
```

i to praktycznie wszystko. Nasz program, dostępny w tym samym folderze, co poprzedni i noszący nazwę `lautodif.py`, jest ustrukturywany nieco inaczej, operator dodawania nie nazywa się `add`, i jest tzw. metodą w klasie par reprezentujących ciągi. Wywołanie `p.d()` nie tylko oblicza odroczonej wartość „ogona” ciągu, ale zastępuje w składnik `d` wewnątrz `p` przez obliczoną wartość. Uwzględniliśmy możliwość arytmetyki mieszanej, kombinującej liczby (traktowane jako stałe) i pary. Są to jednak szczegóły techniczne, ważne tylko gdyby ktoś chciał zrozumieć i np. rozszerzyć nasz pakiet.

Mnożenie kryje w sobie nowy element rekurencyjny. W odróżnieniu od poprzedniego modelu, teraz pochodna to jest znowu para, której pierwszy element dostarcza liczby, o którą ostatecznie chodzi. Procedura mnożąca będzie miała zgrubsza strukturę poniższą:

```
def mul(p, q):
    e=p.e*q.e
    def fl():
        return mul(p,q.d()) + mul(q,p.d())
    return L(e, fl)
```

(Zastąpiliśmy `add` przez operator dodawania. W naszym pakiecie także mnożenie jest identyfikowane przez operator `*` wyglądający nieco inaczej niż powyższa procedura `mul`). Pozostawiamy Czytelnikowi skonstruowanie zbliżonej (prostszej) procedury, która leniwie mnoży ciąg przez stałą liczbową. Pominiemy odejmowanie i dzielenie, które definiuje się w sposób analogiczny i zakończmy rozdział przedstawieniem kilku funkcji elementarnych na ciągach.

Logarytm jest bardzo prosty, jeśli  $p = L(e, d)$ , otrzymamy algorytm  $\ln p = L(\ln e, \lambda: d()/p)$ , gdzie forma ( $\lambda$ : wyrażenie) jest bezparametrową funkcją obliczającą odroczone wyrażenie. W Pythonie można to zaprogramować jako anonimową funkcję-formę `lambda`, albo przy pomocy wewnętrznych funkcji `fl`, jak w przykładach powyżej.

Aby obliczyć funkcję wykładniczą, winniśmy przejść do następnej klasy w naszej szkółce programowania leniwego. Przypominamy, że  $(\exp e)' = e' \cdot \exp e$ . Można to zaprogramować bezpośrednio, tylko po co wielokrotnie w ciągu pochodnych wielokrotnie obliczać  $\exp e$ ? Podobnie jest z pierwiastkiem:  $(\sqrt{e})' = e'/2\sqrt{e}$ . Ale normalne (tj. nie leniwe, takie jak Haskell czy Clean) języki programowania nie dopuszczają konstrukcji typu równań  $\mathbf{p} = \mathbf{f}(\mathbf{p})$ , gdzie  $\mathbf{p}$  po obu stronach oznacza *to samo*. W Pythonie nasz program będzie miał następującą (z grubsza) strukturę:

```
def exp(p):
    r=LL(exp(p.e),None) # None jest dowolnym wypełniaczem.
    def fl():return p.d()*r
    r.d=fl # Wymiana wypełniacza na właściwą wartość
    return r
```

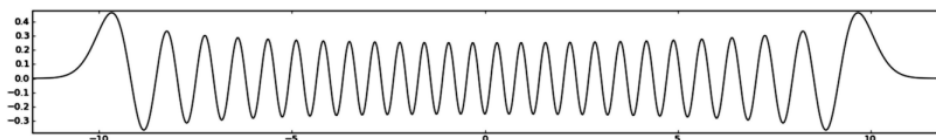
Czytelnik jest w ten sposób przygotowany do skonstruowania samemu procedur na pierwiastek, arctan, czy funkcje trygonometryczne, a także na opracowanie własnych, specjalnych procedur różniczkowania funkcji charakteryzujących się specyficznymi własnościami. Jest to dość ważne dla optymalizacji wyższych pochodnych.



### 5.3. Uwaga metodyczna

Naszym celem nie jest zaferowanie Czytelnikowi profesjonalnego, dobrze zoptymalizowanego pakietu do różniczkowania algorytmicznego, tylko przedstawienie ogólnych zasad. Nasz pakiet (w aktualnej wersji) zawiera nieoptymalności, które zresztą dotyczą również programów do różniczkowania symbolicznego: wykładniczy wzrost – „wybuch” – długości wyrażeń pośrednich przy obliczaniu wyższych pochodnych. Weźmy przykładowe wyrażenie  $\sin(x) * \exp(-x*x)$  i obliczmy ręcznie np. dziesiątą pochodną. Jest to dość okropne... Programy symboliczne generują bardzo długie formy strukturalne, ich upraszczanie trwa więc dość długo. U nas nie ma symboli, ale pamięć jest zajmowana przez pary zawierające „odroczone” obiekty funkcyjne, generowane dynamicznie podczas wykonywania programu. Ich przetwarzanie także trwa długo i może także zatakować dostępną pamięć, ale tak, czy inaczej, nasz program może być ekonomiczniejszy i pozwolić na obliczanie niektórych wyrażeń, z którymi np. Maple ma kłopoty. (Bywa jednak odwrotnie, o ile Maple jest w stanie dokonać daleko idących uproszczeń wyrażeń pośrednich). Nie jest to oczywiście krytyka pakietów symbolicznych, są one o wiele potężniejsze i służą innym celom. Zagadnienie optymalizacji takich rachunków jest ciągle przedmiotem prac naukowych i nie możemy mu poświęcić tutaj więcej miejsca.

Czytelnik może jednak spróbować sam dokonać pewnych optymalizacji, np. nie ma sensu generowanie ciągu zer, skoro wiadomo, że tak się jawnie kończą pewne ciągi; można to zastąpić przez jedno zero liczbowe i odpowiednio zmodyfikować program. Można też prosto zoptymalizować różniczkowanie wielomianów, traktowanie potęgi  $x^n$  inaczej niż iterowane mnożenie pozwoli (czasami) uniknąć „wybuchu” reguły Leibniza przy obliczaniu wyższych pochodnych. To jest naprawdę ważny problem! Przypuśćmy, że chcemy obliczyć w pętli dwudziestą pochodną funkcji  $e^{-x^2/2}$ : może to posłużyć do obliczenia funkcji Hermite’a, niezwykle ważnych w mechanice kwantowej. Dziesiąta pochodna wymaga ułamka sekundy. Dwunasta – około 0.16 (na moim komputerze). Piętnasta: 1.7 sekundy, a dwudziesta ponad 80 sekund! Tzw. eksponencyjność obliczeniowa może być zabójcza. Jednak nie należy mylić trudności algorytmicznych z niestarannym kodowaniem! Ten wykres, dla funkcji Hermite’a pięćdziesiątego rzędu:



Rys. 1. Funkcja Hermite’a pięćdziesiątego rzędu

został wygenerowany w czasie pół sekundy, tymczasem trywialne skorzystanie z naszych procedur różniczkujących zajęło by czas przekraczający czas życia Wszechświata (szacujemy, że ok.  $10^{21}$  sekund...) W przypadku procedur rekursywnych opłaca się czasami zapamiętywanie i powtórne wykorzystanie już raz obliczonych wartości. W naszych procedurach różniczkujących nie zawsze jest sensowne odrzucanie wszystkiego, często jest rozsądniejsze obliczenie od razu czego się da, byle by nie rozwijać niepotrzebnie wyrażeń, których *aktualnie* nie potrzebujemy. Leniwe programowanie jest pewną sztuką!

Zakończymy ten rozdział zabawnym rozwinięciem w szereg pewnej funkcji użytecznej w wyrafinowanej fizyce teoretycznej, ale rzadko spotykanej na co dzień, funkcji Lamberta  $W(x)$ , która nie ma prostego wzoru analitycznego, natomiast znana jest funkcja do niej odwrotna:  $x(W) = We^W$ . Jak rozwinąć funkcję  $W(x)$  w szereg potęgowy w zerze?

Pochodna funkcji odwrotnej wynosi  $dx/dW = e^W(1+W)$ , czyli pochodna funkcji Lamberta spełnia równość  $dW/dx = \exp(-W)/(1+W)$ . Ciąg pochodnych w zerze (znany analitycznie,  $n$ -ty człon jest równy  $(-n)^{n-1}$ ) otrzymamy następującym programem:

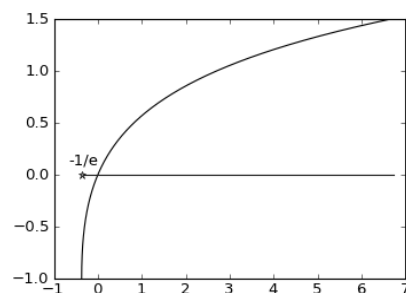
```
def lambert( ):
    w=L(0.0,None)
    def fl():return exp(-w)/(1+w)
    w.d=fl
    return w
```

Program błyskawicznie wygeneruje ciąg liczb {0.0, 1.0, -2.0, 9.0, -64.0, 625.0, -7776.0, 117649.0, ...}

## 6. Przypadek wielu zmiennych (różniczkowanie w wielu wymiarach)

Uogólnienie przedstawionego formalizmu na wiele zmiennych jest łatwe do wyobrażenia. W dalszym ciągu opiszemy jedynie problem obliczania pierwszych pochodnych (gradientów), aczkolwiek fizykowi przydaje się bardzo znajomość Hesjanów – macierzy drugich pochodnych:  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ , czy Laplasjanów –

sum:  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$ . Musimy dysponować wieloma „zmiennymi różniczkowania”, struktura  $D(x, 1)$  nie wystarczy. Zagadnienie staje się wielowymiarowe, wektorowe.



Rys. 3. Funkcja Lamberta

Ten rozdział będzie schematyczny, podamy tylko główne zasady postępowania, bez szczegółów, które niewiele wnoszą do samego formalizmu. Rozszerzenie programu `autodif.py` na wektory nosi nazwę `vautodif.py` i mieści się w tym samym folderze co reszta. Ten program nie jest autonomiczny, wymaga popularnej biblioteki `numpy`, ułatwiającej operacje na tablicach i która zastąpi również standardowy moduł `math`. Praktycznie każdy fizyk, czy inżynier programujący w Pythonie instaluje sobie `numpy`, a jeśli Python jest instalowany centralnie w jakiejś placówce dydaktycznej, administratorzy systemu winni to zrobić od razu.

Klasa struktur danych opisujących wyrażenia nazywa się `V`. W tej klasie definiujemy pewną stałą  $n$ , która opisuje wymiar przestrzeni, tj. liczbę zmiennych niezależnych w sensie różniczkowania, np. 3. Tak, jak poprzednio tworzymy pary  $V(a, b)$ , z tym, że  $b$  jest wektorem – tablicą,  $n$ -elementową. Stała ma postać  $V(c, [0,0,0 \dots])$ , a  $k$ -ta zmienna:  $V(x, [0, \dots, 0, 1, 0, \dots])$ , z jedynką w pozycji  $k$ -tej, dla  $k$  od zera do  $n - 1$ .

Tutaj forma  $[a, b, c]$  jest skrótem, kodowanie w Pythonie ma postać `array([a, b, c])`. Tablice w `numpy` są niezwykle wygodne w operowaniu. Jeśli  $A$  i  $B$  są tablicami, wystarczy napisać  $A * B$ , lub  $A + B$ , aby je pomnożyć lub dodać, element po elemencie. Wyrażenie  $c * A$  daje wynik mnożenia tablicy przez stałą liczbową, a np.  $\sin(A)$  dostarcza tablicy sinusów elementów.

Tak więc, o dziwo, dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie form  $V(a, b)$  ma *dokładnie tę samą postać* co w przypadku skalarnym! Funkcje arytmetyczne również zachowują się podobnie, np.  $\sin V(e, [a, b, c]) = V(\sin e, \cos e \cdot [a, b, c])$ . Tak więc, dostaliśmy pakiet wielowymiarowy praktycznie za darmo. Rozszerzenie go na wyższe pochodne także nie jest trudne, ale żmudne, zostawimy to już ambitniejszym Czytelnikom.

## 7. Wnioski końcowe

Przedstawione modele różniczkowania automatycznego nie są jedyne. Nie omówiliśmy bardzo frapującej techniki tzw. różniczkowania odwrotnego, gdzie fragmenty (zmodyfikowanego) programu numerycznego wykonuje się „do tyłu w czasie”, od końcowych wyników, do zmiennych niezależnych. Nie poświęciliśmy uwagi technikom „półsymbolicznym”, w których specjalny preprocesor modyfikuje tekst źródłowy oryginalnego programu numerycznego, tak, aby program liczył też dodatkowo pochodne; jest to w pewnym sensie równoważne użyciu pakietu symbolicznego, tylko podczas kompilacji programów w Fortranie itp.

Sytuacja, w jakiej znajduje się dziedzina różniczkowania algorytmicznego, jest zastanawiająca. Dysponujemy techniką użyteczną, efektywną i łatwą, opartą i rozwijaną od wielu lat, a tymczasem fizyków jej się albo w ogóle nie uczy, albo bardzo rzadko i powierzchownie. Są dziedziny, w których różnicz-

kowanie automatyczne zdobyło sobie już trwałe miejsce, np. w analizie efektywności i stabilności skomplikowanych obiektów przemysłowych (np. reaktorów jądrowych), a także w meteorologii i gdzieś tam w astronomii obliczeniowej, ale w typowej fizyce – wedle danych, którymi dysponujemy – jeszcze na ogół nie.

Jest to jedynie kwestia tradycji. Tzw. „skomputeryzowani fizycy” są raczej konserwatystami, programy w fizyce są dość proste, usiłuje się je pisać tak, aby maksymalnie wykorzystać istniejące biblioteki oprogramowania, a te, np. w Fortranie, nie są dostosowane do specyficznych, nietypowych struktur danych algebraicznych. Istnieją oczywiście odpowiednie programy w Fortranie (ADIFOR, TAPENADE, czy OpenAD/F) do różniczkowania automatycznego, ale wymagają one dobrego ich opanowania i nadają się bardziej do skomplikowanych obliczeń profesjonalnych, niż do dydaktyki.

Ponadto wśród fizyków pęd do obliczeń jak najszybszych jest wyraźny i dość zrozumiały, a użycie wyrafinowanych metod strukturalnych na ogół spowalnia obliczenia. Pewnym paradoksem w świecie fizyki i innych środowisk prowadzących intensywne obliczenia jest poważniejsze skoncentrowanie uwagi na szybkości samych programów, niż na stracie ludzkiego czasu potrzebnego do kodowania, optymalizacji, parametryzacji i zwłaszcza poprawiania programów. Miejmy nadzieję, że to się jednak zmienia, gdyż zubaża dydaktykę w tej dziedzinie...

Programy, które oferujemy Czytelnikom nie mają charakteru pakietów użytkowych, profesjonalnych (choć zostały one nieco zoptymalizowane w porównaniu do dyskusji w tekście). Mogą jednak posłużyć do dalszych eksperymentów w tej dziedzinie.

Zainteresowanych prosimy o kontakt ([jerzy.karczmarczuk@unicaen.fr](mailto:jerzy.karczmarczuk@unicaen.fr)).



