Numeryczny opis zjawiska zaniku

Jerzy Ginter
Wydział Fizyki UW

Postawienie problemu

W wielu zagadnieniach z różnych działów fizyki spotykamy się z następującym problemem: zmiany w czasie t pewnej wielkości W, są proporcjonalne ze znakiem minus do samej tej wielkości. Możemy to sformułować następująco – nie dbając na razie o precyzję. Przypuśćmy, że upłynął dostatecznie krótki przedział czasu Δt. Wielkość W zmieniła się o małe ΔW. Zapiszemy to:

$$\frac{\Delta W}{\Delta t} = -cW, \tag{1}$$

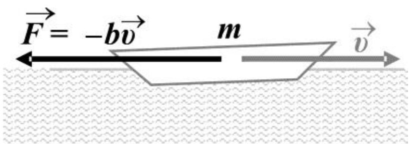
gdzie c jest stałą, charakterystyczną dla omawianego procesu.

Przypomnijmy kilka ogólnie znanych przykładów.

Przykład 1

Ruch ciała o masie m pod wpływem siły oporu, proporcjonalnej do prędkości v (rys. 1):

$$F = -bv, \tag{2}$$



Rys. 1. Siła oporu

gdzie b jest stałą. Równanie ruchu ma postać:

$$F = ma. \tag{3}$$

Przyspieszenie a to w przybliżeniu:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}. \tag{4}$$

Zbierając wzory (2)–(4) otrzymujemy:

$$-bv = m\frac{\Delta v}{\Delta t}. \tag{5}$$

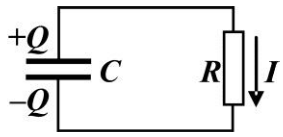
Dostaliśmy więc równanie o postaci 1:

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = -\frac{b}{m}v. \tag{6}$$

Przykład 2

Rozładowanie kondensatora o pojemności C przez opór R (rys. 2). Dla takiego obwodu napięcie na kondensatorze jest równe

$$V_C = \frac{Q}{C}; \tag{7}$$



Rys. 2. Obwód *RC*

gdzie *Q* oznacza ładunek. Napięcie to jest równe napięciu na oporze, czyli *RI*:

$$V_C = RI. \tag{8}$$

Przypomnijmy, że

$$I = -\frac{\Delta Q}{\Delta t}. \tag{9}$$

Znak minus bierze się stąd, że natężenie prądu w obwodzie jest dodatnie, kiedy *Q* na kondensatorze maleje.

Z wzorów (7)–(9) wynika równanie:

$$\frac{Q}{C} = -R\frac{\Delta Q}{\Delta t}, \tag{10}$$

czyli

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = -\frac{1}{RC}Q. \tag{11}$$

Przykład 3

Rozpad promieniotwórczy. Prawdopodobieństwo rozpadu jądra nietrwałego pierwiastka jest stałe. Oznaczmy liczbę jąder symbolem *N*. W ciągu krótkiego czasu Δt liczba jąder zmienia się o

$$\Delta N = -\lambda N \Delta t. \tag{12}$$

Wielkość λ nazywamy stałą rozpadu. Z (12) wynika

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = -\lambda N. \tag{13}$$

To tylko parę przykładów.

Dla rozpadu promieniotwórczego wprowadza się jeszcze jedną stałą charakterystyczną: okres połowicznego zaniku $T_{1/2}$. Jest to czas, w którym liczba jąder *N* maleje dwukrotnie.

Rozwiązanie ścisłe

Jeżeli znamy rachunek różniczkowy, rozumujemy następująco: przechodzimy we wzorze (1) do granicy dla $\Delta t \to 0$. Wtedy po lewej pojawi się pochodna $W(t)$, wzięta w chwili *t*, a po prawej samo $W(t)$, wzięte w chwili *t*:

$$\frac{dW(t)}{dt} = -aW(t) \tag{14}$$

Mamy więc do czynienia z równaniem różniczkowym, które omawia się w elementarnym kursie analizy matematycznej. Wiadomo, że rozwiązanie tego równania ma postać (co łatwo sprawdzić przez podstawienie):

$$W(t) = W_0 e^{-ct}, \tag{15}$$

gdzie W_0 określa początkową wartość wielkości W.

Możemy więc nazwać (14) **równaniem zaniku wykładniczego**.

Korzystając ze wzoru (15) można od razu obliczyć czas $T_{1/2}$, po którym wartość wielkości $W(t)$ maleje dwukrotnie:

$$\frac{W(T_{1/2})}{W_0} = -e^{-aT_{1/2}} = \frac{1}{2} = e^{-\ln 2} \tag{16}$$

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{a} \approx \frac{0,69315}{a}. \tag{17}$$

Wrócimy do tej sprawy w końcowej części artykułu.

