Układy inercjalne i nieinercjalne w zadaniach

Jadwiga Salach

Zadanie 1

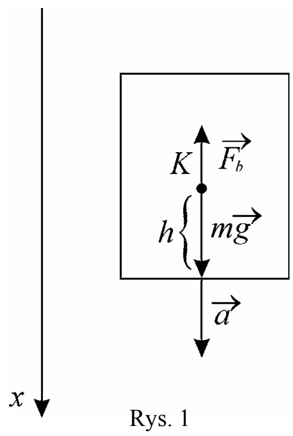
Urzędnik pracujący w biurowcu wsiadł do windy, która ruszyła w dół i przez 1 sekundę jechała z przyspieszeniem o wartości a = 4 m/s^2. W chwili ruszenia windy urzędnik upuścił klucze z ręki, która znajdowała się wówczas na wysokości h = 1 m nad podłogą windy.

a) Oblicz czas spadania kluczy, przeprowadzając rozumowanie w układzie nieinercjalnym, związanym z windą.
b) Oblicz ten czas w inercjalnym układzie odniesienia, związanym z biurowcem.
c) Oblicz czas spadania kluczy w przypadku, gdy winda stała lub poruszała się ruchem jednostajnym.
d) Porównaj wyniki i podaj ich krótką interpretację.

Rozwiązanie

Dane: a = 4 m/s^2, h = 1 m, g = 10 m/s^2;
obliczyć t.

a) W układzie nieinercjalnym, związanym z windą, na klucze działają dwie siły: ciężkości $m\vec{g}$ i siła bezwładności $\vec{F}_b = -m\vec{a}$ (rys. 1). Przyspieszenie kluczy względem windy ma wartość



Rys. 1

$$a_w = \frac{mg - F_b}{m} = \frac{mg - ma}{m},$$

$$a_w = g - a,$$

$$h = \frac{a_w t^2}{2} \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2h}{a_w}},$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g-a}} = \sqrt{\frac{2\text{m} \cdot \text{s}^2}{6\text{m}}} \approx 0{,}58\,\text{s}.$$

b) W układzie inercjalnym biurowca na klucze działa tylko siła ciężkości, zatem klucze spadają z przyspieszeniem $\vec{g}$. Droga, jaką przebywają klucze w tym układzie odniesienia jest sumą dróg: h i drogi s_b, którą w czasie t przebywa winda względem biurowca.

$$s = h + s_b, \qquad \frac{gt^2}{2} = h + \frac{at^2}{2}, \qquad \frac{(g-a)t^2}{2} = h \quad \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g-a}} \approx 0{,}58\,\text{s}.$$

c) W windzie spoczywającej lub poruszającej się ruchem jednostajnym na klucze działa tylko siła ciężkości, która nadaje im przyspieszenie $\vec{g}$.

$$h = \frac{gt^2}{2} \qquad \Rightarrow \qquad t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2\text{m}\cdot\text{s}^2}{10\text{m}}} \approx 0{,}45\text{s}.$$

Czas ten obliczono w układzie inercjalnym związanym z windą. Układ ten jest identyczny z układem biurowca, jeśli winda spoczywa. Jeśli winda porusza się ruchem jednostajnym, to układ związany z windą jest też układem inercjalnym, ale różnym od układu biurowca. Winda porusza się w dół ze stałą prędkością $\vec{\text{v}}$ zwróconą w dół (oczywiście v << c). W układzie biurowca upuszczone klucze mają prędkość początkową $\vec{\text{v}}$, wykonują rzut pionowy w dół i mają do przebycia drogę równą $h + \text{v}t$.

$$h + \text{v}t = \text{v}t + \frac{gt^2}{2},$$

skąd otrzymujemy czas $t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \approx 0{,}45\,\text{s}$, a więc taki sam, jak w układzie windy.

Gdyby winda poruszała się ze stałą prędkością zwróconą w górę, to w układzie odniesienia biurowca odpowiednie równanie miałoby postać:

$$h - \text{v}t = -\text{v}t + \frac{gt^2}{2} \qquad \Rightarrow \qquad t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \approx 0{,}45\,\text{s}$$

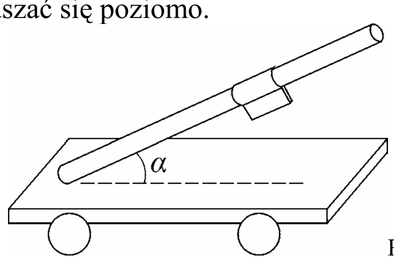
(prędkość początkowa kluczy byłaby zwrócona w górę, miałaby więc współrzędną $\text{v}_x = -\text{v}$, bo oś x jest zwrócona w dół).