## Dyfrakcja światła na otworze kołowym, czyli po co fizykowi całkowanie numeryczne?

Jerzy Ginter  
Uniwersytet Warszawski

### Postawienie problemu

Światło ma naturę falową, ulega więc dyfrakcji. Zajmiemy się tu jednym z takich przykładów: dyfrakcji na otworze kołowym. Jest ona łatwa do zaobserwowania. Natomiast jej opis teoretyczny jest dość złożony. Jeżeli chcemy ją opisać analitycznie, musimy użyć funkcji specjalnych – tak zwanych funkcji Bessela. Stanowiąc to może trudność nie tylko dla uczniów szkolnych, ale i dla studentów niższych lat studiów. Można jednak uzyskać bardzo dobrą dokładność opisu dyfrakcji na otworze kołowym, jeżeli zastosować prostą metodę całkowania numerycznego.

### Obraz dyfrakcyjny

Przypuśćmy, że rzuciliśmy równoległą wiązkę światła monochromatycznego na mały otworek kołowy o promieniu  $R$ , prostopadle do płaszczyzny przesłony, w której otworek został wykonany. Światło, które przez ten otwór przeszło, wytwarza obraz dyfrakcyjny na ekranie, który jest do przesłony równoległy i znajduje się w odległości  $L$  od otworka, znacznie większej od promienia otworka  $R$  ( $L \gg R$ ).

Są dwa proste sposoby obejrzenia takiego obrazu dyfrakcyjnego.

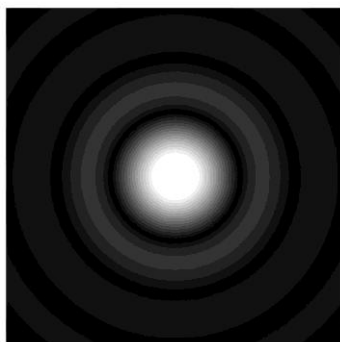
### Doświadczenie 1

Do doświadczenia potrzebne są: wskaźnik laserowy, kawałek folii aluminiowej (lepiej jest gruba, „od kwiatów”), igła.

1. Ostrzem igły wykonujemy jak najmniejszy otworek w folii aluminiowej. Powinien on mieć średnicę około 0,1 milimetra.
2. Kierujemy na otwór wiązkę światła wskaźnika laserowego.
3. Obraz oglądamy na ekranie oddalonym o kilka metrów (na jasnej ścianie). Doświadczenie trzeba przeprowadzić w zaciemnionym pomieszczeniu. Najlepiej wykonywać je w dwie osoby: jedna będzie trzymać laser i folię, a druga oglądać obraz z bliska.

Uzyskany w takim doświadczeniu obraz dyfrakcyjny przedstawia rys. 1. W środku znajduje się jasna, okrągła plamka. W omówionych warunkach ma ona promień rzędu kilku milimetrów. Otoczona jest układem płynnie przecho-

dzących w siebie na przemian ciemnych i jasnych pierścieni. Natężenie jasnych pierścieni dość szybko maleje ze wzrostem odległości od środka obrazu.



Rys. 1. Dyfrakcja światła na otworze kołowym

### Doświadczenie 2

Można też postąpić inaczej: popatrzeć po prostu przez otworek w folii na świecąca żaróweczkę od latarki kieszonkowej, znajdującą się w odległości około 3 m. Jeżeli używamy latarki zwykle widoczne są także boczne odbłaski. Można je przesłonić, używając kawałka czarnego papieru z otworkiem, przez który powinno być widoczne tylko samo włókno.

Doświadczenie takie jest mniej eleganckie, bo używa się w nim światła białego, a nie monochromatycznego. Ale prostsze do wykonania!

### Problem

Otwór kołowy ma symetrię obrotową wokół swojego środka. Z doświadczenia wiemy, że taką samą symetrię ma powstający obraz dyfrakcyjny. Można jednak zapytać, jak natężenie światła zależy od kąta odchylenia od pierwotnego kierunku wiązki. Dla jakich kątów natężenie światła znika? Jaki jest promień jasnej plamki środkowej?

### Idea opisu

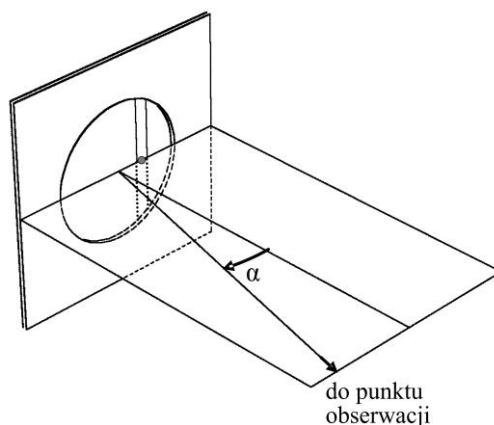
Nasz problem można opisać w przybliżeniu skalarnym, posługując się rozumowaniem, opartym na **zasadzie Huygensa**. Przypomnijmy: jeżeli światło pada na otworek o średnicy mniejszej od długości fali, za otworkiem pojawia się wybiegająca z niego fala kulista. Duży otwór – o rozmiarze większym od długości fali – traktuje się jako wiele stykających się z sobą małych otworków i mówi: każdy z tych fikcyjnych małych otworków staje się źródłem „swojej” fali kulistej. Fala wypadkowa jest wynikiem interferencji tych wielu fal składowych.

Warto podać od razu oszacowanie liczbowe. Jeżeli promień otworu jest równy  $R = 0,1\text{mm}$ , a w doświadczeniu używamy lasera czerwonego o długości fali  $\lambda = 0,7\ \mu\text{m} = 0,7 \cdot 10^{-3}\ \text{mm}$ , stosunek  $R/\lambda \approx 140$ , a  $\lambda/R \approx 7 \cdot 10^{-3}$  (ten stosunek będzie nam potrzebny w dalszym ciągu rozważań).

Jeżeli na otwór w płaskiej przesłonie pada prostopadle fala płaska, dociera ona do wszystkich fikcyjnych otworków w tym samym czasie, a więc wszystkie otworki wysyłają fale kuliste w zgodnych fazach. Fazy, z jakimi fale docierają do punktu obserwacji są jednak różne, bo fale biegną po drogach o różnych długościach.

W naszych warunkach odległość od otworu do punktu obserwacji (bliska  $L$ , rzędu kilku metrów) jest duża w stosunku do promienia otworu  $R$  (rzędu ułamka milimetra). Możliwe są wtedy jeszcze dwa uproszczenia:

1. Odległości łączące poszczególne fikcyjne otworki z punktem obserwacji są na ogół różne. Amplituda fali kulistej maleje z odległością. Jeżeli jednak  $L \gg R$  te różnice amplitud są bardzo małe i można je pominąć.
2. Rozważmy płaszczyznę, wyznaczoną przez oś symetrii otworu i linię łączącą środek otworu z punktem obserwacji, na rys. 2 jest to płaszczyzna pozioma. Wyodrębnijmy myślowo pasek na płaszczyźnie otworu, prostopadły do określonej wyżej płaszczyzny (a więc pionowy). Jeżeli  $L \gg R$ , odległości do punktu obserwacji od fikcyjnych otworków należących tego paska są niemal identyczne. Jednakowe są więc i fazy fal docierających od tych otworków do punktu obserwacji. Zatem cały pasek można zastąpić jednym fikcyjnym źródłem punktowym, leżącym na wspomnianej płaszczyźnie (szara kropka na rysunku). Trzeba przy tym przyjąć, że amplituda fali wysyłanej z tego fikcyjnego źródła jest proporcjonalna do długości paska.

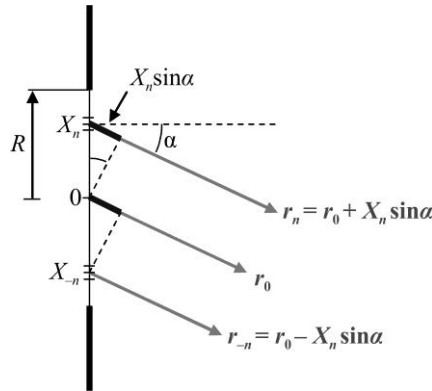


Rys. 2. Jeżeli  $L \gg R$ , fale z całego narysowanego paska docierają do obserwatora w zgodnych fazach

### Obliczenia

Wybermy środek układu współrzędnych w środku otworu kołowego. Podzielmy cały otwór na  $2N$  pasek o równej szerokości. Rozpatrzmy fikcyjne źródło, reprezentujące  $n$ -ty pasek, którego środek znajduje się w położeniu  $X_n$  (rys. 3, na płaszczyznę poziomą z rys. 2 patrzymy od góry). Niech  $r_0$  oznacza odległość od środka otworu kołowego do punktu obserwacji, a  $r_n$  odległość od  $n$ -tego źródła do punktu obserwacji. Jeżeli  $L \gg D$ , linie łączące te punkty z punktem obserwacji są niemal równoległe. Z górnego narysowanego trójkąta wynika, że

$$r_n = r_0 + X_n \sin \alpha. \quad (1)$$



Rys. 3. Różnice dróg dla różnych fikcyjnych źródeł, omówionych w tekście

Wyrażenie na falę sinusoidalną, docierającą do punktu obserwacji, można więc napisać w postaci:

$$\begin{aligned} U_n &= A_n \cos \left[ 2\pi \left( \frac{r_n}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) \right] = A_n \cos \left[ 2\pi \left( \frac{r_0}{\lambda} + \frac{X_n \sin \alpha}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) \right] = \\ &= A_n \cos \left[ 2\pi \left( \frac{r_0}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) + \frac{2\pi X_n \sin \alpha}{\lambda} \right]. \end{aligned} \quad (2)$$

Rozpatrzmy teraz pasek symetryczny w stosunku do omówionego wyżej. Oznaczmy go symbolem  $-n$ . Dla tego paska  $X_{-n} = -X_n$ , a więc (rys. 3):

$$r_{-n} = r_0 + X_{-n} \sin \alpha; = r_0 - X_n \sin \alpha; \quad (3)$$

a stąd

$$U_{-n} = A_{-n} \cos 2\pi \left( \frac{r_{-n}}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) = A_{-n} \cos \left[ 2\pi \left( \frac{r_0}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) - \frac{2\pi X_n \sin \alpha}{\lambda} \right]. \quad (4)$$



Otwór kołowy jest symetryczny względem środka. Długość paska  $-n$  jest równa długości paska  $n$ . Wynika stąd, że  $A_{-n} = A_n$ .

Interferencja fal opisanych wzorami 2 i 4 daje wynik (stosujemy wzór na sumę cosinusów):

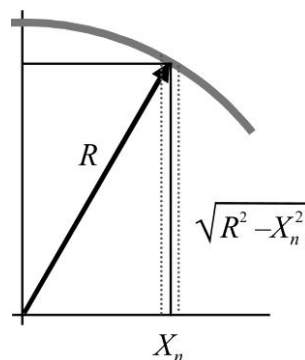
$$\begin{aligned} U_n + U_{-n} &= A_n \cos \left[ 2\pi \left( \frac{r_0}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) + \frac{2\pi X_n \sin \alpha}{\lambda} \right] + \\ &+ A_n \cos \left[ 2\pi \left( \frac{r_0}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) - \frac{2\pi X_n \sin \alpha}{\lambda} \right] = \\ &= 2A_n \cos \left[ 2\pi \left( \frac{r_0}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) \right] \cdot \cos \left( \frac{2\pi X_n \sin \alpha}{\lambda} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Wzór ten jest słuszny dla dowolnej pary pasków  $n$  i  $-n$ .

Całkowity wynik interferencji jest sumą  $N$  takich składników. Widać, że przy takim sumowaniu wspólny czynnik  $2 \cos \left[ 2\pi \left( \frac{r_0}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) \right]$  można będzie wynieść przed nawias. Pozostanie do obliczenia suma  $N$  składników o postaci  $A_n \cos \left( \frac{2\pi X_n \sin \alpha}{\lambda} \right)$ .

Zauważmy jeszcze, że połowa średniej długości  $n$ -tego paska dla otworu kołowego jest – z twierdzenia Pitagorasa – równa  $\sqrt{R^2 - X_n^2}$  (rys. 4). Wynika stąd:

$$A_n \cos \left( \frac{2\pi X_n \sin \alpha}{\lambda} \right) \propto \sqrt{R^2 - X_n^2} \cos \left( \frac{2\pi X_n \sin \alpha}{\lambda} \right). \quad (6)$$



Rys. 41. Obliczanie długości paska dla otworu kołowego

Przekształćmy jeszcze wyrażenie 6, wprowadzając nową bezwymiarową zmienną  $x_n = \frac{X_n}{R}$ . Zachodzi oczywiście  $X_n = Rx_n$ , co podstawimy do wzoru:

$$\begin{aligned} \sqrt{R^2 - X_n^2} \cos\left(\frac{2\pi X_n \sin \alpha}{\lambda}\right) &= R\sqrt{1 - x_n^2} \cos\left[2\pi\left(\frac{2\pi R x_n \sin \alpha}{\lambda}\right)\right] \propto \\ &\propto \sqrt{1 - x_n^2} \cos\left(\frac{2\pi R \sin \alpha}{\lambda} x_n\right) = \sqrt{1 - x_n^2} \cos(Qx_n). \end{aligned} \quad (7)$$

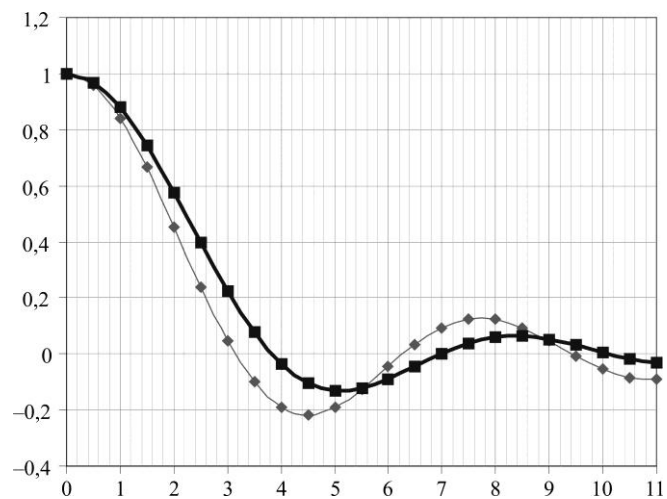
Dla skrótu oznaczyliśmy  $Q = \frac{2\pi R \sin \alpha}{\lambda}$ . Wspomnieliśmy już wyżej, że w typowym doświadczeniu interesują nas małe kąty  $\alpha$ . Wtedy  $\sin \alpha \approx \alpha$ , czyli  $Q$  jest po prostu do  $\alpha$  proporcjonalne.

### Całkowanie metodą prostokątów

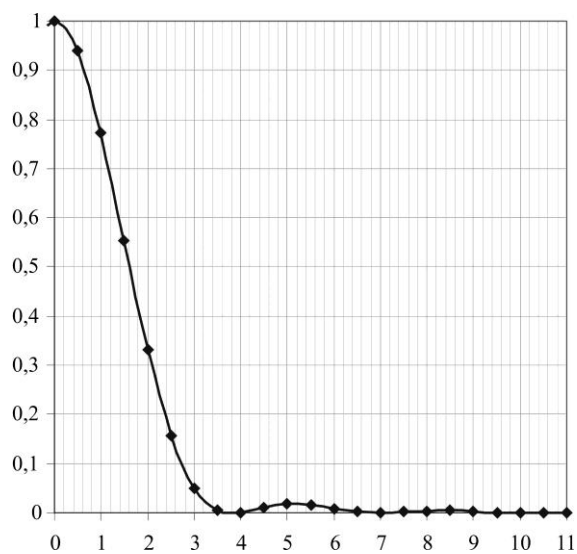
Nasze zadanie sprowadza się do znalezienia – przy określonym  $Q$  – wartości sumy  $N$  członów o postaci  $\sqrt{1 - x_n^2} \cos(Qx_n)$ . Możemy takie sumy obliczyć numerycznie, stosując tak zwaną metodę prostokątów. Polega ona na przyjmowaniu w liczeniu sumy wartości funkcji ze środka obszaru. Autor posłużył się w tym celu programem *Excel*. Rachunki zostały przeprowadzone dla  $N = 20$ , czyli szerokości pasków równej 0,05. Obliczenia znajdują się w pliku [Otwórkolowy](#) (w wersji elektronicznej *Fotonu*).

