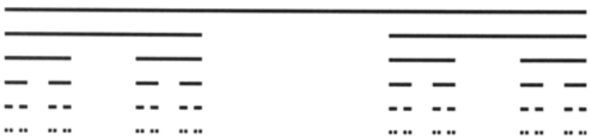
Co wspólnego ze sztuką ma reaktor chemiczny?

Marek Berezowski
Politechnika Śląska, Wydział Matematyczno-Fizyczny
Instytut Matematyki, Gliwice

W lutowym numerze *Świata Nauki* 2003 roku ukazał się ciekawy artykułu Richarda P. Taylora, profesora fizyki Uniwersytetu Stanu Oregon [1], dotyczący matematyczno-komputerowej analizy wybranych dzieł malarza Jacksona Pollocka. Jeden z obrazów artysty prezentuje rysunek 1.

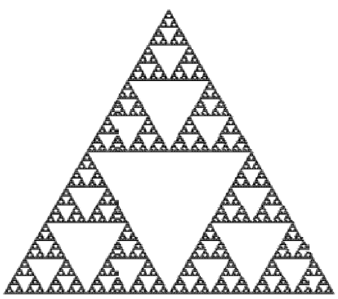
Rys. 1. Obraz Pollocka. *Eyes heat*

W swoim artykule Taylor główną uwagę skupił na wykazaniu, iż stworzone przez Pollocka artystyczne struktury mają charakter fraktalny. Udowodnił, iż fragmenty obrazu mają ten sam wymiar co cały obraz. Cechą fraktali jest bowiem to, że fragment danej struktury geometrycznej, powiększony odpowiednią ilość razy, przypomina całość i ma, w przybliżeniu, ten sam wymiar co całość. Taylor wykazał ponadto, iż wymiar struktur geometrycznych stworzonych przez Pollocka wzrastał na przestrzeni lat od D = 1,12 do 1,90. Oznacza to, że na kolejnych płótnach stawały się one coraz bardziej złożone. Przypomnijmy, że D = 0 oznacza przestrzeń o zerowym wymiarze, czyli punkt. D = 1 oznacza z kolei przestrzeń jednowymiarową, czyli linię, D = 2 – przestrzeń dwuwymiarową, czyli płaszczyznę, natomiast D = 3 – przestrzeń trójwymiarową, czyli bryłę. Ułamkowa wartość wymiaru oznacza, że ma się do czynienia z przestrzenią niecałkowicie wypełnioną, czyli z czymś pośrednim między jednym a drugim wymiarem, między jedną a drugą strukturą. I tak w przypadku D z zakresu od 0 do 1 może to być zbiór złożony z nieskończenie wielu odcinków o zerowej długości każdy (np. zbiór Cantora, D = 0,631; rys. 2).

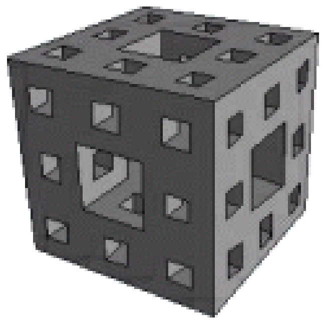


Rys. 2. Zbiór Cantora

W przypadku D z zakresu od 1 do 2 może to być zbiór nieskończenie wielu trójkątów o zerowym polu każdy (np. trójkąt Sierpińskiego, D = 1,585; rys. 3), natomiast w przypadku D z zakresu od 2 do 3 może to być zbiór nieskończenie wielu sześcianów o zerowej objętości każdy (np. gąbka Mengera, D = 2,727; rys. 4).



Rys. 3. Trójkąt Sierpińskiego



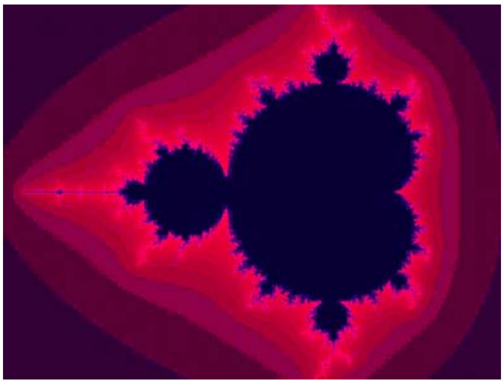
Rys. 4. Gąbka Mengera

Wyznaczając wymiary struktur dzieł Pollocka, Taylor zastosował metodę siatki, którą dość szczegółowo opisał w swoim artykule. Ogólnie rzecz ujmując, polega ona na tym, iż dany obraz, czy też jego fragment, dzieli się na N małych kwadratów i następnie określa liczbę kwadratów $N(s)$, w których pojawiły się charakterystyczne elementy obrazu. Wymiar badanej struktury określić można wówczas w przybliżeniu ze wzoru:

$$D = \frac{2\lg[N(s)]}{\lg(N)}$$

Ze strukturami fraktalnymi mamy do czynienia w każdej dziedzinie życia. Występują one praktycznie wszędzie w otaczającym nas świecie. Patrząc na fotografię kamienia umieszczonego na jednolitym neutralnym tle, nie jesteśmy w stanie stwierdzić, czy widzimy kamień, czy też olbrzymią górę (efekt ten wykorzystywany jest m.in. przez scenografów filmowych). Obraz gałązki świerku, powiększony odpowiednią ilość razy, przypomina całe drzewo. Podobnie rzecz ma się z chmurami, liniami brzegowymi itd., itd. Można zatem śmiało powiedzieć, że fraktale są rzeczywistymi otaczającymi nas tworami geometrycznymi. W przyrodzie nie istnieje bowiem idealny odcinek, koło czy sześcian. W praktyce codziennej posługujemy się pojęciami struktur idealnych, ponieważ „upraszczając" w ten sposób rzeczywistość, łatwiej dokonać jej matematycznego opisu.

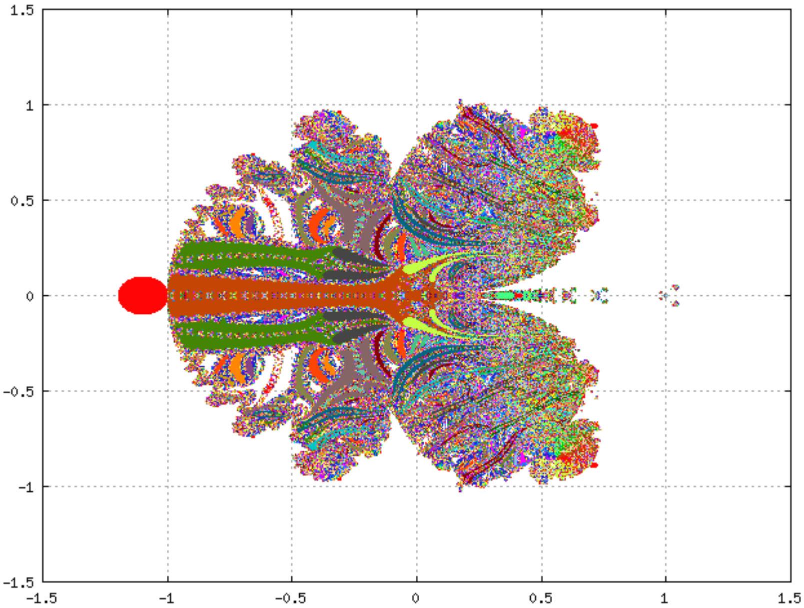
Czy modelowanie złożonej struktury fraktalnej musi być jednak matematycznie złożone? Okazuje się, że nie. Dobrym przykładem jest popularny fraktal Mandelbrota (rys. 5), który, mimo iż jest strukturą o nieskończonej złożoności, daje się opisać bardzo prostą zależnością rekurencyjną postaci $z_{k+1} = z_k^2 + c$ (zmienna z i stała c są liczbami zespolonymi). Obraz fraktalny Mandelbrota uzyskuje się, badając wpływ wartości stałej c na zbieżność powyższej rekurencji, przy założeniu początkowej wartości $z_0 = 0$.