Opis numeryczny 1

Co jednak zrobić, jeżeli nasi uczniowie czy słuchacze nie znają analizy matematycznej? Wtedy problem można rozwiązać w sposób przybliżony, posługując się prostym rachunkiem numerycznym.

W opisie numerycznym rozumujemy następująco: przyjmujemy na osi czasu siatkę punktów t_n odległych o Δt. Oznacza to:

$$t_n = n\Delta t, \tag{18}$$

$$\Delta t = t_{n+1} - t_n. \tag{19}$$

Przedział czasu Δt powinien być dostatecznie krótki, aby w trakcie jego trwania nastąpiła mała zmiana wielkości W:

$$\Delta W = W_{n+1} - W_n. \tag{20}$$

To wyrażenie podstawimy po lewej stronie wzoru (1).

Co jednak podstawić po stronie prawej? Najprościej powiedzieć: w czasie Δt wielkość W mało się zmienia. W miejsce W podstawmy więc jego wielkość z początku przedziału, czyli W_n. Dostaniemy wtedy równanie:

$$\frac{W_{n+1} - W_n}{\Delta t} = -cW_n. \tag{21}$$

Obliczmy stąd W_{n+1}:

$$W_{n+1} - W_n = -c\Delta t W_n \tag{22}$$

$$W_{n+1} = (1 - c\Delta t)W_n . \qquad (23)$$

Wyrażenie to może być podstawą rachunku numerycznego:

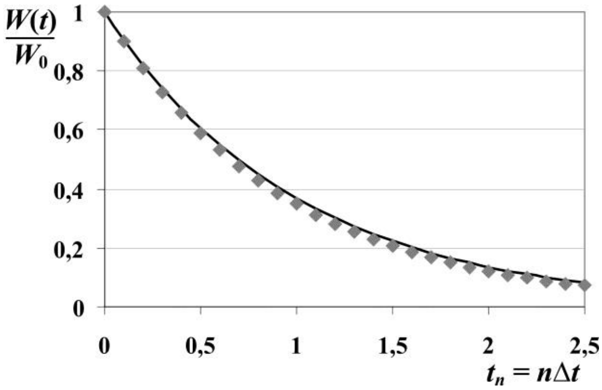
$$W_1 = (1 - c\Delta t)W_0 \qquad (24)$$

$$W_2 = (1 - c\Delta t)W_1 = (1 - c\Delta t)(1 - c\Delta t)W_0 = W_2 = (1 - c\Delta t)^2 W \qquad (25)$$

$$\ldots\ldots$$

$$W_n = (1 - c\Delta t)^n W_0 . \qquad (26)$$

Wyniki obliczeń dla $c = 1$ i $\Delta t = 0{,}1$ przedstawiono na rys. 3. Nasze obliczenia numeryczne za pomocą programu Excel (Rozpad*) dają spadek nieco zbyt szybki. Nie powinno nas to dziwić, bo we wzorze (21) wzięliśmy wielkość W_n z początku przedziału, czyli nieco za dużą.



Rys. 3. Wynik obliczeń numerycznych 1

Dyskusja

Przedyskutujmy uzyskany wynik.

1. Po pierwsze – wykazaliśmy, że $W(t)$ jest zależnością **wykładniczą**. Jest to funkcja malejąca, bo dla małych wartości iloczynu $c\Delta t$ zawartość nawiasu we wzorze (26) jest liczbą dodatnią, mniejszą od jedności. Jest to wniosek jakościowy, zgodny ze wzorem (15).
2. Możemy także zastanowić się, jak dobry jest ilościowy opis naszego problemu. Ścisłe wyrażenie (15) dla czasów $t_n = n\Delta t$ przyjmuje wartości:

$$W_n = W(t_n) = W_0 e^{-c(n\Delta t)} = W_0 (e^{-c\Delta t})^n . \qquad (27)$$

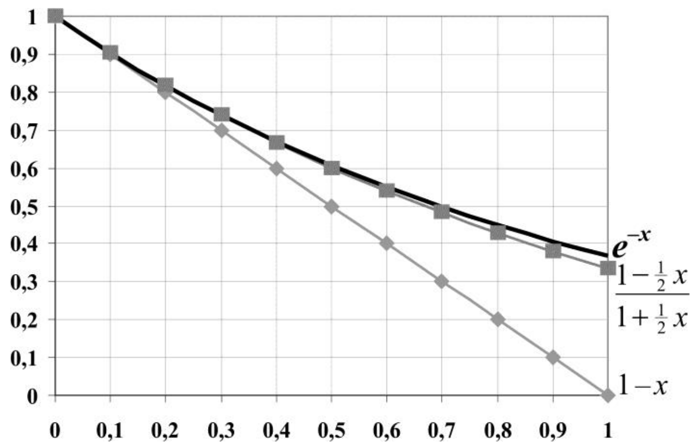
* W wersji internetowej.