Uwaga: W ostatnim przypadku można by także postąpić inaczej: Obliczyć czas t spadania kluczy jako sumę czasów: wznoszenia $\left(\frac{\mathrm{v}}{g}\right)$ i spadania swobodnego z wysokości $h_{\max} + h - \mathrm{v}t$. Wówczas należałoby rozwiązać równanie kwadratowe $\frac{gt_{sp}^2}{2} = h_{\max} + h - \mathrm{v}(t_{sp} + t_{wz})$, gdzie $h_{\max} = \frac{\mathrm{v}^2}{2g}$, a $t_{wzn} = \frac{\mathrm{v}}{g}$. Po rozwiązaniu równania należy do czasu spadania dodać czas wznoszenia. Otrzymamy taki sam wynik, ale liczenia jest znacznie więcej.

d) Czas spadania kluczy w windzie poruszającej się z przyspieszeniem zwróconym w dół jest dłuższy od czasu ich spadania w windzie spoczywającej lub poruszającej się ruchem jednostajnym i to tym dłuższy, im większą wartość ma przyspieszenie windy. Czasy te, obliczone (zmierzone) przez obserwatorów w układzie inercjalnym i nieinercjalnym są jednakowe, ale wydłużenie się czasu spadania (gdy $\vec{a} \neq \vec{0}$) każdy z tych obserwatorów wytłumaczy inaczej: według obserwatora w windzie jest tak dlatego, że klucze spadają z mniejszym przyspieszeniem, a według obserwatora związanego z budynkiem – dlatego, że klucze muszą przebyć większą drogę.

Zadanie 2

Na rurze toru powietrznego tworzącej z poziomem kąt α = 30° umieszczono metalowy uchwyt obciążony klockiem o łącznej masie m = 150 g. Dzięki poduszce powietrznej wytworzonej miedzy uchwytem a rurą prawie zupełnie wyeliminowano opory ruchu (rysunek 1). Tor powietrzny zamocowano na platformie mogącej poruszać się poziomo.



Rys. 1

Oblicz wartość i podaj zwrot przyspieszenia, z którym powinna poruszać się platforma, aby uchwyt z klockiem

a) w układzie laboratoryjnym spadał swobodnie; oblicz wartość, jaką będzie miało wówczas przyspieszenie uchwytu względem toru,
b) nie przesuwał się względem toru powietrznego.
c) Oblicz wartość siły nacisku uchwytu na rurę toru powietrznego w przypadku a) i b).

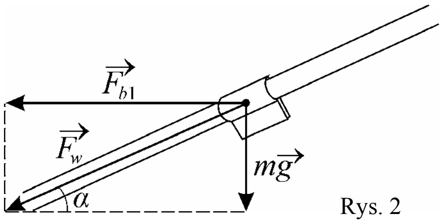
Przeprowadź rozumowanie w układzie nieinercjalnym związanym z platformą oraz w układzie inercjalnym (laboratoryjnym).

Rozwiązanie

Dane: $\alpha = 30°$, $m = 150\text{g}$, $g = 10\ \text{m/s}^2$;
obliczyć a_1, a_2, N_1, N_2.

1. Rozwiązanie w układzie nieinercjalnym, związanym z platformą

a) W układzie nieinercjalnym na uchwyt działają siły: ciężkości $m\vec{g}$ i bezwładności $\vec{F}_{b1} = -m\vec{a}_1$. Wypadkowa tych sił nadaje uchwytowi przyspieszenie $\vec{a}_w$, jest więc zwrócona wzdłuż toru ku dołowi. Wynika z tego, że siła bezwładności musi być zwrócona w lewo (rys. 2), więc przyspieszenie platformy $\vec{a}_1$ jest zwrócone w prawo.



Rys. 2

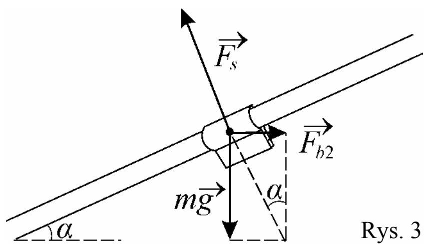
$$\frac{F_{b1}}{mg} = \text{ctg}\,\alpha, \quad \frac{ma_1}{mg} = \text{ctg}\,\alpha,$$

$$a_1 = g \cdot \text{ctg}\,\alpha \approx 17{,}3\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

b) Jeśli w układzie nieinercjalnym uchwyt spoczywa, to jego przyspieszenie w tym układzie jest równe zeru. Oznacza to, że siły działające na uchwyt równoważą się. Są to siły: $m\vec{g}$, $\vec{F}_{b2}$ i $\vec{F}_s$. Z rysunku 3 wynika, ze siła bezwładności $\vec{F}_{b2}$ (o kierunku poziomym) musi być zwrócona w prawo, a zatem przyspieszenie platformy $\vec{a}_2$ jest zwrócone w lewo.

