Obwody prądu przemiennego bez liczb zespolonych

Jerzy Ginter
Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego

Kiedy prowadziłem zajęcia z elektromagnetyzmu na Studium Podyplomowym, musiałem omówić obwody prądu przemiennego. Mogłem przy tym posłużyć się elementami rachunku różniczkowego, ale większość słuchaczy nie znała liczb zespolonych. Po wielu próbach zastosowałem metodę opisu, która wydawała mi się najprostsza z możliwych – i w gruncie rzeczy sprowadzała się do wykorzystania wzoru na sinus sumy. Może zainteresuje ona Czytelników *Fotonu*?

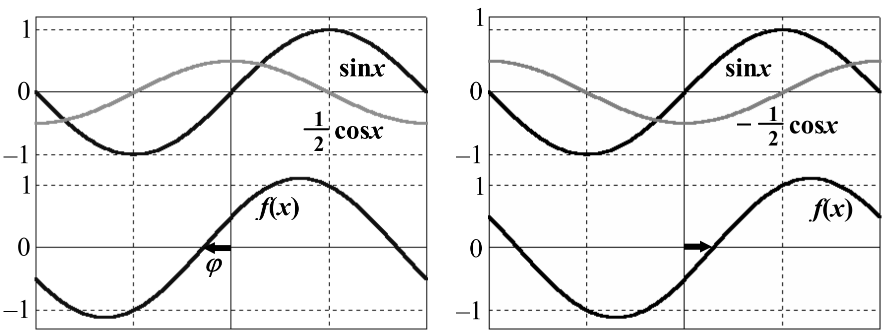
Dodawanie sinusa i kosinusa

Zacznijmy od przypomnienia prostych właściwości funkcji trygonometrycznych. Mamy funkcję „wyjściową” $f_A(x) = A\sin x$, gdzie A jest liczba dodatnią, ustaloną na czas naszych rozważań. Do tej funkcji dodajemy funkcję $f_B(x) = B\cos x$, gdzie B jest liczbą dowolną. Interesuje nas suma

$$f(x) = A\sin x + B\cos x. \tag{1}$$

Wykres funkcji $f(x)$ jest także sinusoidą. Ma ona amplitudę większą od A i jest w stosunku do $f_A(x)$ przesunięta:

- w lewo, jeżeli $B > 0$ (rys. 1a);
- w prawo, jeżeli $B < 0$ (rys. 1b).



Rys. 1. Wykresy funkcji $f(x)$: a. $A = 1$, $B = \frac{1}{2}$; b. $A = 1$, $B = -\frac{1}{2}$

Oznacza to, że funkcję $f(x)$ możemy także przedstawić w postaci:

$$f(x) = C\sin(x+\varphi) = C\cos\varphi\ \sin x + C\sin\varphi\ \cos x. \tag{2}$$

Będziemy zakładać, że C jest liczbą dodatnią, a „przesunięcie" φ jest zawarte w przedziale $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ (wzór (7)).

Obliczmy C i φ. Porównując (1) z (2) widzimy, że powinny być spełnione równości:

$$A = C\cos\varphi; \tag{3}$$

$$B = C\sin\varphi. \tag{4}$$

Zauważmy, że:

$$A^2 + B^2 = (C\cos\varphi)^2 + (C\sin\varphi)^2 = C^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = C^2; \tag{5}$$

a stąd

$$C = \sqrt{A^2 + B^2}. \tag{6}$$

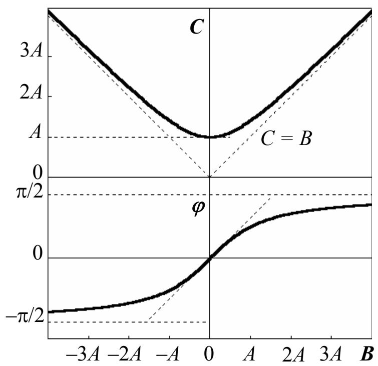
Ponadto

$$\frac{B}{A} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = tg\varphi. \tag{7}$$

Równanie (7) ma nieskończenie wiele rozwiązań, bo tangens jest funkcją periodyczną. Nas będą interesować tylko te, które są zawarte w przedziale $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$.

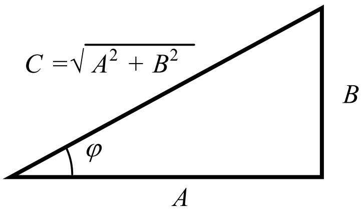
Zależność C i φ od B – przy ustalonym A – przedstawia rysunek 2. Widać, że:

- dla $B \to 0$ amplituda $C \to A$ (dla małych B jest to zależność kwadratowa), a $\varphi \to 0$ (dla małych B jest to zależność liniowa);
- dla $B \to +\infty$ amplituda $C \to B$, a $\varphi \to \frac{\pi}{2}$;
- dla $B \to -\infty$ amplituda $C \to |B|$, a $\varphi \to -\frac{\pi}{2}$.



