

Foton

129
Lato
2015

Pismo dla nauczycieli i studentów fizyki oraz uczniów

INSTYTUT FIZYKI  UNIWERSYTET JAGIELLOŃSKI
SEKCJA NAUCZYCIELSKA POLSKIEGO TOWARZYSTWA FIZYCZNEGO



Kwantowy Wszechświat z klocków lego
Jak dyfuzja anomalna stała się normalna
Znikające grosze i rozkład Poissona
Emisja wymuszona - modele klasyczne



**Hertha Sponer (1895–1968),
wybitna fizyczka XX wieku,
urodzona w Nysie**



Hertha Sponer w swoim laboratorium w Getyndze



Fizyka teoretyczna od lat zмага się z problemem stworzenia teorii kwantowej grawitacji. Jednym z obiecujących podejść jest model Kausalnych Dynamicznych Triangulacji (CDT), który przedstawia czytelnikom Jakub Gizbert-Studnicki w artykule pt. *CDT, czyli kwantowy Wszechświat z klocków lego*. Przedstawianie teorii opartych na zaawansowanym aparacie matematycznym jest bardzo trudną sztuką. Zachęcamy do lektury artykułu, który wprowadza czytelnika na front badań fizyki, pozwala poznać istotę trudności i docenić zmagania fizyków teoretyków.

Stare, XIX-wieczne problemy dyfuzji mają swoją współczesną kontynuację reprezentowaną w artykule Bartłomieja Dybca *Jak dyfuzja anomalna stała się normalna*. Współczesne techniki obliczeniowe i postęp matematyki pozwalają rozwiązywać „stare” problemy i lepiej rozumieć zjawiska związane z dyfuzją.

Artykuł Pawła Góry o znikających groszówkach i rozkładzie Poissona daje odpowiedź na pytanie, jak wycofanie z obiegu monet jedno- i dwugroszowych wpłynie na naszą kieszeń.

Obszerny artykuł Jerzego Gintera o klasycznych modelach emisji wymuszonej może być bardzo użyteczny na zajęciach ze studentami.

W tym zeszycie przypominamy postać Herthy Sponer (artykuł Witolda Tomaszewskiego). Ta wybitna fizyczka jest jednym z wielu przykładów na drenaż mózgów w Niemczech z powodów politycznych. Mimo, iż Hertha Sponer nie była Żydówką, nie znalazła warunków do pracy naukowej i w 1934 roku emigrowała do USA. Prawie w tym samym czasie, w 1935 roku, z Łodzi wyemigrował – w tym przypadku na wschód do Moskwy – Ary Sternfeld, współtwórca teoretycznych podstaw kosmonautyki. Dzięki wyjazdowi Sternfeld uniknął Holocaustu.

Zapraszamy do lektury tego zeszytu, jak i *Neutrino* nr 29, a także zachęcamy do odwiedzania coraz liczniejszych i ciekawszych rozmaitych muzeów nauki w Polsce i poza nią.

Z.G-M



Contents

Editorial	
<i>Zofia Gołab-Meyer</i>	1
Causal Dynamical Triangulation – the Quantum Universe from Lego Blocks	
<i>Jakub Gizbert-Studnicki</i>	4
How anomalous diffusion became normal	
<i>Bartłomiej Dybiec</i>	13
Poisson distribution and the missing pennies	
<i>Paweł F. Góra</i>	22
Stimulated emission – classical models	
<i>Jerzy Ginter</i>	26
Closed orbits around black holes	
<i>Dominika Hunik</i>	42
Hertha Sponer – a physicist from Nysa	
<i>Witold Tomaszewski</i>	46
Problem from the 27th Olympic Game – sinusoidal trajectory of light beam in special optical media.....	52
Two medals at ICYS 2015	
<i>Emilia Pasamonik</i>	56
Ary Sternfeld Planetarium and Astronomical Observatory in Łódź – Special Center of Open Education	
<i>Stanisław Bednarek</i>	59
Physics in Adam Mickiewicz’s poetry	
<i>Andrzej Zięba</i>	61