Omówmy uzyskane wyniki.

1. Obliczana przez nas suma jest proporcjonalna do amplitudy fali świetlnej w punkcie obserwacji. Zależność tej wielkości od  $Q$  przedstawia rys. 5 (gruba linia). Wyniki zostały znormalizowane do jedności dla  $Q = 0$ .
2. Rysunek 6 przedstawia zależność od  $Q$  natężenia światła, które jest proporcjonalne do kwadratu amplitudy fali.



Rys. 5. Zależność amplitudy fali świetlnej od parametru  $Q$ . Gruba linia: otwór kołowy. Cienka linia: otwór prostokątny



Rys. 6. Zależność natężenia światła od parametru  $Q$  dla otworu kołowego

Widać, że pierwsze zero pojawia się dla  $Q \approx 3,83$ . Oznacza to warunek na kąt  $\alpha$ :

$$\frac{2\pi R \sin \alpha_1}{\lambda} = 3,83 \quad (8).$$

Kąt pierwszego zera oznaczyliśmy  $\alpha_1$ . Przekształcając wzór 8 dostajemy:

$$\sin \alpha_1 \approx \alpha_1 \approx \frac{3,83}{2\pi} \frac{\lambda}{R} \approx 0,61 \frac{\lambda}{R} = 1,22 \frac{\lambda}{D} \quad (9)$$

w ostatnim członie  $D$  oznacza średnicę otworu ( $D = 2R$ ).

Wzór ten określa rozmiar jasnej plamki centralnej obrazu z rys. 1.

Wielkość jej plamki jest w przybliżeniu wprost proporcjonalna do długości fali  $\lambda$ , a odwrotnie proporcjonalna do promienia otworu  $R$ .

Aby oszacować kąt  $\alpha_1$ , wykorzystamy fakt, że dla otworu o średnicy 0,1 mm i długości fali  $\lambda = 0,7 \mu\text{m}$  stosunek  $\frac{\lambda}{R} \approx 7 \cdot 10^{-3}$  (co obliczyliśmy wyżej). Dostajemy:

$$\alpha_1 \approx 0,61 \frac{\lambda}{R} = 0,61 \cdot 7 \cdot 10^{-3} \approx 4,3 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \approx 0,25^\circ \approx 15' \quad (10)$$

Promień plamki centralnej obrazu dyfrakcyjnego na ekranie odległym o  $L$  od otworu jest równy w przybliżeniu  $L\alpha_1$  (dla kąta wyrażonego w radianach). Dla wartości  $L = 1 \text{ m} = 1000 \text{ mm}$  jest on równy 4,3 mm.

### O analitycznym rozwiązaniu naszego problemu

Zależność natężenia światła od kąta  $\alpha$  dość prosto opisaliśmy numerycznie. Opis analityczny sprowadza się do obliczenia całki (por. wzór 7):

$$F(Q) = \int_0^1 dx \sqrt{1-x^2} \cos(Qx). \quad (11)$$

Całka ta nie wyraża się przez funkcje elementarne. Analityczny opis dyfrakcji na otworze kołowym wymaga znajomości funkcji Bessela – i nie będziemy go tu omawiać. Różnice rezultatów ściślego opisu analitycznego i naszych wyników obliczeń numerycznych są na poziomie 0,001.

### Otwór kołowy a otwór prostokątny

Warto zwrócić uwagę, że pierwsze zero dla otworu kołowego o średnicy równej  $D$  jest nieco dalej od środka, niż dla otworu prostokątnego o szerokości równej  $D$ . Dla tego drugiego warunek na znikanie natężenia światła ma postać:

$$D \sin \alpha_1 = \lambda. \quad (12)$$

Z (12) wynika warunek

$$\sin \alpha_1 \approx \alpha_1 \approx \frac{\lambda}{D}. \quad (13)$$

(porównaj z wzorem 9).

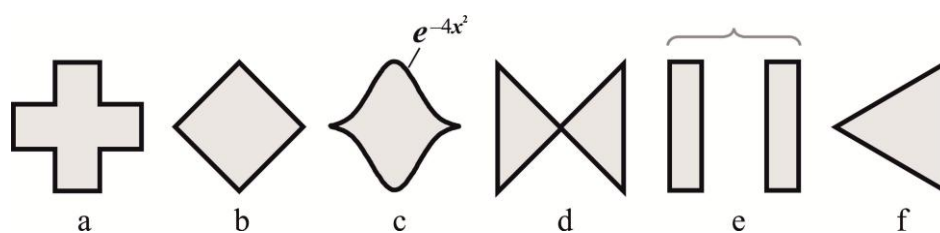
### Inne otwory

Program znajdujący się w pliku *Otwory* łatwo zmodyfikować.

1. Na przykład – jeżeli chcemy opisać dyfrakcję na otworze prostokątnym, należy w obliczeniach numerycznych sumować po paskach równej długości, czyli zastąpić funkcję  $\sqrt{1-x^2}$  jedynką.
2. Można też sprawdzić, jak wygląda obraz dyfrakcyjny, jeżeli funkcja określająca długość pasków osiąga zero „płynie” a nie „skokowo”. W pliku *Otwory* jest to obliczone dla funkcji  $\frac{1}{2}[1-\cos(\pi x)]$ .

### Zadanie domowe

Proponuję czytelnikowi samodzielne zbadanie, jak zależy od  $Q$  amplituda fali rozproszonej i natężenie światła dla otworów przedstawionych na rysunkach 7a–e. W szczególności polecam punkt c, kiedy szerokość otworu określona jest funkcją  $e^{-4x^2}$ .



Rys. 7.

### Wyzwanie

W przeprowadzonych w tym artykule rozważaniach ograniczaliśmy się do otworów symetrycznych. To założenie istotnie upraszczało prowadzone obliczenia. Proponuję, aby czytelnik uchylił to założenie i przeprowadził rozumowanie bardziej ogólne. Jako konkretny przykład można byłoby rozważyć dyfrakcję na otworze trójkątnym z rysunku 7f.



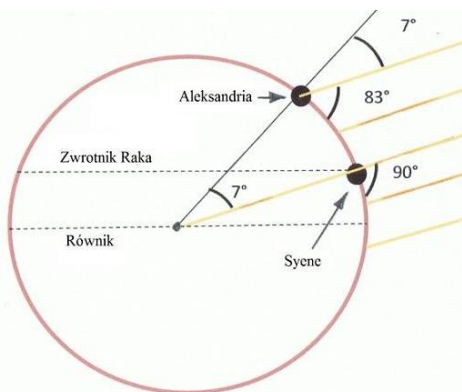
## Kiedy Ziemia przestała być płaska? Wizje Układu Słonecznego do czasów Keplera

Michał Bizoń  
Instytut Filozofii UJ

Wbrew temu, co może sugerować nieco prowokacyjny tytuł, ludzie zdali sobie sprawę z kulistości Ziemi nie tylko na długo przed Keplerem, ale już pierwsi filozofowie greccy uznawali tę hipotezę za naturalną. W V wieku p.n.e. Parmenides uważał, że tak Ziemia, jak i cały Wszechświat jest kulą. Podobną teorię wyznawali Pitagorejczycy, w interesujący sposób ją modyfikując i rozwijając. Kosmologia pitagorejska postulowała bowiem nie tylko kulistość Ziemi i planet, ale również porządek ciał niebieskich, który można uznać za antycypację układu heliocentrycznego. W środku świata – będącym również środkiem Układu Słonecznego – znajdował się Ogień, wokół którego krążyły Słońce i planety. Ogień ten nie był jednak widoczny, ponieważ zasłaniała go Antyziemia (*Antichthon*), znajdująca się stale między nim a Ziemią właściwą. Słońce krążyło wokół Ziemi, odbijając światło pochodzące od Ognia. Teoria ta jest charakterystycznym przykładem spekulatywnego rozumowania Pitagorejczyków, jednak biorąc pod uwagę brak astronomicznych przyrządów obserwacyjnych jej intuicja jest interesująca.

Pierwszy znany doświadczalny argument dotyczący kształtu Ziemi podał Arystoteles, jeden z najwybitniejszych myślicieli i uczonych, jakich wydała nasza cywilizacja. Choć starożytna filozofia grecka lubowała się w spekulatywnym racjonalizmie stroniącym od empirii, rozumowanie Stagiryty opierało się na obserwacji. Wiedział on, że zaćmienia Księżyca są spowodowane jego wejściem w obszar cienia Ziemi. Z okrągłego kształtu cienia Ziemi na Księżycu wnioskował, że Ziemia musi być kształtu kuli. Gdyby bowiem była płaskim dyskiem, kształt cienia rzucanego na Księżyc byłby eliptyczny.

Olbrzymi wkład w zrozumienie budowy Układu Słonecznego wniósł aleksandryjski uczyony Eratostenes z Cyreny, żyjący w latach 276–194 p.n.e. Obliczył on obwód Ziemi szacując go na 252 000 stadionów. Niestety nie wiemy, z jakiego wzorca stadionu korzystał – attyckiego czy egipskiego. Zależnie od tego błąd jego obliczenia wynosi odpowiednio 16,3% lub 1%. Metoda Eratostenesa opierała się na prostej trygonometrii. Znajac kąt padania promieni słonecz-



nych w południe w Aleksandrii oraz odległość do miasta Syene, położonego na Zwrotniku Raka bezpośrednio na południe, gdzie w południe Słońce znajduje się dokładnie w zenicie, obliczył on promień Ziemi. Zakładał przy tym, że promienie słoneczne dochodzące do Ziemi są wszędzie równoległe, a więc że jej odległość od Słońca jest znacznie większa niż jej promień. Oczywiście jest też, że przyjmował już za daną kulistość Ziemi. Prócz kosmologii Eratostenes zajmował się kartografią, którą rozwinął za pomocą wcześniejszych obliczeń astronomicznych oraz bogatej wiedzy żeglarzy helleńskich, przywożących do Aleksandrii opowieści z odległych podróży. Stworzył on mapę świata będącą znacznym udoskonaleniem tej opracowanej przez wybitnego historyka i obieżyswiata, Herodota z Halikarnasu.

Pierwszy heliocentryczny model Układu Słonecznego wywnioskowany z wyników obserwacyjnych, a nie ze spekulacji opierającej się na przesłankach teologicznych czy estetycznych – jak robili to Pitagorejczycy czy eleaci – podał Arystarch z Samos, astronom helleński o pokolenie starszy od Eratostenesa. Korzystając z dzieł Filolaosa z Krotonu, wzbogacił on teoretyczne rozważania pitagorejczyków argumentacją empiryczną.

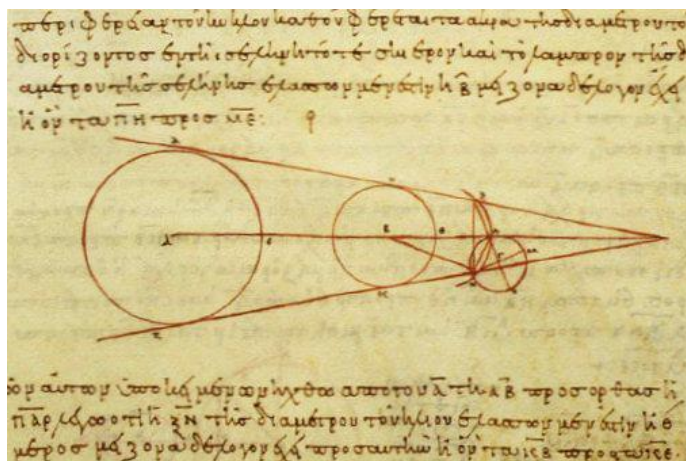
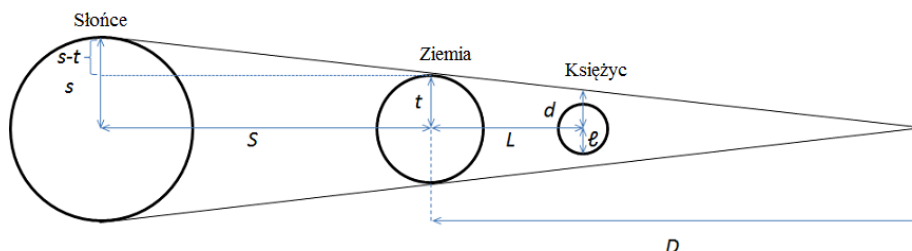


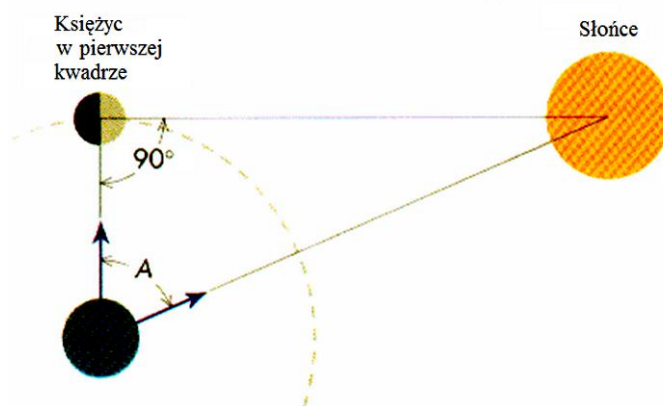
Diagram do obliczeń Arystarcha z manuskryptu z X w.

Znając rozmiar Ziemi, oraz wiedząc, że cień rzucany na Księżyc podczas zaćmienia ma szerokość jej średnicy obliczył promień orbity Księżyca, korzystając ze znajomości długości miesiąca i z tego, że pełne zaćmienie trwa trzy godziny. Następnie, za pomocą twierdzenia Talesa, obliczył rozmiar Księżyca. Korzystając z tego wyniku i wiedząc, że kątowny rozmiar Słońca i Księżyca widziany na niebie jest taki sam – co widać zwłaszcza podczas zaćmienia – obliczył stosunek promienia Słońca i jego odległości od Ziemi na 1/180. Właściwy wynik wynosi 1/215. Wreszcie, za pomocą ciekawej i subtelnej metody,

otrzymał rozmiar Słońca. Arystarch zauważył, że półksiężyc widoczny jest nieco wcześniej niż w połowie czasu między nowiem a pełnią.



Różnicę tę wyliczył na 12 godzin. Jego błąd wynosił pół godziny. Dzięki tej wiedzy, znając promień orbity Księżyca, otrzymał drugi kąt w trójkącie prostokątnym, jaki tworzą środki Ziemi, Słońca i Księżyca, gdy widoczny jest półksiężyc, skąd otrzymał odległość Ziemi do Słońca (kąt A na rysunku poniżej). Ze względu jednak na błąd w obliczeniu momentu pojawienia się półksiężyca odległość ta została znacznie niedoszacowana. Według Arystarcha równa się ona 20 odległości do Księżyca, a w rzeczywistości około 390. Mając ten wynik obliczył on rozmiar Słońca, niestety również znacznie niedoszacowany. Niemniej był on o wiele większy od rozmiaru Ziemi, co było najistotniejszą przesłanką do teoretycznego wywnioskowania, że to Słońce – jako największe – znajduje się w środku Układu Słonecznego.



