# Czy cel uświęca środki i zasada zachowania energii

*Ludomir Zommer*
*Instytut Chemii Fizycznej PAN, Warszawa*

Swego czasu, przygotowując lekcję na temat kondensatorów, zauważyłem pewne zadanie w dobrze znanym zbiorze zadań z fizyki dla uczniów szkół średnich (zadanie 3.3.30, wydanie 2, J. Jędrzejewski, W. Kruczek, A. Kujawski, WNT Warszawa 1974). Zajrzałem do rozwiązań i zostałem zaskoczony jego ewidentnie niepoprawnym rozwiązaniem. Wobec czego sięgnąłem do wydanie 11 tego zbioru w nadziei, że rozwiązanie tego zadania zostało poprawione – niestety, rozwiązanie jest dokładnie takie samo (WNT 2000, numer zadania został zmieniony na 22-25R). Machnąłem na to ręką. I oto do moich rąk trafił jeden z ostatnich numerów *Delty* (popularny miesięcznik matematyczno-fizyczno-astronomiczny, nr 12, 2001 r.). W jego kąciku zadań z fizyki zauważyłem zadanie bardzo podobne (F562), tyle tylko, że inna wielkość fizyczna była wielkością szukaną. Sądziłem, że gdzie jak gdzie, ale w tym miesięczniku rozwiązanie tego zadania będzie na pewno poprawne. Zawiodłem się. Metoda rozwiązania jest ta sama. Te zdarzenia zdopingowały mnie do napisania kilku uwag, które, być może, ustrzegą innych przez popełnieniem błędu. O co chodzi? Oto treść zadania ze wspomnianego zbioru zadań (Jędrzejewski i in.):

*Okładki płaskiego kondensatora powietrznego, o powierzchni S i wysokości h, skierowano pionowo i ustawiono tak, by ich krawędzie dotykały cieczy dielektrycznej. Na brzegu naładowanego kondensatora powstaje niejednorodne pole elektryczne, przy czym pole to słabnie w miarę oddalania się od krawędzi kondensatora. W polu tym ciecz zostanie spolaryzowana, tzn. cząsteczki cieczy staną się indukowanymi dipolami, na które będą działały siły w kierunku do silniejszego pola elektrycznego. Jeden z biegunów dipola znajduje się zatem w silniejszym polu elektrycznym i w efekcie ciecz będzie wciągana do kondensatora. Obliczyć, jakim ładunkiem Q należy naładować kondensator, aby ciecz wypełniła całą przestrzeń między jego okładkami. Gęstość cieczy dielektrycznej wynosi* $\rho$*, a jej względna stałą dielektryczna* $\varepsilon_r$.

Rozwiązanie, które proponuje autor zadania opiera się na wykorzystaniu bilansu energii (zjawiska kapilarne zostały pominięte, chociaż autor o tym nie wspomina):

$$E_1 = E_2 + E_g \tag{1}$$

gdzie $E_1 = Q^2/(2C_1)$ – energia początkowa kondensatora, $C_1$ – pojemność kondensatora próżniowego, $E_2 = Q^2/(2C_2)$ – energia kondensatora po wciągnięciu cieczy,

$C_2$ – pojemność kondensatora po wciągnięciu dielektryka na wysokość h oraz $E_g = mgh/2$ – wzrost grawitacyjnej energii potencjalnej cieczy.

Czy jednak bilans energii jest pełny? Przecież kosztem energii kondensatora rośnie nie tylko energia potencjalna cieczy, lecz także jej energia kinetyczna. Jeśli ciecz jest pozbawiona lepkości, będzie wykonywać niegasnące drgania wokół poziomu równowagi. Powyższe równanie będzie prawdziwe o ile h jest maksymalną wysokością osiąganą przez drgającą ciecz – $h_{max}$. Autor zadania nie wyjaśnił jednak, o jakiej wysokości jest mowa. Lepkość cieczy powoduje jednak tłumienie ruchu, w wyniku czego energia kinetyczna zamieniana jest na ciepło a wysokość cieczy osiąga poziom równowagi $h_r$. Wobec czego wysokość h w równaniu (1) nie jest ani wspomnianą $h_{max}$, z powodu lepkości, ani też nie jest wysokością równowagową $h_r$.

Zastanawiałem się – czy błąd jest skutkiem niewiedzy, czy też podano rozwiązanie „uproszczone"? Skoro poprawne rozwiązanie, korzystające z warunku minimum energii potencjalnej, na którą składa się energia pola elektrycznego i energia grawitacyjna, jest za trudne, to czy w ogóle warto prezentować taki problem uczniom? Myślę, że warto. Nie musi to być wtedy rozwiązanie pełne, wystarczy zaprezentować szkic rozwiązania i pokazać pułapki jakie mogą czyhać na amatora łatwych rozwiązań.