Spis treści

Wstęp	
<i>Zofia Gołąb-Meyer</i>	1
Causal Dynamical Triangulation, czyli kwantowy Wszechświat z klocków lego	
<i>Jakub Gizbert-Studnicki</i>	4
Jak dyfuzja anomalna stała się normalna	
<i>Bartłomiej Dybiec</i>	13
Znikające grosze i rozkład Poissona	
<i>Paweł F. Góra</i>	22
Emisja wymuszona – modele klasyczne	
<i>Jerzy Ginter</i>	26
Zamknięte orbity wokół czarnych dziur	
<i>Dominika Hunik</i>	42
Fizyczka z Nysy – Hertha Sponer	
<i>Witold Tomaszewski</i>	46
Bieg po sinusoidzie promienia świetlnego – zadanie z XXVII Olimpiady fizycznej 1977/1978.....	52
Dwa medale na ICYS 2015	
<i>Emilia Pasamonik</i>	56
Planetarium i Obserwatorium Astronomiczne im. Arego Sternfelda w Łodzi – Specjalistyczny Ośrodek Pracy Pozaszkolnej	
<i>Stanisław Bednarek</i>	59
Fizyka w poezji Adama Mickiewicza	
<i>Andrzej Zięba</i>	61



Causal Dynamical Triangulation, czyli kwantowy Wszechświat z klocków lego

Jakub Gizbert-Studnicki

Instytut Fizyki UJ

Rewolucje naukowe wymagają wielkich odkryć, łamiących dotychczasowe paradygmaty. W bieżącym roku obchodzimy setną rocznicę rewolucyjnego odkrycia, jakim było opracowanie przez Alberta Einsteina Ogólnej Teorii Względności. Teoria ta wraz z odkrytą kilka lat później przez Erwina Schrödingera, Wernera Heisenberga i innych badaczy mechaniką kwantową stanowiły impuls do zupełnego przeformułowania opisu otaczającego nas świata, doprowadzając do niezwykle dynamicznego rozwoju nauk ścisłych, a w szczególności fizyki.

Odkrycie Alberta Einsteina było rewolucyjne w dwojnasób. Po pierwsze, stworzona przez niego geometryczna teoria grawitacji (co to oznacza zostanie przedstawione za chwilę) pozwoliła z niezwykłą precyzją opisać większość obserwacji astronomicznych niemożliwych do wyjaśnienia na gruncie dziewiętnastowiecznej fizyki oraz doprowadziła do sformułowania niezwykle interesujących wniosków, takich jak istnienie czarnych dziur, powstawanie fal grawitacyjnych czy koncepcja wielkiego wybuchu. Po drugie, Einstein zainicjował zupełną zmianę samej metody naukowej fizyki. Począwszy od Galileusza a następnie Newtona fizyka skupiała się na podejściu „odgórnym”: od wyniku eksperymentu do matematycznego opisu mierzonych zjawisk. Einstein zaproponował metodę „oddolną”, zgodną z zasadą: najpierw stwórzmy nietypowy (jak na owe czasy), lecz spójny matematycznie opis, a następnie zbadajmy wnioski, jakie z niego płyną dla przewidywań eksperymentalnych. Ponieważ możliwych opisów jest bardzo wiele należy przy tym przyjąć pewne kryteria wyboru „właściwej” teorii. Po pierwsze, nowa teoria powinna być zgodna z poprzednio obowiązującą wszędzie tam, gdzie ta poprzednia dobrze opisuje wyniki pomiarów (**zasada korespondencji**) oraz przewidywać nowe zjawiska możliwe do eksperymentalnego potwierdzenia. Po drugie, teoria powinna być maksymalnie „prosta” – powinna zależeć od możliwie najmniejszej liczby parametrów i przyjmować jak najmniej dodatkowych założeń¹.