Porównując wzory (26) i (27), możemy więc zapytać, kiedy $1 - c\,\Delta t$ dobrze przybliża ścisłą wartość $e^{-c\Delta t}$? Można to wywnioskować z poniższej tabeli i rys. 4. Przy okazji zauważmy, że rozkład funkcji e^{-x} na szereg Taylora ma postać

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \ldots \tag{28}$$

Przybliżenia funkcji e^{-x}

x	$1-x$	$\frac{1-x/2}{1+x/2}$	e^{-x}
0	1	1	1
0,1	0,9	0,90476	0,90484
0,2	0,8	0,81818	0,81873
0,3	0,7	0,73913	0,74082
0,4	0,6	0,66667	0,67032
0,5	0,5	0,6	0,60653
0,6	0,4	0,53846	0,54881
0,7	0,3	0,48148	0,49659
0,8	0,2	0,42857	0,44933
0,9	0,1	0,37931	0,40657
1	0	0,33333	0,36788



Rys. 4. Porównanie funkcji: e^{-x}, $\frac{1-\frac{1}{2}x}{1+\frac{1}{2}x}$ i $1-x$

Zatem nasze obliczenia są równoważne przybliżeniu e^{-x} z dokładnością do pierwszego wyrazu rozwinięcia. Wynika stąd dalej, że jeżeli chce się uzyskać dobry opis ilościowy, należy tak dobrać Δt, aby $c\Delta t$ było małe.

Opis numeryczny 2

Znacznie lepszą dokładność obliczeń można uzyskać, jeżeli użyje się pewnego triku: za W po prawej stronie równania (1) wstawiamy średnią arytmetyczną W_n i w zasadzie jeszcze nieznane W_{n+1}:

$$W \approx \frac{W_{n+1} + W_n}{2}. \tag{29}$$

Równanie (1) przybiera wtedy postać:

$$\frac{W_{n+1} - W_n}{\Delta t} = -c\frac{W_{n+1} + W_n}{2}. \tag{30}$$

Przekształćmy je:

$$W_{n+1} - W_n = -\frac{c\Delta t}{2}W_{n+1} - \frac{c\Delta t}{2}W_n \tag{31}$$

$$W_{n+1}\left(1 + \tfrac{1}{2}c\Delta t\right) = W_n\left(1 - \tfrac{1}{2}c\Delta t\right) \tag{32}$$

$$W_{n+1} = W_n\frac{1 - \frac{1}{2}c\Delta t}{1 + \frac{1}{2}c\Delta t}. \tag{33}$$

Rozumując podobnie jak w poprzednim paragrafie znajdziemy wyrażenie na W_n:

$$W_n = W_0\left(\frac{1 - \frac{1}{2}c\Delta t}{1 + \frac{1}{2}c\Delta t}\right)^n. \tag{34}$$

Dyskusja

Przedyskutujmy uzyskany wynik.

1. Po pierwsze – ponownie stwierdzamy, że $W(t)$ jest zależnością **wykładniczą**. Jest to funkcja malejąca, bo dla małych wartości iloczynu $c\Delta t$ wartość nawiasu we wzorze (34) jest liczbą dodatnią, mniejszą od jedności.
2. Po drugie – stosując wzór (34) można łatwiej uzyskać dobry ilościowy opis zjawisk, niż za pomocą wzoru (26). Funkcja

$$f(x) = \frac{1 - \frac{1}{2}x}{1 + \frac{1}{2}x} \tag{35}$$

jest lepszym przybliżeniem e^{-x} niż $1 - x$. Przedstawia to tabela i rys. 4.

Przybliżenie to staje się zrozumiałe, jeżeli bierze się pod uwagę rozkłady funkcji na szeregi potęgowe:

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \ldots \tag{36}$$

$$f(x) = \frac{1 - \frac{1}{2}x}{1 + \frac{1}{2}x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{4} + \ldots \tag{37}$$

Trzy pierwsze wyrazy szeregów są jednakowe, różnica pojawia się dopiero przy członie x^3.