Nawiązując do powyższego, chciałbym jeszcze zaprezentować inne zadanie-problem, które miałem okazję przetestować udzielając pomocy z fizyki, ponieważ z moich doświadczeń wynika, że umiejętność stosowania zasady zachowania energii przez uczniów szkół średnich, i to często tych dobrych, nie jest najlepsza. Prawdopodobnie wynika to ze zbyt małej liczby serwowanych im przykładów. Oto zadanie-problem:

*W jednorodnym ziemskim polu grawitacyjnym na sprężynie o stałej sprężystości k i pomijalnej masie wisi okładka kondensatora płaskiego o powierzchni S i masie m (powierzchnia okładki leży w płaszczyźnie poziomej). Druga okładka, równoległa do pierwszej, znajduje się niżej w odległości d i jest zamocowana na stałe. Na dolną okładkę wprowadzamy ładunek –Q, zaś na górną – +Q. Ruchoma, górna okładka przesunie się na pewno w dół. Oblicz to przesunięcie. Okładki kondensatora są odizolowane elektrycznie od sprężyny i podłoża.*

Jeśli zasugerować uczniowi rozwiązanie tego problemu metodą energetyczną, to przebiega ono najczęściej następująco: Energia układu $E_1$ przed przesunięciem górnej okładki

$$E_1 = \frac{Q^2}{2C_1} + mgd + \frac{kx_1^2}{2} \tag{2}$$

gdzie pojemność kondensatora $C_1 = \dfrac{\varepsilon S}{d}$ a $x_1$ jest wydłużeniem sprężyny pod wpływem ciężaru płyty kondensatora $mg$. Energia układu $E_2$ po przesunięciu ruchomej okładki o $x$

$$E_2 = \frac{Q^2}{2C_2} + mg(d-x) + \frac{k(x_1+x)^2}{2} \tag{3}$$

gdzie
$$C_2 = \frac{\varepsilon S}{d-x}.$$

Porównując $E_1$ i $E_2$ i pamiętając, że $kx_1 = mg$, otrzymujemy po przekształceniach równanie:

$$\frac{Q^2 d}{2\varepsilon S} - \frac{Q^2(d-x)}{2\varepsilon S} = \frac{kx^2}{2} \tag{4}$$

i stąd
$$x = \frac{Q^2}{\varepsilon S k}.$$

Uczeń jest z siebie zadowolony, kiedy dotrze do takiego wyniku i wtedy proponuje inny sposób rozwiązania: warunek równowagi sił w nowym położeniu ruchomej okładki.

Najpierw z prawa Gaussa znajdujemy natężenie pola elektrostatycznego wytwarzanego przez jedną płytkę kondensatora (zakładamy, że pole jest jednorodne – duże płytki i mała odległość między nimi) i wtedy, już łatwo znajdujemy siłę przyciągania między naładowanymi okładkami: $\dfrac{Q^2}{2\varepsilon S}$. Następnie warunek równowagi sił pozwala napisać równanie:

$$\frac{Q^2}{2\varepsilon S} + mg = k(x_1 + x) \tag{5}$$

Skoro $kx_1 = mg$, to $x = \dfrac{Q^2}{2\varepsilon S k}$.

Porównajmy wyniki obu sposobów rozwiązania:

$$x = \frac{Q^2}{\varepsilon S k} \quad \text{i} \quad x = \frac{Q^2}{2\varepsilon S k}$$

W tym momencie pojawia się u ucznia zakłopotanie, bo rozwiązania różnią się czynnikiem 2. Które rozwiązanie jest poprawne? Może żadne z nich? Na ogół należy wtedy uczniowi wyjaśnić, że górna okładka będzie przecież oscylować wokół pewnego położenia równowagi, a bilans energii, który zastosowaliśmy jest niepełny i jest prawdziwy tylko w momencie, kiedy ruchoma okładka osiąga maksymalne wychylenie z położenia równowagi. Przesunięcie $x$ obliczone tak, jak w pierwszym sposobie jest w istocie maksymalnym wychyleniem okładki $x_{\max}$

mierzonym od jej położenia początkowego. natomiast przesunięcie obliczone drugim sposobem jest właśnie odległością położenia równowagi $x$ od jej początkowego położenia.

Nie trudno przekonać ucznia, że drgania okładki są drganiami harmonicznymi (pomijamy straty energii), częstość tych oscylacji jest równa $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$, czyli jest równa częstości drgań okładki pozbawionej ładunku, a ich amplituda $A$ jest równa

$$A = x_{\max} - x_{\mathrm{r}} = \frac{Q^2}{2\varepsilon S k}.$$

Pożytecznie jest też wspomnieć, że w istocie rzeczy, amplituda tych drgań będzie maleć, bo drgający ładunek emituje falę elektromagnetyczną. Uczniowi wykazującemu zainteresowanie problemem warto również powiedzieć, jak moc emitowanej przez drgający ładunek energii zależy od częstości tych drgań.

W końcu należy się przyznać uczniowi, że ostatni problem nie został sformułowany uczciwie, bo w jego treści nie sprecyzowano o jakim przesunięciu okładki jest mowa. Ale czy takie „podpuszczanie” nie jest jednak pożyteczne? Czy tutaj cel nie uświęca środków?

**Od Redakcji:**

Prosimy zajrzeć na internetowe FORUM Czytelników i Internautów *Fizyki w Szkole*. Jerzy Bronisław Brojan komentuje zadanie z matury pomostowej w województwie mazowieckim, które jest identyczne z zadaniem z omawianego zbioru zadań.