Ogólna Teoria Względności i mechanika kwantowa okazały się niezwykle skuteczne w opisie otaczającego nas świata. W szczególności, teoria grawitacji Einsteina pozwoliła stworzyć tzw. model kosmologiczny opisujący rozwój ca-

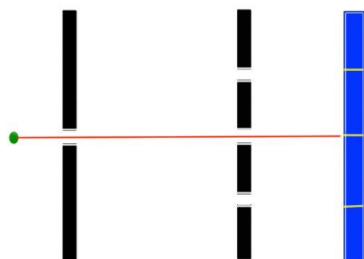
¹ Anegdota mówi, że Einstein spytany, dlaczego spośród wielu możliwych teorii geometrycznej grawitacji wybrał tę, którą obecnie nazywamy Ogólną Teorią Względności, odpowiedział, że była ona „najładniejsza”.

łego Wszechświata od momentu wielkiego wybuchu aż po czasy współczesne, zaś mechanika kwantowa doprowadziła do sformułowania tzw. Modelu Standardowego, opisującego w zwarty sposób wszystkie pozostałe (poza grawitacyjnym) oddziaływania i tłumaczącego cechy wszelkiej dotychczas zaobserwowanej materii. Z drugiej strony teorie te nie są wzajemnie kompatybilne. Wynika to z zupełnie odmiennej skali zjawisk opisywanych przez każdą z nich, jak również z innych założeń stojących za ich podstawami. Mechanika kwantowa dobrze opisuje fizykę w skali (sub)atomowej, zaś Ogólna Teoria Względności odnosi się do skali makro. Co prawda, zarówno teoria Einsteina jak i mechanika kwantowa niezwykle precyzyjnie przewidują wyniki większości eksperymentów w odpowiedniej dla każdej z nich skali, lecz wciąż istnieje wiele pytań, które wymagają odpowiedzi. Najbardziej zadziwiające jest to, że współczesna fizyka doskonale opisuje zachowanie „zwykłej” materii, lecz według niektórych szacunków materia ta stanowi zaledwie około 5% zawartości Wszechświata. Pozostała część to tzw. ciemna materia (około 27%) czy jeszcze bardziej tajemnicza ciemna energia (około 68%), których natury zupełnie nie rozumiemy. Paradoksalnie, można pokusić się więc o stwierdzenie, że po złotym wieku rozwoju fizyki zapoczątkowanym przez wspomnianą powyżej rewolucję naukową z początku XX wieku, znajdujemy się obecnie w trochę podobnej sytuacji jak naukowcy z przełomu XIX i XX wieku, szukając kolejnej rewolucyjnej idei. Być może idea ta powinna być związana z teorią łączącą cechy Ogólnej Teorii Względności i mechaniki kwantowej w jednym spójnym ujęciu tzw. kwantowej grawitacji. Postulowana teoria kwantowej grawitacji powinna być w stanie odpowiedzieć na najbardziej fundamentalne pytania dotyczące początku Wszechświata, natury czasu i przestrzeni oraz wyjaśniać zjawiska fizyczne zachodzące na niezwykle małych odległościach, porównywalnych z tzw. długością Plancka², dla których zarówno mechanika kwantowa jak i teoria Einsteina tracą sens. Aby eksperymentalnie zbadać zjawiska fizyczne zachodzące w tak małych skalach, potrzebowalibyśmy energii rzędu miliona miliardów razy większej niż ta obecnie dostępna w największym na świecie akceleratorze cząstek, Wielkim Zderzaczem Hadronów (LHC). Tak małe odległości nie są obecnie i być może nigdy nie będą dostępne dla bezpośrednich pomiarów eksperymentalnych, nie wyklucza to jednak możliwości, że związana z nimi fizyka może się objawiać w subtelnym pomiarach kosmologicznych.