Przykład

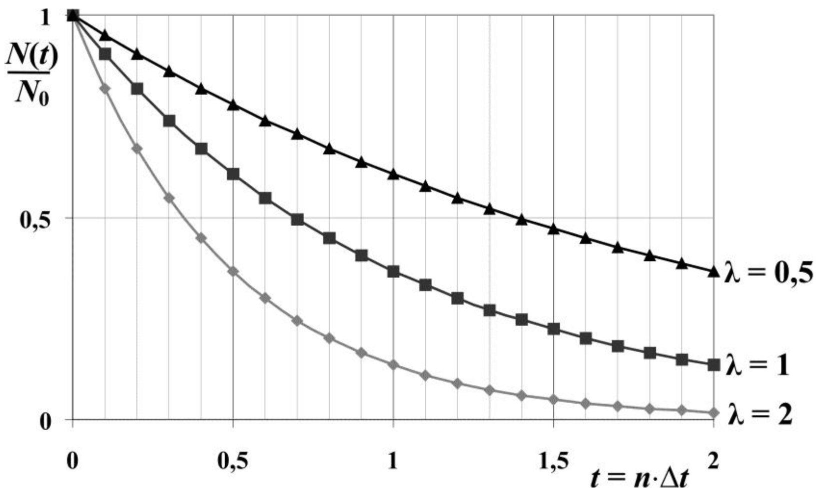
Zastosujmy powyższe rozważania do rozpadu promieniotwórczego, opisanego wzorem (5). Wzór (13) ma dla drugiego opisu numerycznego postać (zmodyfikowany wzór (30)):

$$\frac{N_{n+1} - N_n}{\Delta t} = -\lambda \frac{N_{n+1} + N_n}{2}. \tag{38}$$

Odpowiada mu rozwiązanie (wzór 36):

$$\frac{N_n}{N_0} = \left(\frac{1 - \frac{1}{2}\lambda\Delta t}{1 + \frac{1}{2}\lambda\Delta t} \right)^n. \tag{39}$$

Rysunek 5 przedstawia wyniki obliczeń dla dowolnie wybranego Δt = 0,1 s i trzech wartości stałej rozpadu λ równych 0,5, 1 i 2.



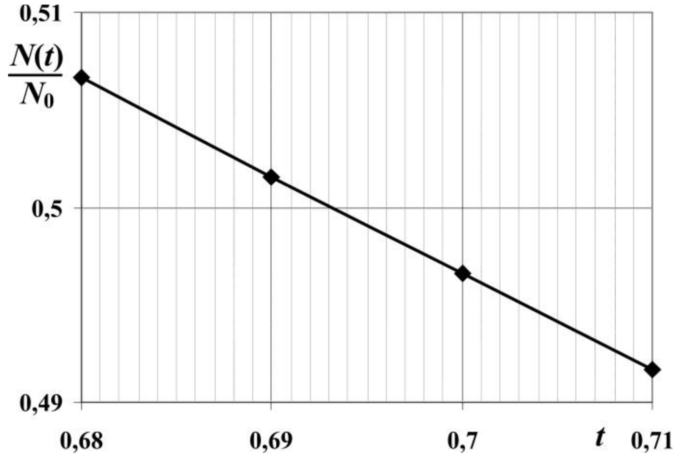
Rys. 5. Zależność liczby jąder od czasu dla trzech wartości stałej rozpadu λ

1. W fizyce jądrowej **okresem połowicznego zaniku** $T_{1/2}$ nazywamy czas, po którym liczba rozpadających się jąder N spada do połowy.
   a. Zauważamy, że dla λ równych 0,5, 1 i 2 czasy połowicznego zaniku w przybliżeniu są równe odpowiednio 1,4 s; 0,7 s i 0,35 s. Obliczenia numeryczne zawarte są w excelowskim pliku *Rozpad*.

b. Na tej podstawie wnioskujemy, że okres połowicznego zaniku jest odwrotnie proporcjonalny do stałej rozpadu λ. Zachodzi przybliżona zależność (porównaj wzór (17); c trzeba zmienić na λ):

$$T_{1/2} \approx \frac{0{,}7}{\lambda}\,\mathrm{s}\,. \tag{40}$$

2. Aby dokładniej wyznaczyć wartość licznika we wzorze (25) warto w obliczeniach dziesięciokrotnie zmniejszyć Δt – do 0,01 s – i sporządzić dla $\lambda = 1$ wykres zależności N/N_0 od czasu dla takich t, dla których N/N_0 jest bliskie 0,5. Przedstawia to rys. 6. Dla $\lambda = 1$ wartość $T_{1/2} \approx 0{,}693$ (porównaj wzór 7). Widać, że nasze proste obliczenia numeryczne pozwoliły uzyskać zupełnie dobrą dokładność ilościową.



Rys. 6. Dokładniejsze wyznaczanie okresu połowicznego zaniku