Dzieła Eratostenesa i Arystarcha ustąpiły jednak pola bardziej przekonującemu w tamtym czasie układowi geocentrycznemu Arystotelesa, który został rozwinięty i uzupełniony dokładnymi obliczeniami Ptolemeusza. Należy jednak podkreślić, że powodem popularności geocentryzmu były nie względy teologiczne czy spekulatywne – choć takie argumenty również się pojawiały, by wtórnie poprzeć teorię przesłankami biblijnymi lub filozoficznymi – lecz jej



zgodność z danymi empirycznymi. Obliczenia Arystarcha obciążone były błędami, w dużej mierze spowodowanymi przyjęciem wartości  $\pi$  równej 3. Dokładniejsze jej oszacowanie podał Archimedes, żyjący dwa pokolenia po Arystarchu. Co istotniejsze, heliocentryzm przewiduje zjawisko paralaksy rocznej, która nie została jednak zaobserwowana. Wiedziano – jest to wyraźnie stwierdzone w *Elementach* Euklidesa – że tłumaczyć to mogłoby przyjęcie znacznie większych odległości od Słońca i gwiazd, jednak takie założenie wydawało się mniej wiarygodne niż zgadzający się z danymi tablicowymi układ geocentryczny. Podobnie rozumowali jeszcze astronomowie XVI wieczni jak Krzysztof Klavius czy Tycho de Brahe. Istnienie paralaksy zostało udowodnione dużo później przez trzech niezależnie pracujących badaczy. Na podstawie obserwacji przeprowadzonych w Kapsztadzie w latach 1832–1833 Tomasz Henderson wyznaczył współrzędne gwiazdy  $\alpha$  Cen, w oparciu o które stwierdzono potem istnienie przesunięcia paralaktycznego. W roku 1838 w Królewcu Fryderyk Bessel wyznaczył paralaksę gwiazdy 61 Cyg, a rok później astronom z Dorpatu Wilhelm Struve wyznaczył paralaksę Wegi.

Upadek kultury, nieuchronnie towarzyszący kryzysowi cywilizacji Rzymu, który imperium przechodziło w V wieku przyczynił się do zapomnienia osiągnięć astronomicznych. Zdarzali się nawet pisarze opowiadający się za płaskim modelem Ziemi, jak Kosmas Indicopleutes, co jest tym bardziej zaskakujące, że był on podróżnikiem, który przemierzył środkowy wschód i Indie. Również Tertulian i Laktancjusz, chrześcijańscy apologety późnego antyku podzielali ten pogląd. Kulistość Ziemi uznawał jednak św. Augustyn i encyklopedysta św. Izydora z Sewilli, w którego bezcennym dziele wiele wiedzy starożytnych przetrwało ciemne wieki rozpadu cesarstwa.

Wraz z powolnym odradzaniem się nauki w okresie Renesansu Karolińskiego odświeżeniu uległy zapomniane teorie kosmologiczne. Św. Beda Czcigodny określa Ziemię jako *orbs terrae* – kula ziemiska – wyraźnie wskazując jaki uznaje jej kształt. Neoplatonczyk Jan Szkot Eriugena omawia natomiast pojęcie równika oraz wspomina obliczenia i wyniki starożytnych greckich i rzymskich astronomów. Nadal dominuje jednak geocentryczny model Układu Słonecznego, autorytet zaś Ptolemeusza, poparty traktatem *De Coelo* Arystotelesa, pozostaje niezachwiany.

Przełom w astronomii przynosi wiek XIII, wiek światła. Jest to czas wielkich ludzi i wielkich dzieł, który zdołał imiona takich luminarzy nauki i kultury jak św. Tomasz z Akwinu, papież Innocenty III, czy św. Ludwik IX, król Francji. Wtedy to wynaleziono proch, rozkwitają również wielkie uniwersytety, opisano także teorię i użycie pierwszej lunety (Robert Grosseteste w pracy *De Iride* przedstawia optykę szkieł przybliżających, podobny opis podaje później jego uczeń Roger Bacon, choć dokładna konstrukcja tych proto-lunet nie jest dostatecznie poznana). Wieki średnie, we wszystkim praktyczne, osobiście stroniące od rozważań teoretycznych, wpłynęły na rozwój kosmologii poprzez osiągnię-

cia optyczne i kartograficzne. Istotnymi czynnikami okazały się tu tzw. potępienie paryskie biskupa Stefana Tempiera oraz wyprawy krzyżowe, które znacznie wzbogaciły wiedzę geograficzną. Z powodu zakazania niektórych dzieł Arystotelesa przez biskupa Paryża w roku 1271 uczeni i teologowie uwolnili się spod wszechwładnego dotąd autorytetu Stagiryty. Jednocześnie za pomocą nowo wynalezionego lunety stwierdzono, że – wbrew temu, co głosił Arystoteles w *De Coelo* – Księżyc nie jest idealnie jednolitym ciałem, lecz posiada krater, góry i doliny. W ten sposób położono podwaliny pod rewizję ptolemejskiego systemu geocentrycznego. Rozpędu badaniom nadało stworzenie i opisanie przez Roberta Grosseteste metody naukowej, którą cztery wieki później usystematyzują Franciszek Bacon i Galileusz.

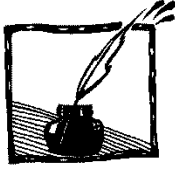
Jak już zostało zaznaczone, pierwsze, spekulatywne teorie heliocentryczne były ściśle powiązane z platonizmem, oraz z ruchem pitagorejskim. Nie jest więc niczym zaskakującym, że pojawiają się one znowu w chwili, gdy Renesans przywraca do łask oba te nurty, odsuwając na bok Arystotelesa. Pierwszym myślicielem, który zakwestionował spoczynek Ziemi był neoplatonczyk Mikołaj z Kuzy. Należy jednak podkreślić, że był to wniosek czysto filozoficzny – jeśli nie teologiczny – nie poparty rozważaniami empirycznymi. Jednocześnie odrzucał Kuzańczyk teorię, że orbity mają kształt idealnego okręgu, Wszechświat uznawał zaś – wbrew Arystotelesowi – za nieskończony. Mikołaj Oresme, biskup Lisieux i doradca króla Francji Karola V antycypował zasadę Galileusza zauważając, że ruch w poruszającym się statku nie różni się od ruchu na powierzchni ziemi – statek stanowi nowy stacjonarny układ odniesienia. Następnie skorzystał z tego wniosku, by zakwestionować argumenty Arystotelesa za nieruchomością Ziemi. Oresme również dopuszczał możliwość istnienia wszechświatów innych niż nasz, utożsamiał naturę światła i koloru oraz proponował egzegezę Pisma Świętego zgodną z osiągnięciami nowoczesnej astronomii, która przyjmowana jest do dziś.

Również Mikołaj Kopernik, kanonik warmiński i wszechstronny humanista – prawdziwy człowiek Renesansu – nie był wolny od prądów umysłowych swoich czasów i często sięgał do ksiąg Platona i pitagorejczyków. W jego monumentalnym dziele *De revolutionibus orbium coelestium*, dedykowanym papieżowi Pawłowi III, powołuje się na Filolaosa i Hiketas, pitagorejczyków z V wieku. Wspomina również Arystarcha, jako twórcę teorii heliocentrycznej. Swoje *Opus Magnum* dopracowywał Kopernik przez blisko trzydzieści lat, a ukazało się ono w całości dopiero w roku 1543, krótko przed śmiercią autora. Jednak sama teoria powszechnie była znana społeczności akademickiej ówczesnej Europy co najmniej od roku 1536, zaś przyjaciele Kopernika namawiali go, by wcześniej ogłosił wyniki swojej pracy. Ten jednak wahał się, w obawie przed krytyką i ośmieszeniem. Wciąż bowiem dane tablicowe zgadzały się o wiele lepiej z systemem geocentrycznym, też więc na skrupulatnym poprawianiu i uaktualnianiu tablic zesłał Kopernikowi większą część pracy nad *De*

*revolutionibus*, którą kontynuował aż do śmierci. Jednocześnie prowadził zażyłą korespondencję z humanistami i uczonymi całej Europy badając, jaką reakcję wywoła ogłoszenie niepopularnej teorii.

Bezpośrednio po publikacji dzieła Kopernika odbiło się bez echa wśród uniwersytetów europejskich. Po raz pierwszy zainteresowano się heliocentryzmem nie ze względu na samą teorię, lecz z powodów praktycznych. W roku 1582 papież Grzegorz XIII zlecił słynnemu astronomowi Krzysztofowi Klawiusowi opracowanie reformy kalendarza. Dotychczas używany kalendarz juliański, opracowany dla Cezara przez Sozygenesa z Aleksandrii, coraz gorzej spełniał swoje zadanie. Ze względu na niewielki błąd w obliczaniu długości roku wiosenne zrównanie dnia z nocą wypadło coraz wcześniej. W 1582 różnica wynosiła już 10 dni, co starano się korygować wprowadzając lata, miesiące i tygodnie przestępne. W swojej pracy opierał się Klawius na tzw. tablicach pruskich, opracowanych przez Erazma Reinholda. Chociaż i Klawius i Reinhold byli geocentrystami, jednak w obliczaniu dokładnych danych tablicowych opierali się na heliocentrycznym systemie Kopernika. Powstały w ten sposób kalendarz gregoriański ogłoszony został uroczyście w bulli *Inter gravissimas*. Aby zsynchronizować nową datę ze starą, dekretem papieskim po czwartku, 4 października miał następować od razu piątek 15, omijając dziesięć dni, o których można tym samym powiedzieć, że nigdy nie istniały. Mimo gwałtownych sprzeciwów ze strony kupiectwa i rolników – wężących w decyzji papieskiej próbę pozbawienia ich dochodu jednej trzeciej miesiąca – nowy kalendarz utrzymał się i obowiązuje do dzisiaj we wszystkich krajach pozostających pod wpływem łacińskiej cywilizacji Zachodu.

Ostateczne zwycięstwo systemu heliocentrycznego przyniósł Jan Kepler i Tychon de Brahe, którzy dzięki dokładnym pomiarom astronomicznym obalili geocentryczny system epicykli na korzyść elegantszego odeń modelu kopernikańskiego, ulepszono go przez Keplera o znane modyfikacje. Droga obu uczonych do heliocentryzmu nie była jednak prosta. Kepler, w młodości astrolog, argumentował za teorią Kopernika z czysto spekulatywnego punktu widzenia, silnie zależnego od *Timajosa* Platona i neopitagoreizmu. Chcąc matematycznie opisać Układ Słoneczny starał się poprzeć nowymi wynikami obserwacyjnymi platoński model wpisujący orbity kolejnych ciał niebieskich w regularne bryły platońskie. Powodowany rozumowaniem z braku obserwacji paralaksy rocznej, Tychon de Brahe pozostał wierny obozowi geocentrystów, choć na podstawie nowych danych obserwacyjnych był zmuszony zmodyfikować swoją wersję modelu.



## O analogii prawa Snelliusa w ruchu punktu materialnego z tarciem

Jacek Ciborowski<sup>1</sup>, Marta Włodarczyk<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Uniwersytet Warszawski, Instytut Fizyki Doświadczalnej

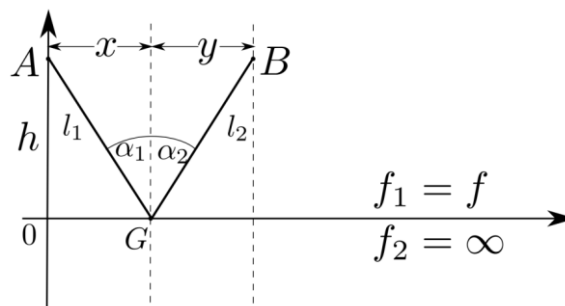
<sup>2</sup>Uniwersytet Łódzki, Katedra Fizyki Teoretycznej i VIII LO im. Adama Asnyka w Łodzi

Rachunek wariacyjny to metoda znajdowania funkcji lub wartości parametrów, które minimalizują lub maksymalizują wartości pewnych wielkości fizycznych. Zagadnienia, w rozwiązaniu których pomocny jest rachunek wariacyjny, spotykamy we wszystkich działach fizyki. Dla przykładu, w mechanice klasycznej, do odpowiedzi na pytanie o kształt łańcucha zaczepionego na obu końcach w polu grawitacyjnym prowadzi zasada, u podstaw której leży wymóg minimum grawitacyjnej energii potencjalnej takiego łańcucha w stanie równowagi. W optyce geometrycznej najbardziej znaną zasadą wariacyjną jest zasada Fermata, która orzeka, że promień świetlny porusza się między dwoma punktami po takiej trajektorii spośród wszystkich możliwych, aby czas tego ruchu był najkrótszy. Zasada Fermata prowadzi do znanych ze szkoły praw odbicia i załamania dla promienia świetlnego; to drugie zwane jest prawem Snelliusa.

### Analogia do prawa odbicia

Rozważmy na początek dwa punkty,  $A$  i  $B$ , leżące na półpłaszczyźnie o współczynniku tarcia  $f$ , graniczącej z półpłaszczyzną o nieskończonym współczynniku tarcia. Punkt materialny porusza się w kierunku granicy półpłaszczyzn (ośrodków). Dla jakiego toru praca sił tarcia na drodze od  $A$  do  $B$  będzie najmniejsza? Przyjmujemy, że wartość siły tarcia jest iloczynem wartości ciężaru ciała (w polu grawitacyjnym) i współczynnika tarcia.

Umieścimy punkty  $A$  i  $B$  w kartezjańskim układzie współrzędnych, jak na rysunku 1.



Rys. 1. Trajektoria punktu materialnego, poruszającego się od  $A$  do  $B$  po drodze, na której siły tarcia wykonują najmniejszą możliwą pracę

Oś  $X$  jest granicą półpłaszczyzn (ośrodków) o różnych współczynnikach tarcia,  $A = (0, h)$  oraz  $B = (x + y, h)$ . Tor ruchu składa się z dwóch odcinków,  $AG$  i  $GB$ , gdzie  $G = (0, x)$  jest punktem toru leżącym na osi  $X$ .

Oznaczmy:  $AG = l_1$  i  $GB = l_2$ . Niech  $w(x)$  będzie pracą sił tarcia po drodze  $AGB$ , na jednostkę ciężaru:

$$w(x) = f_1 \left( \sqrt{x^2 + h^2} + \sqrt{y^2 + h^2} \right)$$

Szukamy minimum funkcji  $w(x)$ . Z równania  $\frac{dw(x)}{dx} = 0$ , mamy:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + h^2}} = \frac{y}{\sqrt{y^2 + h^2}}$$

lub równoważnie:

$$\frac{x}{l_1} = \frac{y}{l_2}$$

z czego wynika, że

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = 1 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2$$

(co jest równoważne z warunkiem  $x = y$ ). Uzyskaliśmy zatem prawo równoważne prawu odbicia dla światła – kąt padania i kąt odbicia są równe. Warto zaznaczyć w tym miejscu, że prawo odbicia będzie prawdziwe również wtedy, gdy ciało będzie poruszało się bez tarcia.

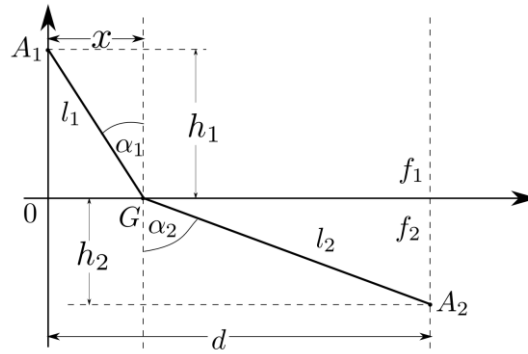
### Analogia do prawa Snelliusa

Rozważmy teraz przypadek kolejny – dwa punkty,  $A_1$  i  $A_2$ , leżące na półpłaszczyznach o różnych współczynnikach tarcia kinetycznego (odpowiednio  $f_1$  i  $f_2$ ). Po jakim torze powinien poruszać się punkt materialny od  $A_1$  do  $A_2$ , aby praca sił tarcia była najmniejsza?