Rys. 5. Fraktal Mandelbrota

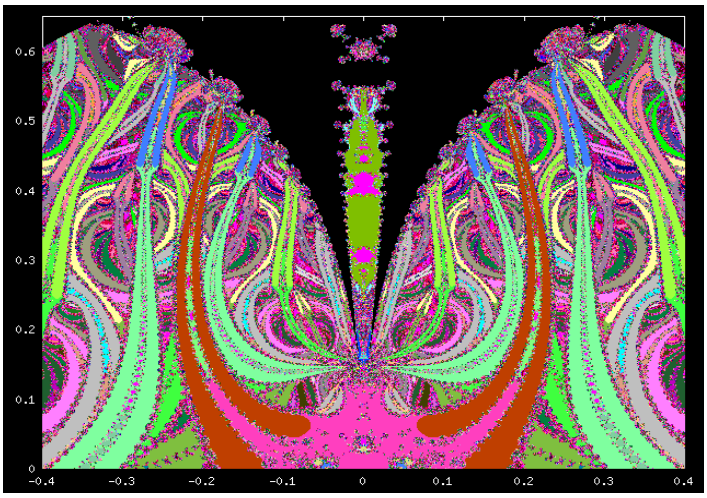
Jeden z tematów moich badań stanowi analiza dynamiki reaktorów chemicznych, tj. urządzeń, w których odbywają się reakcje chemiczne. Ściśle mówiąc, analiza ta nie dotyczy bezpośrednio fizycznych urządzeń, lecz ich matematycznych modeli. Okazuje się, że reaktory chemiczne generować mogą bardzo złożone zjawiska dynamiczne, np. okresowe bądź nieokresowe oscylacje temperatury i stężeń reagujących składników. W niektórych przypadkach oscylacje te mogą być chaotyczne.

Biorąc pod uwagę powyższe, postanowiłem zbadać, czy stosując wspomnianą metodę Mandelbrota, uzyska się podobnie złożone struktury rozwiązań modeli reaktorów. Przesłanką pozwalającą przypuszczać, iż otrzymane obrazy mogą być równie skomplikowane, było to, iż modele reaktorów chemicznych, w niektórych przypadkach, generują chaos [3, 4, 5, 6]. Chaos zaś nierozerwalnie związany jest z fraktalami [7, 8]. Należało zatem, podobnie jak w przypadku modelu Mandelbrota, przyjąć zespolony charakter zmiennych stanu reaktora, tj. temperatury i stężeń, a następnie zastosować algorytm badający wpływ wartości początkowych tych zmiennych na typ rozwiązania modelu matematycznego. W efekcie uzyskałem takie obrazy jak na rysunku 6. Różne kolory oznaczają różną wrażliwość. Obszar biały dotyczy sytuacji, w której model w ogóle nie daje ustalonego rozwiązania.



Rys. 6. Wpływ warunków początkowych na stabilność rozwiązań zespolonych równań reaktora

Dla określenia wymiaru struktury z rysunku 6 zastosowałem metodę, której użył Taylor do badania obrazów Pollocka. Żeby ocenić, czy struktura ta jest fraktalem, należało sprawdzić, czy uzyskany wymiar jest, w przybliżeniu, taki sam dla kolejnych powiększeń wybranego fragmentu obrazu (rys. 7 i 8). W rezultacie okazało się, że wszystkie badane obszary mają mniej więcej ten sam wymiar D = 1,7, co oznacza, że struktura jest fraktalem.



Rys. 7. Fragment rys. 6

Rys. 8. Fragment rys. 7

W zakończeniu należy dać odpowiedź na zadane w tytule pytanie, co wspólnego ma reaktor chemiczny ze sztuką? Plastycznie można powiedzieć, że jego równania zespolone „malują" obrazy. Jeśli ktoś nie jest co do tego przekonany, niech porówna rys. 7 i 8 z obrazami Marii Wilskiej (rys. 9).

Rys. 9. Obrazy Marii Wilskiej

Odwracając problem, należałoby zapytać, co sztuka ma wspólnego z matematyką? Profesor Michał Heller postawił swego czasu tezę, iż Bóg jest matematyką, co znaczy, że wszystko jest matematyką. Z pracy Taylora wynika, iż w sposób ścisły można określić poziom estetyczny danego dzieła, przynajmniej w pewnym jego zakresie. To oznacza, że estetyka niekoniecznie musi być subiektywna, ponieważ matematyka nie jest subiektywna. W każdym razie z tego, co Taylor pisze, wynika, że najbardziej przyjemna dla oka jest struktura obrazu o wymiarze fraktalnym mieszczącym się w granicach 1,3–1,5. Podobne reguły z pewnością obowiązują także w innych dziedzinach sztuki, np. w muzyce.[1]