Rys. 2. Zależność C i φ od B

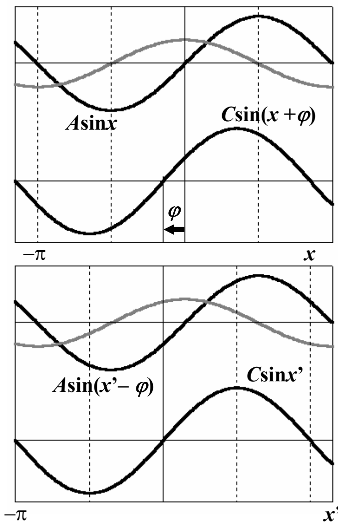
Wzory (6) i (7) mają prostą interpretację geometryczną: Rozważmy trójkąt prostokątny o przyprostokątnych równych A i B (rys. 3). Z twierdzenia Pitagorasa wynika, że przeciwprostokątna jest równa $\sqrt{A^2+B^2}$, czyli C. Na rysunku zaznaczony został także kąt φ, którego tangens jest równy $\frac{B}{A}$.



Rys. 3. Geometryczna interpretacja wielkości C i φ

Zmieniamy układ współrzędnych

W dotychczasowym układzie współrzędnych funkcja $f_A(x) = A\sin x$ znikała dla $x = 0$, a funkcja $f(x) = C\sin(x + \varphi)$ była równa zeru dla $x = -\varphi$. Dla **dodatnich** φ funkcja $f(x)$ była przesunięta **w lewo** w stosunku do „wyjściowej" funkcji $f_A(x)$. Możemy wprowadzić nowy układ współrzędnych (rys. 4):



Rys. 4. Wprowadzamy nowy układ współrzędnych

$$x' = x + \varphi\,. \tag{8}$$

Początek układu „primowanego" jest przesunięty **w lewo** względem początku okładu „nieprimowanego" o φ. W nowym układzie funkcja f ma postać

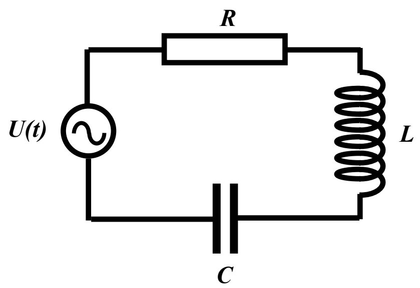
$$f(x') = C\sin x' \tag{9}$$

i znika dla $x' = 0$. Natomiast funkcja f_A przybiera postać

$$f_A(x') = A\sin(x' - \varphi). \tag{10}$$

Jest więc w stosunku do początku nowego układu współrzędnych przesunięta **w prawo** o φ.

Obwód *RLC*, wyrażenie siły elektromotorycznej źródła przez natężenie prądu
Zastosujmy uzyskane wzory do obwodu prądu przemiennego *RLC*. W obwodzie takim połączone są szeregowo: źródło siły elektromotorycznej U, samoindukcja L, pojemność C i opór R (rys. 5). Symbol t oznaczać będzie czas. W obwodzie mamy trzy siły elektromotoryczne:



Rys. 5. Obwód *RLC*

1. źródła $U(t)$
2. samoindukcji

$$U_L(t) = -L\frac{dI(t)}{dt}\,; \tag{11}$$

gdzie $I(t)$ oznacza natężenie prądu elektrycznego.
3. pojemności

$$U_C(t) = -\frac{Q(t)}{C} = -\frac{1}{C}\int I(t)dt\,. \tag{12}$$

Znak we wzorze (12) wymaga komentarza. W obwodzie złożonym jedynie ze źródła siły elektromotorycznej i pojemności kondensator zachowuje się jak źródło napięcia włączone odwrotnie niż źródło prawdziwe. Stąd znak ujemny we wzorze (12).
Oprócz sił elektromotorycznych w obwodzie jest jeszcze opór R.
Zastosujmy do obwodu RLC drugie prawo Kirchhoffa i napiszmy:

$$U(t) + U_L(t) + U_C(t) = \mathrm{R}I(t); \tag{13}$$

czyli

$$U(t) - L\frac{dI(t)}{dt} - \frac{1}{C}\int I(t)dt = RI(t)\,. \tag{14}$$

Wygodnie będzie zebrać po prawej stronie wszystkie człony zawierające $I(t)$:

$$U(t) = RI(t) + L\frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int I(t)dt\,. \tag{15}$$

Przypuśćmy, że w obwodzie płynie prąd przemienny o sinusoidalnej zależności natężenia I od czasu:

$$I(t) = I_m \sin(\omega t). \tag{16}$$

Podstawmy to wyrażenie do wzoru (15). Wyrazimy w ten sposób siłę elektromotoryczną źródła $U(t)$ przez natężenie prądu płynącego w obwodzie $I(t)$:

$$\begin{aligned} U(t) &= RI_m \sin(\omega t) + L\frac{d}{dt} I_m \sin(\omega t) + \frac{1}{C}\int I_m \sin(\omega t)dt \\ &= RI_m \sin(\omega t) + L\omega\, I_m \cos(\omega t) - \frac{1}{\omega C} I_m \cos(\omega t) = \\ &= RI_m \sin(\omega t) + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) I_m \cos(\omega t)\,. \end{aligned} \tag{17}$$