Ponownie przyjmujemy, że wartość siły tarcia jest iloczynem wartości ciężaru ciała i współczynnika tarcia. Umieścimy punkty  $A_1$  i  $A_2$  jak na rys. 2.

Oś  $X$  jest granicą półpłaszczyzn (ośrodków) o różnych współczynnikach tarcia,  $A_1 = (0, h_1)$  oraz  $A_2 = (d, -h_2)$ . Tor ruchu składa się z dwóch odcinków,  $A_1G$  i  $GA_2$ , gdzie  $G = (x, 0)$  jest punktem toru leżącym na osi  $X$ . Oznaczmy:  $A_1G = l_1$  i  $GA_2 = l_2$ . Niech  $w(x)$  będzie pracą sił tarcia po drodze  $A_1GA_2$ , na jednostkę ciężaru:

$$w(x) = f_1 \sqrt{x^2 + h_1^2} + f_2 \sqrt{(d-x)^2 + h_2^2}$$



Rys. 2. Trajektoria ruchu ciała przechodzącego przez granicę ośrodków o różnych współczynnikach tarcia taka, że praca sił tarcia osiąga minimum

Szukamy minimum funkcji  $w(x)$ . Z równania  $\frac{dw(x)}{dx} = 0$ , mamy:

$$\frac{f_1 x}{\sqrt{x^2 + h_1^2}} = \frac{f_2 (d - x)}{\sqrt{(d - x)^2 + h_2^2}}$$

lub równoważnie:

$$f_1 \frac{x}{l_1} = f_2 \frac{d - x}{l_2}$$

Druga pochodna funkcji  $w(x)$  jest zawsze dodatnia:

$$\frac{d^2 w(x)}{dx^2} = \frac{f_1 h_1^2}{(x^2 + h_1^2)^{3/2}} + \frac{f_2 h_2^2}{((d - x)^2 + h_2^2)^{3/2}} > 0$$

a więc funkcja  $w(x)$  osiąga minimum dla tej wartości  $x$ , którą można wyznaczyć z równania  $f_1 \frac{x}{l_1} = f_2 \frac{d - x}{l_2}$ . Oznaczając przez  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$  kąty, jakie odcinki  $A_1G$  i  $GA_2$  tworzą z osią Y (normalną), powyższy wzór możemy przepisać następująco:

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{f_2}{f_1}$$

Otrzymujemy zatem wyrażenie podobne do tego, jakie opisuje przechodzenie promienia świetlnego przez granicę ośrodków o różnych współczynnikach załamania:  $\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{n_2}{n_1}$ , gdzie  $n_i$  oznacza współczynnik załamania światła  $i$ -tego ośrodka.

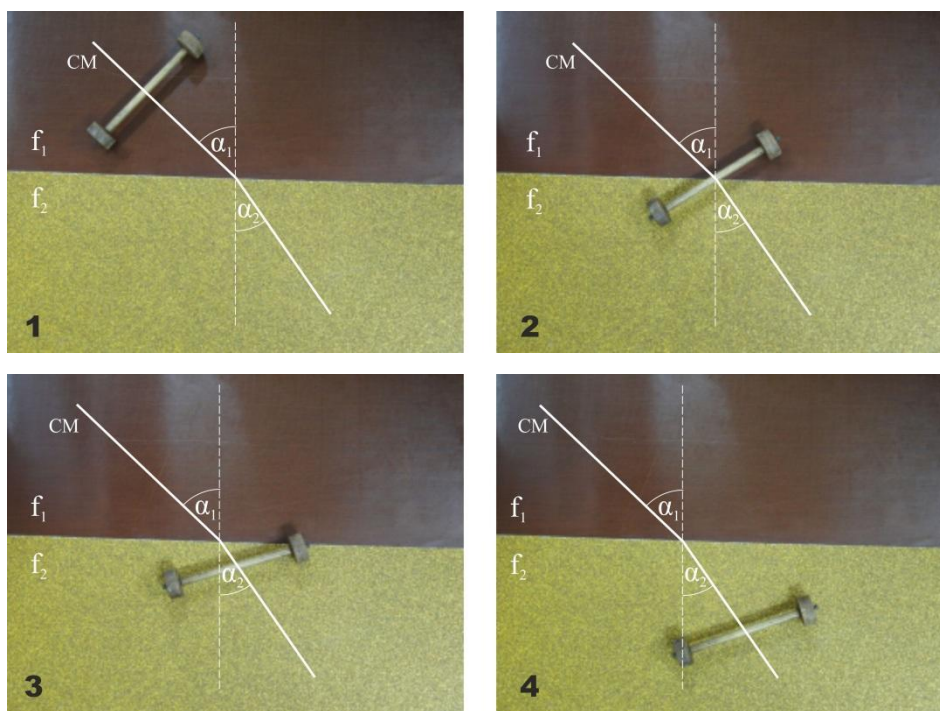
Pamiętajmy jednak, że prawo odbicia i załamania światła otrzymuje się z innych założeń fizycznych, lecz również znajdując minimum: wielkością minimalizowaną w tym wypadku jest czas przejścia promienia świetlnego (czoła fali elektromagnetycznej) pomiędzy dwoma punktami. Widzimy więc daleko posuniętą analogię z optyką. Zawiera się nie tylko w tej samej postaci prawa wiążącego kąt padania i załamania, lecz również w tym, że współczynnik tarcia pełni tę samą rolę w omawianym zagadnieniu, co w optyce współczynnik załamania.



## Doświadczenie ze zbiorów IF UJ

Marek Gołąb  
Instytut Fizyki UJ

Klocek na kółkach zjeżdża po równi pochyłej, która składa się z dwóch powierzchni o różnych współczynnikach tarcia. Widać wyraźnie, że trajektoria środka CM masy kloceków załamuje się ku normalnej.



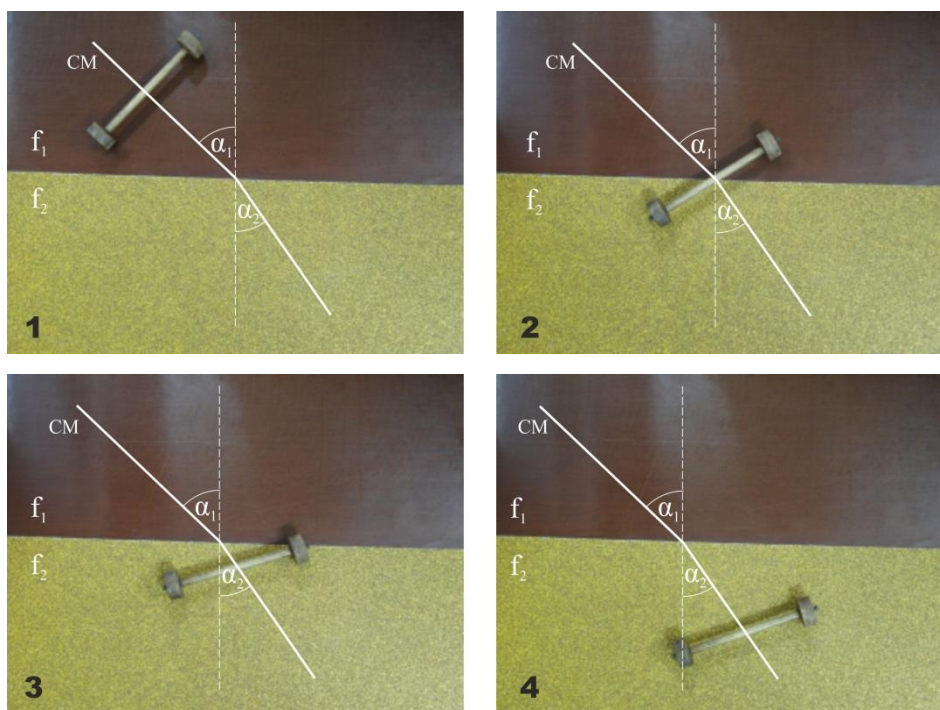
Kolejne fazy ruchu (fot. Marek Gołąb)



## Doświadczenie ze zbiorów IF UJ

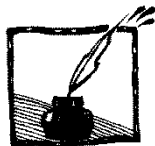
Marek Gołąb  
Instytut Fizyki Uj

Klocek na kółkach zjeżdża po równi pochyłej, która składa się z dwóch powierzchni o różnych współczynnikach tarcia. Widać wyraźnie, że trajektoria środka CM masy klocków załamuje się ku normalnej.



Kolejne fazy ruchu (fot. Marek Gołąb)





## Lew D. Landau

Maria Pawłowska

Biblioteka Instytutu Fizyki UJ

*„Wolałabym, żeby moje dziecko nie był geniuszem, ale synem...”*  
(dzieciństwo i młodość L.D. Landaua)

W parku miejskim w Baku mały chłopczyk pisze na ścieżce długą, bardzo długą, kolumnę cyfr, potem przesuwając się wzdłuż zapisanego słupka i wpisuje odpowiedź. Od razu widać, że dziecko zajmuje się zwykłym dodawaniem i odejmowaniem, ale dla niego jest to najwspanialsza zabawa. Wśród cyfr na piasku odnajduje go matka, bierze za rękę i prowadzi do domu.

Ten matematyk ma cztery i pół roku. Jest bardzo ładny: ma ogromne, jasne, myślące, przyjazne oczy. Ma na imię Lew, ale matka nazywa go Lewinka.

Lew Landau urodził się 22 stycznia 1908 roku. Jego rodzice poznali się w Petersburgu, gdy Lubow Wienjaminowna Garkawi odbywała praktykę medyczną w klinice uniwersyteckiej. Dawid Lwowicz Landau, inżynier petrochemik, bez pamięci zakochał się w ślicznej praktykantce. Młodzi pobrali się, ale wkrótce zmuszeni byli opuścić ukochany Petersburg, bo znana firma „Royal Dutch Shell” zaproponowała utalentowanemu inżynierowi pracę w Baku. Państwo Landau osiedlili się w Bałachanach, przemysłowej dzielnicy na przedmieściach Baku. Wkrótce urodziła im się córeczka Sonia, później syn, którego na cześć dziadka nazwano Lew. Rodzice wiele uwagi poświęcali wychowaniu dzieci. Zatrudniono francuską guwernantkę, do domu przychodzili nauczyciele muzyki, rytmiki i rysunku. Matka uczyła dzieci czytać i pisać. Lew był nieprzeciętnie zdolnym, ale równocześnie nieznośnym i bardzo upartym dzieckiem. Zresztą te cechy zachował do pewnego stopnia również w swoim dorosłym życiu. Rodzicom nie udało się zachęcić chłopca do nauki muzyki, interesowały go wyłącznie liczby.



W gimnazjum Lew Landau był najlepszym uczniem z nauk ścisłych, ale wciąż nie zgadzał się z nauczycielem literatury, który nabrał awersji do ucznia po spojrzeniu na jego zeszyt. Nauczyciela złościło niestaranne pismo i lakoniczne wypracowania, których pisanie Lew nienawidził całym sercem. Kiedyś dostał jedynkę za wypracowanie o Eugeniuszu Onieginie. Nie mógł zrozumieć, dlaczego jego zadanie zostało tak słabo ocenione. Przecież nie było w nim ani

jednego błędu. Napisał: „Tatiana była dość znudzoną osobą” – i jedyńka. Gdyby nauczyciel wiedział, że Lew doskonale zna twórczość Puszkina, Gogola, Niekrasowa, a na pamięć umie prawie wszystkie wiersze Lermontowa, a nawet jego prozę...

W 1920 roku Lew Landau otrzymał świadectwo dojrzałości, ale dwunastolatków nie przyjmowano na uniwersytet. Już wcześniej Lew rzadko przygotowywał się do lekcji, ale teraz mógł się zupełnie rozleniwzić. Matka szukała sposobów, by zmobilizować syna do pracy, ale w swych nieustannych wyrzutach posunęła się za daleko. Nieszczęsna pedagogika prawie doprowadziła do tragedii, gdy w trzynastym roku życia Lew postanowił popełnić samobójstwo. Na szczęście problem rozwiązał się, bo rodzice zapisali chłopca do Technikum Handlowego. Do tej szkoły uczęszczały również siostra Lwa Sonia i jego kuzynka Tiema. Dawid Lwowicz pomagał dzieciom z algebry, geometrii i trygonometrii. Był wymagającym nauczycielem: ze zbioru Szaposznikowa<sup>1</sup> nie zostało ani jedno zadanie, którego nie rozwiązałyby jego uczniowie. Lew samodzielnie zgłębił tajniki analizy matematycznej; różniczkować nauczył się mając dwanaście lat, całkować – w wieku lat trzynastu. Zajmowanie się matematyką sprawiało mu tyle radości, że zapominał o bożym świecie. Nie lubił tylko geometrii: „Wszak ona taka prymitywna...”<sup>2</sup> miał mawiać.



W 1922 roku Lew został przyjęty na Uniwersytet w Baku<sup>3</sup>. Zapisał się od razu na dwa wydziały: fizyczno-matematyczny i chemiczny. Później zrezygnował ze studiowania chemii, ale zainteresowanie tym przedmiotem zostało mu na całe życie.

Landau był najmłodszym studentem i bardzo to przeżywał. W przerwach między wykładami, gdy koledzy z zapalem o czymś rozmawiali, Lew starał się zaszyć gdzieś w kąciku, by nie rzucać się nikomu w oczy. Najtrudniejszy był pierwszy semestr, dopóki nie przekonano się, jakim wspaniałym matematykiem jest ten chłopiec i jak chętnie pomaga kolegom.

Pewnego razu podczas zajęć z matematyki Lew zapytał o coś wykładowcę. Profesor długo zastanawiał się nad odpowiedzią. W auli zrobiło się zupełnie cicho. Profesor poprosił Lwa, by podszedł do tablicy. Natychmiast cała tablica zapelniła się wzorami matematycznymi. „Chińszczyzna” – szeptali koledzy. Profesor i Landau zaczęli się kłócić. Studenci dopowiadali: „Landau ma rację”.

<sup>1</sup> N.A. Saposnikov, N.K. Val'cev, *Sbornik algebraičeskikh zadač*. C. 1–2, Moskva 1900.

<sup>2</sup> Wszystkie cytaty pochodzą z książki: M. Bessarab, *Landau. Stranicy žizni*, Moskva 1971 (tłum. M. Pawłowska).

<sup>3</sup> Gdy w 1920 roku na Kaukazie władzę objęli komuniści wprowadzono rewolucyjny system edukacji, który pozwalał rozpocząć studia uniwersyteckie bez konieczności ukończenia szkoły średniej czy też zostać profesorem nie obroniwszy rozprawy doktorskiej.

Lew miał poważną, skupioną twarz, profesor był zdenerwowany, trochę speszony. Na koniec wykładowca uśmiechnął się i skłoniwszy głowę powiedział: – „Gratuluję, młody człowieku! Znalazł pan oryginalne rozwiązanie”.

Lew bardzo dużo czytał. Miał swoją ulubioną książkę – *Czerwone i czarne* Stendhala. Żył życiem Juliana Sorela, bohatera książki, razem z nim kochał i nienawidził, tryumfował i ginął. Ale przede wszystkim, dzięki tej lekturze zrozumiał, że jeśli człowiek czegoś bardzo chce, na pewno uda mu się to osiągnąć.