Porównując „wizualnie” obrazy fraktalne uzyskane z obliczeń zespolonych równań reaktora chemicznego (rys. 6–8) z obrazem Pollocka (rys. 1), odnosi się wrażenie, iż w obrazach reaktora jest pewna harmonia, a w obrazie Pollocka nie. Wrażenie to jest jednak mylące. O harmonii obrazów Pollocka świadczy właśnie to, że mają one wymiar fraktalny. Taylor pisze: „Wydało mi się nagle, że pojąłem tajemnicę Jacksona Pollocka: gdy malował, poddawał się rytmowi natury. Zrozu-

[1] Redakcja dystansuje się od powyższej opinii Autora. Wypowiedzi na temat działu filozofii estetyki wykraczają poza kompetencje Redakcji. O fraktalach w muzyce polecamy artykuły Marka Wolfa i Krzysztofa Meyera (*Foton* 48).

miałem też wtedy, że będę musiał wrócić do nauki, aby stwierdzić uchwytne ślady tego rytmu w jego dziełach".

Inne fraktale uzyskane z równań reaktorów chemicznych zobaczyć można m.in. w publikacji [2] oraz pod adresem: http://zeus.polsl.gliwice.pl/~mberez.

Literatura cytowana:

[1] Taylor R.P., *Porządek w chaosie Pollocka*, „Świat Nauki", luty 2003.
[2] Berezowski M., *Obrazy fraktalne reaktora chemicznego*, „Delta", nr 7, 2003.
[3] Stewart I., *Czy Bóg gra w kości. Nowa matematyka chaosu*, PWN, Warszawa 1994.
[4] Orlik M., *Reakcje oscylacyjne, porządek i chaos*, WNT, Warszawa 1996.
[5] Dorfman J.R., *Wprowadzenie do teorii chaosu w nierównowagowej mechanice statystycznej*, PWN, Warszawa 2001.
[6] Baker G.L., Gollub J.P., *Wstęp do dynamiki układów chaotycznych*, PWN, Warszawa 1998.
[7] Peitgen H.-O., Jürgens H., Saupe D., *Granice chaosu fraktale*, tom 1 i 2. PWN, Warszawa 2002.
[8] Stauffer D., Stanley H. E.. *Od Newtona do Mandelbrota. Wstęp do fizyki teoretycznej*, WNT, Warszawa 1996.
[9] Tabiś B., *Teoria i inżynieria obiektów reagujących chemicznie*, WNT, Warszawa 1994.

Reaktory chemiczne są to aparaty, w których odbywają się reakcje chemiczne [9]. W ogólnym przypadku reaktory mogą być zbiornikowe (czyli po prostu zbiorniki, w których reagujące ze sobą składniki są bardzo intensywnie mieszane) i rurowe (do których z jednej strony doprowadzany jest surowiec, a z drugiej odprowadzany przereagowany produkt). Generalnie urządzenia te mają za zadanie zapewnić reagującym składnikom jak najlepszy i najdłuższy wzajemny kontakt. Zaprezentowane w tym artykule obrazy fraktalne uzyskane zostały z równań reaktora rurowego postaci:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \tau} + \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} = \phi_1(\alpha, \Theta); \qquad \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} = \phi_2(\alpha, \Theta)$$

Funkcje ϕ_1 i ϕ_2 opisują tzw. kinetykę reakcji, która mówi, jak szybko jeden reagujący składnik zamienia się w drugi, a także ile w trakcie tej zamiany wydziela się ciepła. Zmienne α i Θ to stężenie i temperatura, natomiast τ i ξ to czas i pozycja wewnątrz reaktora.

Redakcja poleca artykuły o fraktalach:

- Gudowska-Nowak Ewa *Fraktalna nieznośność bytu czyli historia demonów Mandelbrota*, *Foton* 41, marzec/kwiecień 1996.
- Dyrek Andrzej, *Rysujemy fraktale*, *Foton* 41, marzec/kwiecień 1996.
- Wolf Marek, *Fraktalne własności muzyki*, *Foton* 48, styczeń/luty 1997.
- Krzysztof Meyer, *Kompozytor o „twórczości" komputerowej*, *Foton* 48, styczeń/luty 1997.
- Strzelecki Janusz, *Wytwarzanie fraktalnych struktur niskowymiarowych metodą galwanizacji*, *Foton* 77, lato 2002.
- Życzkowski Karol i Łoziński Artur, *Chaos, fraktale oraz euroatraktor*, *Foton* 80, wiosna 2003.