Wyrażenie to ma identyczny kształt jak funkcja $f(x)$ we wzorze (1). Należy podstawić: $x = \omega t$, $A = RI_m$, oraz $B = \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right) I_m$. Możemy więc przedstawić funkcję $U(t)$ w postaci:

$$U(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi) \tag{18}$$

gdzie U_m ma sens stałej C.
Wielkości U_m i φ obliczymy, korzystając ze wzorów (6) i (7):

$$U_m = C = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{R^2 I_m{}^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 I_m{}^2} = I_m \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}\;; \tag{19}$$

$$tg\varphi = \frac{B}{A} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \,. \qquad (20)$$

Podsumujmy:

– wzór (19) pozwala obliczyć amplitudę siły elektromotorycznej źródła U_m, jeżeli znamy amplitudę natężenia prądu elektrycznego I_m;
– sinusoida zależności $U(t)$ jest przesunięta w stosunku do sinusoidy opisującej zależność $I(t)$ o wartość φ, określoną wzorem (20).

Wyrażenie natężenia prądu w obwodzie *RLC* przez siłę elektromotoryczną źródła

W praktyce interesuje nas najczęściej zagadnienie odwrotne do omówionego powyżej: znamy siłę elektromotoryczną źródła $U(t)$, a chcemy obliczyć natężenie płynącego prądu $I(t)$.

Amplitudę natężenia prądu elektrycznego I_m wyrazimy przez amplitudę siły elektromotorycznej źródła U_m, przekształcając wzór (19) do postaci:

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \,. \qquad (21)$$

Aby opisać przesunięcie natężenia prądu względem siły elektromotorycznej wprowadzimy nowy czas t', określony wzorem (por. wzór (8)):

$$\omega t' = \omega t + \varphi \,. \qquad (22)$$

Zależność siły elektromotorycznej od czasu t' opisana jest funkcją (por. wzór (9)):

$$U(t') = U_m \sin(\omega t'). \qquad (23)$$

Natomiast natężenie prądu jest przesunięte w fazie w stosunku do siły elektromotorycznej o φ, czyli jest opisane wzorem (por. wzór (10)):

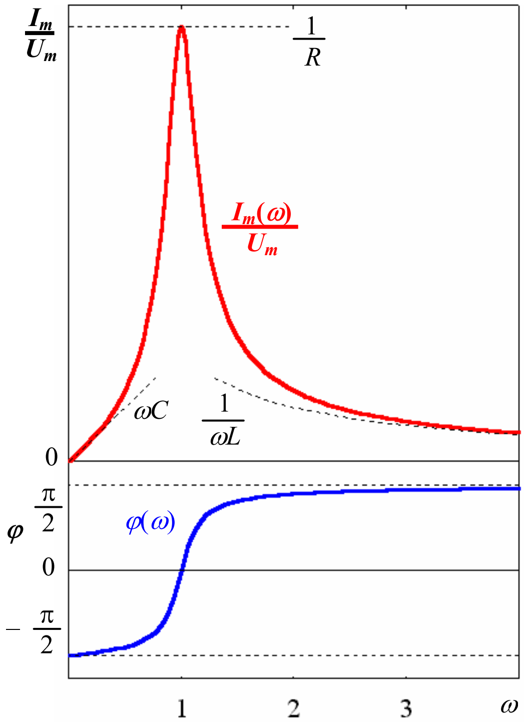
$$I(t') = I_m \sin(\omega t' - \varphi). \qquad (24)$$

Przesunięcie fazowe φ jest określone wzorem (20).

– Jeżeli $\varphi > 0$ przebieg natężenia prądu jest **opóźniony** względem przebiegu siły elektromotorycznej.
– Jeżeli $\varphi < 0$ przebieg natężenia prądu **wyprzedza** przebieg siły elektromotorycznej.

Posługując się wzorami (23) i (24) będziemy mogli opuszczać znak „prim” przy symbolu czasu.

Zależność $I_m(\omega)$ i $\varphi(\omega)$ dla wybranych parametrów R = 0,25, L = 1 i C = 1 przypomina rysunek 6.



Rys. 6. Zależność $I_m(\omega)$ i $\varphi(\omega)$ dla dowolnie wybranych parametrów R = 0,25, L = 1 i C = 1

Podsumujmy

Ogólnie znane wzory, wyrażające natężenie prądu elektrycznego przez parametry obwodu *RLC* i siłę elektromotoryczną źródła uzyskaliśmy na drodze dość prostego rozumowania – i bez użycia liczb zespolonych.

Od Redakcji:

W następnym zeszycie *Fotonu* Redakcja zamieści artykuł J. Karczmarczuka, w którym będzie przedstawione podejście z użyciem liczb zespolonych.