W 1924 roku Lew Landau przeniósł się na Wydział Fizyki Uniwersytetu Leningradzkiego. Wreszcie mógł poczuć się dorosły, samodzielnie decydować o sobie, nikt nie udzielał mu nauk moralnych, nie nudził rozmowami o racjonalnym odżywianiu. No i mógł sobie czytać do woli, choćby przez całą noc aż do świtu.

W tym okresie Leningrad był naukową stolicą Rosji Radzieckiej. W Uniwersytecie Leningradzkim pracowali wybitni fizycy: A.F. Joffe, D.S. Rożdźstwiński, D.A. Rożanski, pięć lat przepracował tutaj utalentowany fizyk holenderski Paul Ehrenfest, więc zdolny młodzieniec nie musiał szukać bardziej prestiżowej uczelni.

W Leningradzie Landau pracował jeszcze więcej niż w Baku. Zdarzało się, że pracował po piętnaście, osiemnaście godzin na dobę. Doprowadził do tego, że zaczął cierpieć na bezsenność.

Lew mało dbał o swój wygląd zewnętrzny i ubiór; aż do pierwszych chłódów chodził w sandałach i jasnych spodniach z płótna żaglowego. Był wysoki i bardzo szczupły. Grzywkę zaczesywał na bok, starając się przyglądzić gęste, kręcone włosy. Uważał się za „aktywnie brzydkiego”. Chorobliwa nieśmiałość trzymała go w bezpiecznej odległości od dziewcząt. Będąc na przyjęciu szukał ratunku wśród starszych dam, z którymi można było rozmawiać swobodnie. Było jasne, że nigdy się nie ożeni, bo „małżeństwo – to pozbawienie wolności”.

Kiedyś jeden z kolegów nadał mu przyzwisko: Dau<sup>4</sup>. I później właśnie tak nazywali go fizycy z całego świata.

Gdy pewnego dnia Lubow Wienjaminowna odwiedziła swoje dzieci w Leningradzie, Lew bardzo zdenerwował matkę, mimo że uczył się świetnie. Nie mogła pogodzić się z tym, że syn pracuje do upadłego, że całymi dniami siedzi nad wzorami matematycznymi. Po powrocie do Baku, Lubow podzieliła się obawami ze swoją krewną. Była bardzo zmartwiona, więc ta chciała ją jakoś pocieszyć: – „Ciociu Lubo, Lew jest geniuszem” – powiedziała. „Wolałabym, żeby moje dziecko nie były geniuszem, ale synem” – odpowiedziała stanowczo Lubow Wienjaminowna.

---

<sup>4</sup> Landau zwykł powtarzać, że to przyzwisko wiąże się z wymową jego nazwiska po francusku – L'ane Dau (osioł Dau).

W 1926 roku, w czasopiśmie „Zeitschrift für Physik” opublikowano pierwszy artykuł naukowy L.D. Landaua: *O teorii natężenia widma cząsteczek dwuatomowych*<sup>5</sup>, który poświęcony został podstawowym zagadnieniom nowej teorii fizyki – mechanice kwantowej. Ten artykuł osiemnastoletniego studenta był rozwinięciem idei Heisenberga, Schrödingera i innych twórców mechaniki kwantowej. – „Kiedy zapoznałem się z ogólną teorią względności Einsteina, upajałem się jej pięknem”, po wielu latach opowiadał Landau studentom. „Artykuły Heisenberga i Schrödingera wprawiały mnie w zachwyt. Nigdy wcześniej tak wyraźnie nie uzmysłowiłem sobie siły ludzkiego geniuszu”.

Promotorem pracy dyplomowej L.D. Landaua był profesor W.R. Bursian, wyniosły i stateczny uczyony starej daty. Obronę wyznaczono na 20 stycznia 1927 roku. Po jej zakończeniu profesor Lejfet zapytał abiturienta, gdzie zamierza podjąć pracę. Landau odpowiedział, że jeszcze nie podjął ostatecznej decyzji. – „Po co kształcą tyłu fizyków?” – zawarczał Lejfet.

W 1927 roku Landau został aspirantem w Instytucie Fizyczno-Technicznym Uniwersytetu Leningradzkiego (LFTI), gdzie przyjęto go do grupy teoretyków, którymi kierował J.I. Frenkel. W skład grupy, oprócz Landaua, weszli: V.A. Fock, M.P. Bronsztejn i D.D. Iwanienko. Przyjaciółmi Landaua byli również: Żenia Kanegizer (utalentowana poetka, później żona fizyka Rudolfa Peierlsa), Gieorgij Gamow i Michał Korec<sup>6</sup>. Dobrała się zgrana kompania. Z lubością, nawet dla błahych spraw, tworzono wymyślne teorie. Pierwszą stworzono do klasyfikowania prac naukowych. Do najwyższej, pierwszej klasy, zaliczano prace wybitne, do drugiej – bardzo dobre, do trzeciej – dobre, do czwartej – przeciętne; grupę piątą stanowiły prace „patologiczne”, czyli głupie i pozbawione treści, takie, które nigdy nie powinny być opublikowane. Zamiłowanie Landaua do systematyzacji i dokładności znalazło swoje odzwierciedlenie w żartobliwej klasyfikacji fizyków dokonanej przy użyciu skali logarytmicznej. Idea tej klasyfikacji była następująca: uczyony drugiej klasy miał dla fizyki zasługi dziesięć razy większe niż fizyk klasy trzeciej. Einstein osiągnął w tej klasyfikacji poziom  $\frac{1}{2}$ , a Bohr, Schrödinger, Heisenberg, Dirac, Fermi i niektórzy inni, pierwszą klasę. Siebie umieścił Landau w klasie  $2\frac{1}{2}$ , ale dumny z którejs ze swoich prac, awansował się do drugiej grupy. Najdowcipniejszym z całej kompanii był Lew Landau. Pomysłowy, bystry w sporach, czytany, znał się nie tylko na naukach ścisłych, ale także na problemach z zakresu historii, literatury

<sup>5</sup> L.D. Landau, *Zur Theorie der Spektren der zweiatomigen Molekule*, Z. Phys., t. 40, 1926, s. 621.

<sup>6</sup> 28 kwietnia 1938 roku M. Korec, L. Landau i J. Rumer zostali aresztowani przez KGB. Dowodem obciążającym była ulotka pierwszomajowa napisana przez jednego z nich w imieniu urojonego Moskiewskiego Komitetu Antyfaszystowskiej Partii Robotniczej, w której wzywano towarzyszy, aby „ratowali socjalizm przed kryminalną kliką stalinowską”. Korec spędził w gułagu 20 lat, Rumer pozostawał przez 10 lat w „szaraszce” (karna instytucja, w której więźniowie prowadzili badania naukowe), Landaua ocalił Piotr Kapica, twierdząc, że tylko on może wyjaśnić jego nowe odkrycie – nadciekłość.

i malarstwa jednak jego ówczesne sądy dotyczące życia były skrajnie naiwne. Gdy dowiedział się przypadkowo, że dwoje jego przyjaciół spotyka się uznał, że ta „zakochana para” naruszyła elementarne zasady przyjaźni i obraził się na nich.

W tym czasie Landau zaczął pisać nową pracę naukową zatytułowaną *Problemy hamowania w mechanice kwantowej*<sup>7</sup>, w której po raz pierwszy wprowadził opis stanu układów fizycznych za pomocą macierzy gęstości.

W 1928 roku w Moskwie odbywał się VI Zjazd Fizyków. Dzięki staraniom dyrektora LFTI, akademika A.F. Joffego, Zjazd ten został doskonale zorganizowany. W obradach brali udział uczeni radzieccy: Lebidiew, Roźdiestwiencki, Rożanski, Fock, a także wielu zagranicznych gości: N. Bohr, P. Dirac, P. Debye, Brillouin, Franck, Charles R. Darwin, Ladenburg. Obrady rozpoczęły się wykładem doktorantów z Leningradzkiego Instytutu Fizyczno-Technicznego: L.D. Landaua i D.D. Iwanienki pt. *Podstawy statystyki kwantowej*. Swój drugi wykład Landau i Iwanienko zatytułowali *Zasada przyczynowości w współczesnej fizyce*. Trzecią pracę: *Elektrony magnetyczne w mechanice falowej*, przygotował Landau samodzielnie.

Dyskusję prowadzono w języku niemieckim. Dau dobrze mówił po niemiecku i po francusku, ale był bardzo niezadowolony, że nie zna angielskiego, bo między fizykami angielskimi i amerykańskimi często wybuchały spory, których nie rozumiał. Posiedzenia sekcji fizyki teoretycznej były poświęcone przede wszystkim mechanice kwantowej i falowej, elektronowi Diraca – pozytonowi, a także problemom optyki. Po zakończeniu oficjalnych obrad stu pięćdziesięciu uczestników konferencji przewieziono do Niżnego Nowogrodu. Statkiem po Woldze dopłynęli do Saratowa, skąd goście odjechali do Tbilisi. Dau i jego przyjaciele nie chcieli wracać do Leningradu, mieli zamiar iść przez kaukaskie grzbiety do Batumi. Najgorsze było to, że brakowało im pieniędzy. Aby nie stracić resztek kapitału Dau zawiązał pięć rubli w chusteczkę i schował do trzewika. Można sobie wyobrazić jak ten banknot wyglądał po dwudniowym marszu. W banku miejskim w Batumi zjawił się obszarpany, chudy młodzieniec, który podał kasjerowi tak startą pięciorublowkę, że ten stanowczo odmówił jej przyjęcia. Na szczęście dało się odczytać numer banknotu i kasjer musiał wypłacić należną kwotę. Starczyło na obiad i telegram do Instytutu: „zostaliśmy bez kopiejki”.

Po VI Zjeździe Fizyków Dau, jako jeden z najlepszych doktorantów LFTI, został skierowany za granicę<sup>8</sup>. Musiał szybko nauczyć się języka angielskiego. Półtora miesiąca później potrafił już mówić w tym języku, nauczył się czytać i tłumaczyć teksty za pomocą słownika.

---

<sup>7</sup> L.D. Landau: *Das Dampfungesproblem in der Wellenmechanik*, Z. Phys., t. 45, 1927, s. 430.

<sup>8</sup> Zagraniczne staże naukowe młodych fizyków radzieckich były możliwe dzięki stypendiom rockefellerowskim, a władze radzieckie jeszcze nie odmawiały wydawania paszportów.

W październiku 1929 roku Dau przyjechał do Berlina. Pewnego razu na Uniwersytecie Berlińskim spotkał Alberta Einsteina. Podszedł do tego znakomitego uczonego i, speszony, poprosił o rozmowę. Einstein zaprosił młodzieńca do siebie do domu.

Landau miał dwadzieścia jeden lat, Einstein pięćdziesiąt. Einstein uważnie słuchał młodego fizyka radzieckiego, gdy ten starał się udowodnić prawdziwość podstawowej zasady mechaniki kwantowej – zasady nieoznaczoności. Lew nie mógł pojąć, jak człowiek, który swoją teorią względności zrobił rewolucję w nauce, nie może zrozumieć innej rewolucyjnej teorii – mechaniki kwantowej? Einsteinowi podobał się zarówno zapał, jak również pewność poglądów Landaua i jasno sformułowane twierdzenia. Ale Lew Landau nie był w stanie przekonać Einsteina. Nigdy więcej nie udało im się spotkać. Einstein musiał wyemigrować z faszystowskich Niemiec za ocean.

Z Berlina pojechał Landau do Getyngi do Maxa Borna. Podczas swojego pobytu w Leningradzie Born zaprosił Landaua, by ten wziął udział w jego seminariach. Było to olbrzymie wyróżnienie, bo przecież tam referowali swoje prace naukowe takie sławy naukowe jak: Einstein, Bohr, Heisenberg, Schrödinger czy Pauli.

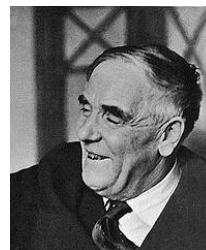
Od Borna Landau skierował się do Lipska, do jednego z twórców mechaniki kwantowej – Wernera Heisenberga. Gwałtowny, trochę szyderczy Heisenberg, pod pewnymi względami był podobny do Landaua. Obaj lubili mówić i mogli gadać godzinami. Profesor Heisenberg miał 29 lat. Cztery lata wcześniej napisał pracę, która była znana fizykom z całego świata (w 1932 roku otrzymał za nią Nagrodę Nobla). Zawierała opis pierwszego wariantu mechaniki kwantowej – mechaniki macierzowej.

Z Lipska pojechał Landau do Danii, do innego laureata Nagrody Nobla – Nielsa Bohra. – „Dobrze, że pan przyjechał! Wiele się od pana nauczymy” – powiedział Bohr, witając gościa z Rosji. Dau był dumny słysząc takie słowa z ust legendarnego Bohra jednak po kilku dniach przekonał się, że Bohr, w swej dobroci, wita w ten sposób wszystkich nowo przybyłych. Wykłady Bohra były bardzo interesujące, mądre i pomysłowe. Ten znamienity uczoney poświęcał studentom wiele uwagi, a w kontaktach z nimi wykazywał się niezwyklej delikatnością. Nigdy nie pozwalał sobie drwić z kogokolwiek, ale z siebie śmiał się bardzo często. Ulubionymi filozofami Bohra byli Spinoza i Hegel. Często powtarzał, że należy „uczyć się od przyrody i naśladować jej zasady”. Do Kopenhagi z całego świata ściągano utalentowaną młodzież, ale dało się zauważyć, że Bohr za swojego najlepszego ucznia uważa Landaua.

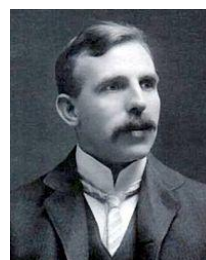
Kolejnym etapem podróży naukowej Landaua był Uniwersytet w Cambridge, gdzie pracował znakomity fizyk Paul Dirac. Tutaj Landau spotkał się ze



swoim rodakiem Piotrem Kapicą. Od 1921 roku Kapica pracował w znakomitym laboratorium u patriarchy fizyki współczesnej – Ernesta Rutherforda – i tylko na czas wakacji letnich wracał do kraju. Kiedyś ojciec fizyki radzieckiej, niestrudzony „papa Joffe”, zabrał w podróż zagraniczną ucznia, absolwenta Politechniki Petersburskiej, Piotra Kapicę. Rutherford zostawił Kapicę, by ten popracował w jego laboratorium. Wkrótce młody Rosjanin stał się ulubionym uczniem Rutherforda. Piotr Kapica przez cały czas mieszkał i pracował w Cambridge, gdzie doczekał się wysokiego uznania – został członkiem Królewskiego Towarzystwa Naukowego. Mimo wszystko Piotr Leonidowicz nie uległ „zangielszczeniu”; pozostał obywatelem rosyjskim i dla obu jego synów, którzy urodzili się w Anglii, językiem ojczystym był język rosyjski.



Ernest Rutherford



Piotr Kapica

W Cambridge Landau przebywał cztery miesiące. Wynajął sobie niewielki pokój z pełnym utrzymaniem. Gospodyni była młoda, urodziwa i życzliwa. Wkrótce Dau zauważył, że dziewczyna rumieni się, gdy napotyka jego wzrok. Zakochał się w Angielce, ale wciąż jeszcze nie nabral śmiałości, by się przyznać do swoich uczuć.