$$\frac{F_{b2}}{mg} = \text{tg}\,\alpha, \quad \frac{ma_2}{mg} = \text{tg}\,\alpha,$$

$$a_2 = g \cdot \text{tg}\,\alpha \approx 5{,}8\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$



Rys. 3

c) Siła wzajemnego nacisku uchwytu i toru powietrznego w przypadku **a)** ma wartość równą zeru ($N_1 = 0$), a w przypadku **b)**, jak wynika z rysunku 3 ($F_s = N_2$; trzecia zasada dynamiki).

$$\frac{mg}{F_s} = \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad F_s = N_2 = \frac{mg}{\cos\alpha} \approx 1{,}7\,\mathrm{N}.$$

2. Rozwiązanie w układzie laboratoryjnym (inercjalnym)

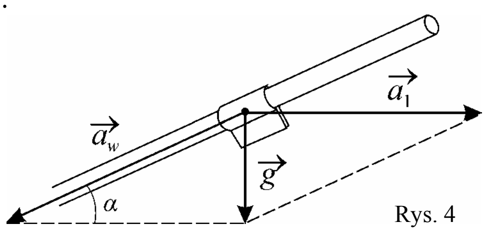
a) Przyspieszenie uchwytu równe $\vec{g}$ jest sumą jego przyspieszeń: przyspieszenia względnego $\vec{a}_w$ (względem platformy, czyli toru powietrznego) i przyspieszenia platformy $\vec{a}_1$

$$\vec{g} = \vec{a}_w + \vec{a}_1.$$

Ilustruje to rysunek 4, z którego widać, że platforma będzie się poruszała z przyspieszeniem zwróconym w prawo.

$$\frac{g}{a_1} = \mathrm{tg}\alpha \quad \Rightarrow \quad a_1 = \frac{g}{\mathrm{tg}\alpha} = g \cdot \mathrm{ctg}\alpha,$$

$$a_1 = 10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot \sqrt{3} \approx 17{,}3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$



Rys. 4

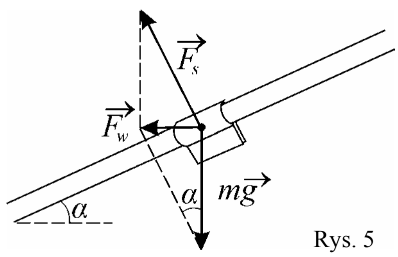
Wartość przyspieszenia względnego $a_w = \frac{g}{\sin\alpha} = \frac{10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{0{,}5} = 20\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

b) Gdy uchwyt będzie spoczywał względem toru, czyli jego przyspieszenie względem platformy będzie równe zeru, to w układzie laboratoryjnym przyspieszenie uchwytu będzie równe przyspieszeniu platformy $\vec{a}_2$. Przyspieszenie to nadaje uchwytowi wypadkowa siły ciężkości $m\vec{g}$ i siły sprężystości toru $\vec{F}_s$.

Kierunek siły $\vec{F}_s$ jest prostopadły do toru. Ponieważ przyspieszenie $\vec{a}_2$ ma kierunek poziomy, taki kierunek musi mieć także siła wypadkowa – oba te wektory są zwrócone w lewo (rys. 5).

$$\frac{F_w}{mg} = \mathrm{tg}\alpha, \quad \frac{ma_2}{mg} = \mathrm{tg}\alpha \quad \Rightarrow \quad a_2 = g \cdot \mathrm{tg}\alpha,$$

$$a_2 = 10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 5{,}8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$



Rys. 5

c) Wartość siły nacisku na tor jest w każdym przypadku równa wartości siły sprężystości toru (III zasada dynamiki). W przypadku **a)** wartość ta jest równa zeru $(N_1 = 0)$, bowiem przyspieszenie $\vec{g}$ w układzie inercjalnym nadaje uchwytowi wyłącznie siła ciężkości. W przypadku **b)** wartość siły sprężystości, jak widać z rysunku 5, jest równa

$$\frac{mg}{F_s} = \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad F_s = \frac{mg}{\cos\alpha}, \quad F_s = \frac{0{,}15\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 2}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}\,\mathrm{N} \approx 1{,}7\,\mathrm{N},$$

$$N_2 = \sqrt{3}\,\mathrm{N} \approx 1{,}7\,\mathrm{N}.$$