Z Anglii Landau pojechał do Zurychu, do Pauliego. Interesowała go hipoteza o istnieniu nadzwyczaj słabych oddziaływań z cząstką elementarną – neutrinem. Nie opuścił ani jednego wykładu Pauliego. Pewnego razu znany austriacki filozof, profesor *N*, wszczął z Paulim spór dotyczący teorii względności. Pauli obalał argumenty filozofa, ale ten nie poddawał się, wymyślał nowe pytania i tak zbił z tropu audytorium, że większość słuchaczy przestała rozumieć, o co w tym wszystkim chodzi.

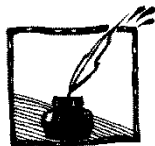
– „Czy byłby pan uprzejmy wyjaśnić mi, na czym polega różnica między wystąpieniem profesora Pauliego i profesora *N*?” – zapytał Landaua młody dziennikarz miejscowej gazety.

– „W tym – odpowiedział Landau – że profesor Pauli rozumie, o czym mówi, a profesor *N* – nie”.

Heisenberg, Bohr, Born, Dirac, Pauli doceniali nieprzeciętne zdolności Landaua. Każdy uniwersytet byłby zaszczycony mogąc gościć u siebie tego młodego uczonego, jednego z najlepszych fizyków rosyjskich. I rzeczywiście, Landau wielokrotnie otrzymywał takie propozycje. Ale ledwie rozpoczynała się rozmowa, zbijał z tropu rozmówcę:

– „Nie! Ja wrócę do kraju, gdzie stworzymy najlepszą na świecie naukę”.

Ze swojej pierwszej delegacji naukowej za granicę wrócił w 1931 roku. „Dau wrócił do Rosji, gdzie zostało jego serce, bo on sam, w głębi duszy, był rewolucjonistą” – pisała później zagraniczna prasa.



## Zadanie z transporterem – łatwe trudne zadanie

Waldemar Gorzkowski

### Od Redakcji

Redakcja postanowiła przypomnieć czytelnikom piękne standardowe zadanie z transporterem, które zaliczamy do „łatwych trudnych”. Łatwe, gdyż temat jest bardzo prosty i zrozumiały, a rachunki dostępne nawet dla bardzo przeciętnego ucznia. A jednak zadanie sprawia trudność.

Zadanie dotyczy opisu zjawisk w układzie nieinercyjnym. Trudność występuje w identyfikacji układu izolowanego i rozumienia zachowania energii. Zadanie pochodzi z wydanego 25 lat temu *Zbioru zadań z olimpiad fizycznych* Waldemara Gorzkowskiego. Wiem od znajomych fizyków Chińczyków, że zbiory Waldemara Gorzkowskiego są tłumaczone na chiński i w dużych nakładach tam wydawane.

Zadanie polecamy tylko wtedy, gdy jest dość czasu na dyskusję.

### Zadanie

Na poziomy pas transportera poruszający się ruchem jednostajnym z szybkością  $v = 5 \text{ m/s}$  upuszczono z bardzo małej wysokości kostkę kredy w ten sposób, żeby jedna ze ścianek była pozioma (kreda spada „na płasko”). Okazało się, że kreda zrobiła na pasie smugę długości  $s = 5 \text{ m}$ . Nieco później zatrzymano napęd transportera i pas poruszał się dalej ruchem opóźnionym z opóźnieniem  $a = 5 \text{ m/s}^2$ .

Czy kreda znowu pozostawiła smugę na pasie? Jakiej długości? Czy można dokładnie obliczyć, w jakich granicach może się zawierać wartość opóźnienia pasa, by kreda nie pozostawiła smugi?

### Rozwiązanie

W układzie odniesienia poruszającym się ruchem jednostajnym wraz z pasem sytuacja wygląda tak, jakby na nieruchomy pas położono kredę z prędkością początkową równoległą do pasa (poziomą) o wartości  $v = 5 \text{ m/s}$ . Niech masa kredy wynosi  $m$ . Początkowa energia kinetyczna kredy (w rozważanym układzie odniesienia) zostaje w całości zużyta na pracę siły tarcia. Oznaczając współczynnik tarcia kredy o transporter przez  $f$  możemy napisać

$$\frac{1}{2}mv^2 = fmg s$$

Stąd

$$f = \frac{v^2}{2gs}$$

Po włączeniu hamowania z opóźnieniem  $a$  układ odniesienia związany z transporterem staje się układem nieinercyjnym. Na kredę działa teraz siła bezwład-



ności o wartości  $ma$  zwrócona w kierunku ruchu transportera. Siła ta ma dokładnie taki sam charakter jak siła działająca na pasażerów podczas hamowania tramwaju lub pociągu. Aby podczas hamowania kreda uległa przesunięciu, siła  $ma$  musi przekroczyć maksymalną wartość siły tarcia równą  $fmg$ . W przeciwnym wypadku kreda nie poruszy się, gdyż siła  $ma$  zostanie zrównoważona przez siłę tarcia. Zatem, aby kreda nie pozostawiła smugi, musi być spełniony warunek

$$ma \leq fmg,$$

czyli 
$$a \leq \frac{v^2}{2s} = 2,5 \text{ m/s}^2.$$

Zgodnie z danymi w tekście zadania wartość  $a = 5 \text{ m/s}^2$  nie spełnia tego warunku, a więc podczas hamowania kreda przesunie się po transporterze i zrobi białą smugę. Obliczmy długość tej smugi  $s_1$ .

Kreda będzie poruszać się po transporterze ruchem przyspieszonym dopóki będzie działała siła  $ma$ , czyli podczas hamowania. Po zatrzymaniu się pasa kreda będzie miała niezerową prędkość początkową i będzie się poruszała ruchem opóźnionym z powodu siły tarcia. Ruch ten będzie trwał do czasu zatrzymania się kredy.

Czas trwania hamowania wynosi

$$t_1 = \frac{v}{a}.$$

Przyspieszenie kredy  $a_1$  względem transportera obliczamy z zależności

$$ma_1 = ma - T,$$

wyrażającej II zasadę Newtona w układzie nieinercyjnym związanym z transporterem.  $T$  oznacza wartość siły tarcia równą  $fmg$ . Współczynnik tarcia  $f$  wyznaczyliśmy już wcześniej. Zatem możemy napisać

$$ma_1 = ma - fmg,$$

$$a_1 = a - \frac{v^2}{2s}.$$

Droga przebyta przez kredę podczas hamowania transportera wynosi (względem transportera)  $\frac{1}{2}a_1t_1^2$ , czyli  $\frac{1}{2}\left(a - \frac{v^2}{2s}\right)\frac{v^2}{a^2}$ .

W chwili zatrzymania się transportera prędkość kredy względem transportera wynosi

$$v_1 = a_1t_1 = \left(a - \frac{v^2}{2s}\right)\frac{v}{a}.$$

Opóźnienie kredy po zatrzymaniu się transportera wynosi

$$a_2 = T / m = fg = \frac{v^2}{2s}.$$

Czas trwania ruchu opóźnionego kredy jest równy

$$t_2 = \frac{v_1}{a_2} = (2as/v^2 - 1) \frac{v}{a}.$$

W czasie tego ruchu kreda przebywa drogę  $\frac{1}{2} a_2 t_2^2$ ,

czyli 
$$\frac{1}{2} \frac{v^2}{2s} \left( \frac{2as}{v^2} - 1 \right)^2 \frac{v^2}{a^2}.$$

Długość smugi zastawianej przez kredę na transporterze jest zatem równa

$$s_1 = \frac{1}{2} \left( a - \frac{v^2}{2s} \right) \frac{v^2}{a^2} + \frac{1}{2} \frac{v^2}{2s} \left( \frac{2as}{v^2} - 1 \right)^2 \frac{v^2}{a^2},$$

czyli

$$s_1 = \left( a - \frac{v^2}{2s} \right) \frac{s}{a}.$$

Liczbowo

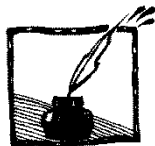
$$s_1 = 2,5 \text{ m}.$$

W zadaniach takich bardzo łatwo jest popełnić gruby błąd związany z prawem zachowania energii. Wyjaśnijmy dokładniej, o co chodzi. Weźmy pod uwagę sytuację, gdy kredę kładziemy na transporter. Na pierwszy rzut oka mogłoby się wydawać, że w celu wyznaczenia długości smugi  $s$  zakreślonej przez kredę, można skorzystać z rozważań energetycznych w układzie nieruchomym względem, powiedzmy, podłogi. W układzie tym transporter porusza się z prędkością  $v$ . Można by sądzić, że całkowita energia mechaniczna kredy tuż przed położeniem na transporter (równa zero) powinna być równa sumie pracy sił tarcia podczas kreślenia smugi ( $= fmg s$ ) i końcowej całkowitej energii kinetycznej kredy ( $= \frac{1}{2} m v^2$ ):

$$0 = fmg s + \frac{1}{2} m v^2.$$

Otóż równanie to nie może być prawdziwe. Po lewej stronie mamy zero, a po prawej wielkość dodatnią! Rzecz w tym, że w rozważaniach powyższych nie uwzględniliśmy pracy silników zapewniających równomierne przesuwanie się pasa transportera niezależnie od tego, co się dzieje z kredą. To właśnie kosztem pracy silników kreda wykonuje pracę podczas przesuwania się po transporterze i kosztem pracy silników nabywa ona energii kinetycznej.

Kłopotów powyższych oczywiście nie mamy prowadząc rozważania w układzie związanym z jednostajnie przesuwanym się pasem transportera.



## Widma absorpcyjne barwnika czerwonej kapusty

*Jerzy Ginter*

*Uniwersytet Warszawski*

Dobrze wiemy, że w chemii do badania pH wykorzystuje się barwniki, które mają inny kolor w roztworze kwaśnym, a inny w zasadowym. Najbardziej znany jest chyba otrzymywany z porostów lakmus – „papierek lakmusowy” stał się zwrotem przysłowiowym. Podobne właściwości ma też barwnik kapusty, którą warszawiacy nazywają czerwoną, a poznaniacy i Ślązacy modrą. Stąd propozycja interdyscyplinarnego doświadczenia: zbadania widm absorpcyjnych tego barwnika.

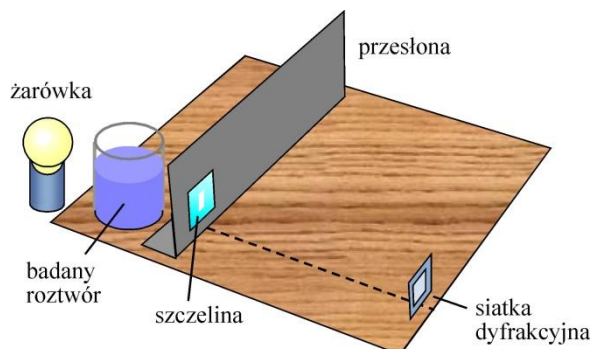
Na marginesie warto zauważyć, że badanie takich widm stanowi standardową metodę, stosowaną zarówno przez chemików, jak i biologów.

### Aparatura

Do doświadczenia potrzebne są: siatka dyfrakcyjna 500 rys/mm, lampa stojąca z matową żarówką „tradycyjną” (z włóknem wolframowym), stół, stołek, dwie klamery do bielizny, nieprzezroczysty karton (najlepiej czarny) lub tektura o wymiarach około 20 cm × 40 cm, gruba folia aluminiowa (do pakowania kwiatów) 5 cm × 5 cm, ostry nóż, taśma klejąca, 4 szklanki, wsporniki i podkładki (na przykład książki), czerwona kapusta, ocet, soda, stalowa łyżka, palnik gazowy (kuchenny). Może się także przydać aparat fotograficzny (np. w telefonie komórkowym).

### Układ optyczny

1. Zrób z czarnego kartonu nieprzezroczystą przesłonę ze szczeliną, tak jak to przedstawia rysunek 1. Szczelinę można wykonać bezpośrednio w kartonie. Zwykle nie jest ona najlepsza, bo ma postrzępione brzegi. Dlatego lepiej zrobić w kartonie nieco większy otwór (np. 3 cm × 3 cm) i przykleić do niego szczelinę naciętą nożem (równo od linijki!) w kawałku folii aluminiowej. Wysokość szczeliny powinna wynosić około 2 cm, a szerokość około 1 mm. Widma absorpcyjne, które będziemy badać, są dość szerokie, szczelina nie musi być bardzo wąska. Zależy nam bardziej na tym, aby widma były jasne.
2. Ustaw pionowo przesłonę w odległości około 10 cm od krawędzi stołu (rys. 1). Możesz podeprzeć ją np. książkami.
3. Po drugiej stronie stołu ustaw pionowo siatkę dyfrakcyjną. Jako wsporników możesz użyć dwóch klamer do bielizny, tak jak to przedstawia rys. 2.
4. Za szczeliną umieść lampę z żarówką. Obejrzyj okiem przez siatkę dyfrakcyjną widmo żarówki.



Rys. 1. Układ doświadczalny



Rys. 2. Wsporniki do siatki dyfrakcyjnej

### Ciecze do badania

1. Ugotuj w wodzie kilka liści czerwonej kapusty. Należy uzyskać około 600 ml roztworu barwnika. Roztwór nie powinien być zbyt nasycony, żeby nie zaabsorbował całego promieniowania żarówki. Roztwór wlej do trzech szklanek (kolorowa fot. 1 na okładce).
2. Jedną szklankę pozostaw bez zmian. To będzie barwnik kapusty w roztworze w przybliżeniu obojętnym.
3. Do drugiej szklanki dolej octu. To będzie barwnik w środowisku kwaśnym.
4. W trzeciej szklance będzie barwnik w środowisku zasadowym. Aby ten roztwór przygotować, nabierz na łyżkę niewielką ilość sody (ćwierć łyżeczki) i wypraż ją nad palnikiem gazowym. Wyprażoną sodę wsyp do szklanki.

Uwaga. Soda jest wodorowęglanem sodu  $\text{NaHCO}_3$ . Wyprażając ją uzyskujemy węglan sodu:



Nie dodawaj do roztworu wodorotlenku sodu  $\text{NaOH}$  (np. *Kreta* do przetykania rur kanalizacyjnych), bo pod jego wpływem barwnik czerwonej kapusty się rozkłada.

5. Do czwartej szklanki nalej czystej wody.

**Obserwacje**

1. Umieść po kolei przed szczeliną szklankę z czystą wodą, a potem trzy szklanki z barwnikiem.
2. Obejrzyj uzyskane widma absorpcyjne.
3. Wykonaj dodatkowo – po kolei i bez zmiany ustawienia aparatu fotograficznego – zdjęcia widm światła żarówki, przechodzącego przez wszystkie cztery szklanki. Przenieś je do komputera, wytnij za pomocą programu graficznego, umieść jedno nad drugim i porównaj (kolorowa fot. 2 na okładce).

**Inne propozycje**

Kiedy już mamy odpowiednią aparaturę, możemy przebadać widma absorpcyjne innych barwników organicznych. Proponuję: chlorofil (barwnik E140, zupa szczawiowa), betaninę (E162, barszcz) i karoten (E160, sok z marchewki).

Kolorowe zdjęcia do tego artykułu wykonał aparatem komórkowym pan Adrian Kurkowski, słuchacz Studium Podyplomowego dla Nauczycieli na Wydziale Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego.



## Studenci poszukiwani

Ośrodki z koherencją kwantową  
– nowe właściwości i zastosowania

Wojciech Gawlik  
Instytut Fizyki UJ

Zespół prof. Wojciecha Gawlika w Zakładzie Fotoniki Instytutu Fizyki Uniwersytetu Jagiellońskiego wyłoni w drodze konkursu **trzech studentów** zainteresowanych pracą doświadczalną nad ośrodkami z koherencjami kwantowymi w ultrazimnych atomach.

W ramach projektu finansowanego przez Fundację na Rzecz Nauki Polskiej przewidziany jest udział w eksperymentach z ultrazimnymi atomami rubidu w optycznej pułapce dipolowej, kryształami diamentu z centrami barwnymi oraz pomiarami ultrasłabych pól magnetycznych. W dalszej kolejności przewidziane są badania zjawisk magnetoptycznych w układach zimnych atomów oraz w kondensatach Bosego-Einsteina i doświadczenia z zakresu inżynierii stanów kwantowych.

Zatrudnienie obejmie okres 1.09.2012–31.08.2013 i będzie związane z wypłatą **stypendium w wysokości 1000 zł/miesiąc**.

Kandydaci powinni:

1. Być studentami II stopnia fizyki, zaawansowanych materiałów i nanotechnologii lub pokrewnych dyscyplin.
2. Wykazywać zainteresowanie pracą eksperymentalną zwłaszcza w zakresie fizyki atomowej i molekularnej, optyki, fotoniki i elektroniki.
3. Posiadać dobrą znajomość języka angielskiego.

Wymagane dokumenty:

1. Życiorys.
2. Kopię pracy licencjackiej (jeśli była wykonana).
3. Oceny egzaminów i zaliczeń.
4. Opis dotychczasowej pracy naukowej (publikacje, praktyki, staże itp.).

Zgłoszenia do 22.06.2012 na adres **gawlik@uj.edu.pl** z zaznaczeniem tematu „TEAM application”. Rozmowy kwalifikacyjne są planowane w okresie 25–29.06.2012. Więcej informacji: <http://www.if.uj.edu.pl/team>

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Rozwoju Regionalnego.



**INNOWACYJNA GOSPODARKA**  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA  
EUROPEJSKI FUNDUSZ  
ROZWOJU REGIONALNEGO





## 4 medale na ICYS 2012 w Holandii

*Urszula Woźnikowska-Bezak*

Grupa Twórcza Quark Pracowni Fizyki Pałacu Młodzieży w Katowicach po raz kolejny reprezentowała Polskę podczas XIX Międzynarodowej Konferencji Młodych Naukowców (19<sup>th</sup> International Conference of Young Scientists), która odbyła się w dniach 16–23 kwietnia 2012 w Nijmegen na Uniwersytecie Radboud (Holandia). W 2010 roku naukowcy z tej właśnie uczelni otrzymali Nagrodę Nobla w dziedzinie fizyki za badania związane z grafenem. Wszyscy uczestnicy konferencji są laureatami ogólnopolskich konkursów organizowanych przez Pracownię Fizyki Pałacu Młodzieży w Katowicach i członkami Grupy Twórczej Quark, która co roku reprezentuje Polskę na wielu zawodach w kraju i za granicą.

W tegorocznej konferencji udział wzięło około 200 uczestników z 22 państw: Holandii, Niemiec, Czech, Białorusi, Ukrainy, Litwy, Indonezji, Rumunii, Brazylii, Chorwacji, Tajlandii, Węgier, Tajwanu, Chin, Malezji, Korei, Gruzji, Serbii, Iranu, Rosji, Turcji oraz Polski. Członkami jury byli naukowcy, nauczyciele, przedstawiciele wszystkich państw. Zawody odbyły się w kategoriach: fizyka teoretyczna, fizyka eksperymentalna, ekologia, biofizyka, matematyka i informatyka.

Polscy uczestnicy zdobyli następujące medale i wyróżnienia:

Kategoria: Fizyka

**srebrny medal – Mariusz Nowak – „Solitony”**

**srebrny medal – Filip Maśka – „Materiały sypkie a grawitacja”**

Kategoria: Fizyka stosowana

**srebrny medal – Tomasz Tokarski – „Balon- zbiornik energii”**

**brązowy medal – Łukasz Perenc – „Uciekające koraliki”**

Wypowiedzi laureatów:

**Mariusz Nowak – medal srebrny – VIII LO w Katowicach – „Solitony”**

Solitonami zainteresowałem się rok temu, gdy przygotowywałem na ICYS w Moskwie pracę o akustyce pocieranych „śpiewających” mis. Solitony to specyficzne nieliniowe fale, które poruszają się nie zmieniając swojego kształtu, a także wykazują pewne właściwości cząstek materialnych. Do badań solitonów podszedłem na dwa sposoby – matematyczny (praca na Ogólnopolski Sejmik Matematyków) i eksperymentalny, dużo bardziej złożony. W ramach projektu na ICYS zbudowałem dwie falownice dla solitonów (liniową i kołową), które wykorzystałem do wykonania zaplanowanych eksperymentów. Na koniec napisałem program modelujący solitony mechaniczne w falownicy. Ciekawymi właściwościami solitonów typu „kink”, które badałem, są m.in. zachowanie

podobne do cząstki relatywistycznej (prędkością ograniczoną dla solitonów w falownicy jest prędkość rozchodzenia się w niej fal liniowych), a także występowanie „antycząstek” dla solitonów. Nowościami w mojej pracy są nieopisywane w znanej mi literaturze ulepszenie falownicy liniowej, które umożliwiło mi badanie solitonów w studniach potencjału, jak również konstrukcja zupełnie nowej falownicy kołowej. Dla współczesnej nauki bardzo ważna jest fizyka mielinowa, w której istotną rolę odgrywają solitony.

**Filip Maśka – medal srebrny** – II LO im. Ziemi Olkuskiej w Olkuszu – „Materiały sypkie a grawitacja”

Celem pracy jest badanie zależności szybkości przesypywania się piasku w klepsydrze od wartości natężenia pola grawitacyjnego. Dane te mogą okazać się przydatne w procesie wydobywania i składowania materiałów sypkich na obszarach pozaziemskich. Układ eksperymentalny składa się z własnoręcznie wykonanej wirówki umożliwiającej symulację różnorodnych wartości przyspieszenia grawitacyjnego. Doświadczenie pozwoliło potwierdzić założenia modelu teoretycznego, według którego szybkość przesypu materiału sypkiego przez otwór klepsydry jest wprost proporcjonalna do pierwiastka kwadratowego z  $g$ .

**Tomasz Tokarski – medal srebrny** – I LO Bytom – „Balon – zbiornik energii”

Balony to zabawki, którymi bawił się pewnie każdy nie tylko w dzieciństwie. Jednak czy kiedykolwiek zastanawiałeś się nad tym, ile kryje się za tym fizyki. Balony okazują się bardzo dobrymi zbiornikami energii. Można ją w nich magazynować poprzez skręcanie balonów lub tradycyjne pompowanie balonów powietrzem. Aby porównać te dwie metody zbudowałem dwa pojazdy napędzane balonami. Po przeprowadzeniu licznych eksperymentów doszedłem do wniosku, że lepszą metodą jest gromadzenie sprężonego powietrza. Optymalizacja tej metody poprzez m.in. umieszczenie balonu pod wodą sprawiło, iż taka metoda gromadzenia energii może znaleźć zastosowanie w przyszłości.

**Lukasz Perenc – medal brązowy** – IV LO Sosnowiec – „Uciekające koraliki”

Wielu z nas w dzieciństwie bawiło się łańcuchem świątecznych koralików. Gdy wyciągnęliśmy odpowiednio długi fragment łańcucha z naczynia, koraliki zaczynały przyspieszać, robiąc przy tym wiele hałasu. Jednakże, czy zauważyliście, że koraliki czasami odrywają się od ścianki naczynia? Fenomenem koralików wydostających się z naczynia, zainteresowałem się po pokazie Leonida Markovicha w Pałacu Młodzieży w Katowicach. Postanowiłem zbadać ten problem eksperymentalnie. Zjawisko to okazało się bardzo złożone. Udało mi się dojść do wniosku, że za „podskoki” koralików odpowiada siła odśrodkowa. Zbadałem również efektywny współczynnik tarcia koralików o szklaną i opisałem wszystkie zależności wzorami.

**Agnieszka Seweryn – IV LO im. Orłów Lwowskich w Gliwicach** – „Mini chłodziarka Peltiera”

Celem mojej pracy jest stworzenie wielofunkcyjnego urządzenia, które dzięki swojej mobilności może być znacznym ułatwieniem każdej podróży. Łączy ona w sobie funkcjonalność chłodziarki, suszarki do włosów i suszarki do paznokci. W tym celu wykorzystalam element chłodzący w postaci Modułu Peltiera i specjalnie zoptymalizowanej komory chłodzenia. Oprócz podstawowych zastosowań, układ doświadczalny może być też wykorzystany jako elektroniczny kalorymetr z dokładnym pomiarem temperatury za pomocą trzech sensorów DS18B20.



**Eliza Basińska** – III LO im. A. Mickiewicza w Katowicach – „Granularny rozbryzg”

Po zrzućeniu stalowej kuli na podłozę w postaci luźnego piasku, następuje rozbryzg, a następnie do góry wystrzeliwuje kolumna piasku. W mojej pracy wyjaśniłam przyczyny zjawiska opierając się na prawach fizycznych i modelu matematycznym. Odtworzyłam również cały przebieg eksperymentu. Ponadto zbadalam, jak głęboćość zanurzenia się kuli w piasek zależy od napowietrzenia piasku i wysokości, z której została zrzuciona kula. Wykazałam, że wyniki moich badań prawie idealnie pokrywają się z teorią.

**Paweł Promny** – VIII LO w Katowicach – „Efekt magnetokaloryczny”

Tematem mojej pracy badawczej jest efekt magnetokaloryczny, polega on na tym, że temperatura paramagnetyków rośnie, gdy poddamy je wpływowi pola magnetycznego. Podstawy teoretyczne tego ciekawego efektu bazują na zmianach entropii. Przeprowadziłem serie doświadczeń, w których badałem wpływ różnych parametrów na wartość przyrostu temperatury oraz w bardzo dokładny sposób wyznaczyłem temperaturę Curie gadolinu, którego używałem do badań. Wykonałem także pomiary z użyciem kamery termowizyjnej. Wykonanie tej pracy badawczej przyniosło mi wiele nowych doświadczeń i pomogło lepiej zrozumieć pewne zjawiska z działu magnetyzmu.

**Katarzyna Trzaska** – II LO im. S. Wyspiańskiego w Kwidzynie – „Badania nad okresem drgań wahadła fizycznego”

Celem mojej pracy było obliczenie zredukowanej długości dla mojego wahadła oraz udowodnienie, że jeśli nakleimy dodatkową masę w miejscu osi obrotu, to okres drgań będzie taki sam jak bez tej masy. Gdy masę nakleimy w innych miejscach, okres drgań zmieni się. Dokładnie zbadalam to zjawisko, a moje eksperymenty pokryły się z modelem teoretycznym.

Opiekunami naukowymi Grupy Twórczej Quark są prof. dr hab. Władysław Borgiel z Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach, dr Joachim Gmyrek z Politechniki Śląskiej oraz prof. dr hab. Maciej Maśka z Uniwersytetu Śląskiego.

Opiekunami Polskiej Reprezentacji byli: Urszula Woźnikowska-Bezak – fizyk, członek zarządu Międzynarodowej Konferencji Młodych Naukowców oraz Prezes Stowarzyszenia z Nauką w Przyszłość Jakub Polewka, student Politechniki Warszawskiej, wieloletni członek Grupy Twórczej Quark Pałacu Młodzieży w Katowicach. Grupie towarzyszył prof. dr hab. Maciej Kolwas, Prezydent Europejskiego Towarzystwa Fizycznego.

W czasie konferencji organizatorzy zapewnili nam mnóstwo atrakcji, między innymi: wizytę w ogromnym Burger's ZOO, zwiedzanie Nijmegen, kolację na ekskluzywnej łodzi płynącej z Arnhem do Nijmegen, pokazano nam eksperymenty związane z genetyką na Uniwersytecie Radboud. Odbyło się wiele interesujących wykładów związanych z różnymi dziedzinami nauki.

Serdecznie dziękujemy za wsparcie organizacyjne Katowickiemu Holdingowi Węglowemu, Miejskiemu Przedsiębiorstwu Gospodarki Komunalnej w Katowicach, Ministerstwu Nauki i Szkolnictwa Wyższego, Wojewódzkiemu Fundusowi Ochrony Środowiska i Gospodarki Wodnej w Katowicach.



## Lew D. Landau w filatelistyce

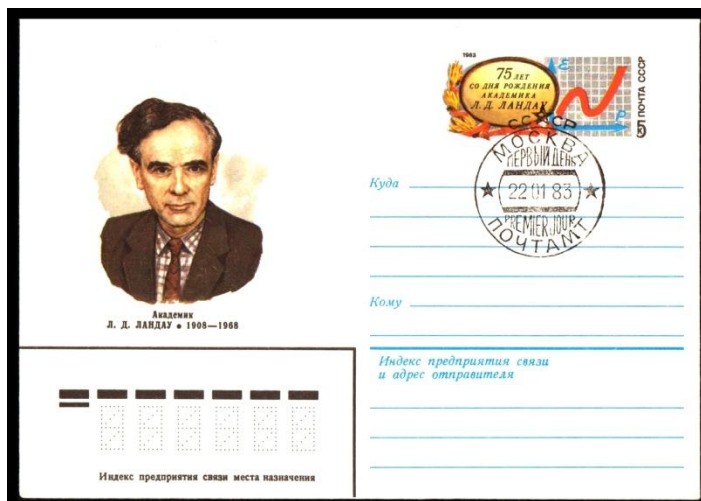
*Jerzy Bartke*

*Instytut Fizyki Jądrowej PAN w Krakowie*

W 1983 roku, w 75. rocznicę urodzin Landaua, poczta ZSRR wydała kopertę-całostkę z podobizną uczonego. Na znaku opłaty (5 kop.) umieszczono diagram fazowy i okolicznościowy napis.

W 2008 roku, w 100. rocznicę urodzin Landaua, poczta Rosji wydała znaczek o nominale 6 rubli z jego podobizną.

Reprodukujemy obie pozycje.



Lew D. Landau był wraz z Jewgienijem M. Lifszycem współautorem monumentalnego wielotomowego dzieła pt. *Kurs fizyki teoretycznej*, na którym wykształciły się pokolenia fizyków w wielu krajach.

## Widma absorpcyjne barwnika czerwonej kapusty



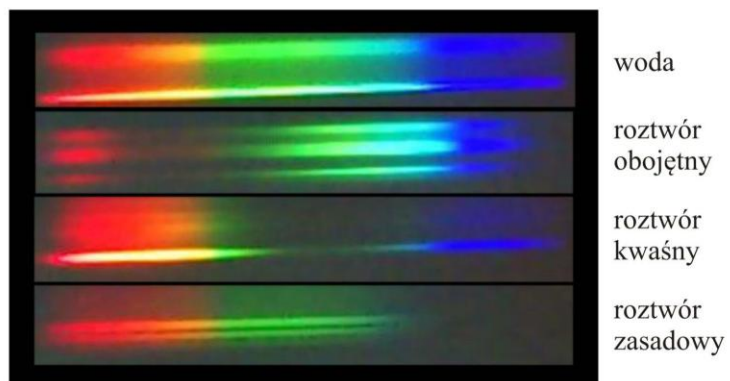
roztwór  
obojętny

roztwór  
zasadowy

roztwór  
kwaśny

woda

Fot. 1. Badane ciecze



Fot. 2. Widma absorpcyjne