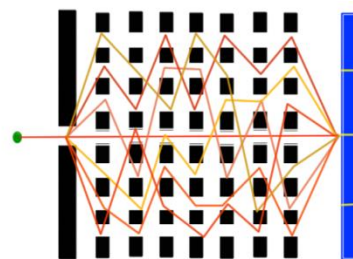
² Długość Plancka wynosi około 10^{-35} m (jeden metr należy podzielić przez liczbę zapisaną jako jeden z trzydziestoma pięcioma zerami). Aby wyobrazić sobie o jak niezwykle małej długości mówimy, wyobraźmy sobie kropkę na końcu tego zdania. Gdybyśmy kropkę o średnicy równej długości Plancka powiększyli do rozmiarów kropki na końcu zdania, to pierwotna kropka osiągnęłaby w tym samym powiększeniu rozmiar całego widzialnego Wszechświata.

Zadanie stworzenia teorii kwantowej grawitacji jest niezwykle skomplikowane i od kilkudziesięciu lat stanowi cel pracy wielu fizyków. Do najbardziej znanych prób rozwiązania tego problemu zalicza się teorię strun oraz pętlową grawitację kwantową. Każda z tych teorii ma jednak swoje ograniczenia. Jednym z mniej znanych podejść jest model Kauzalnych Dynamicznych Triangulacji (CDT), stworzony pod koniec lat 90. XX wieku przez Jana Ambjørna, Renate Loll i Jerzego Jurkiewicza. Jak się za chwilę przekonamy, model CDT posiada pożądane przez Einsteina cechy „nowej” teorii grawitacji – w szczególności spełnia wspomnianą powyżej zasadę korespondencji, jednocześnie wykazując wiele nietrywialnych cech „nowej” fizyki oraz oparty jest na stosunkowo prostym połączeniu mechaniki kwantowej z Ogólną Teorią Względności, bez uciekania się do wielu dodatkowych założeń.

Zgodnie z mechaniką kwantową, każdy obiekt fizyczny znajduje się równocześnie w wielu stanach kwantowych. Jest to sprzeczne z Ogólną Teorią Względności, zakładającą istnienie tylko jednego „klasycznego” stanu. Jednocześnie, mechanika kwantowa przyjmuje ustaloną geometrię (kształt) czasoprzestrzeni, niezależną od zachodzących w niej zjawisk. W Ogólnej Teorii Względności geometria czasoprzestrzeni jest obiektem dynamicznym, kształtowanym przez masywne obiekty znajdujące się w jej wnętrzu. Model CDT łączy cechy obydwu teorii, używając wielostanowego opisu mechaniki kwantowej do samej geometrii czasoprzestrzeni poprzez zastosowanie metody tzw. sumy (całki) po trajektoriach. Aby zrozumieć to pojęcie, wyobraźmy sobie układ przesłon ze szczelinami, przez który przechodzi pocisk wystrzelony z karabinu wycelowanego dokładnie w środek tarczy (rys. 1). Zgodnie z fizyką klasyczną, pocisk leci po linii prostej (zaniedbujemy na chwilę siłę ciężkości) i przechodząc przez środkową szczelinę ze 100% prawdopodobieństwem trafia w środek tarczy. Okazuje się, że w przypadku bardzo małego kwantowego pocisku (np. elektronu) wynik wielokrotnego powtarzania tego doświadczenia byłby inny: pocisk czasami trafiałby w środek tarczy, czasami zaś w inne jej punkty, przy czym możliwe jest obliczenie prawdopodobieństwa każdego z tych zdarzeń. Wygląda to tak, jakby kwantowy pocisk mógł przejść przez dowolną szczelinę, a nawet jakby (podobnie jak fala światła) przechodził przez wszystkie szczeliny jednocześnie. Załóżmy teraz, że mamy bardzo dużo przesłon z bardzo gęsto umieszczonymi szczelinami. Zgodnie z mechaniką kwantową pocisk przechodzi przez dowolny układ szczelin wykreślając „zygzakowatą” krzywą (rys. 2). Aby obliczyć prawdopodobieństwo trafienia w konkretny punkt tarczy musimy dokonać pewnego sumowania z uwzględnieniem wszystkich „zygzakowatych” dróg łączących punkt początkowy i końcowy, przy czym każda z dróg ma nieco inną wagę (znaczenie), zależną od tzw. działania.



Rys. 1

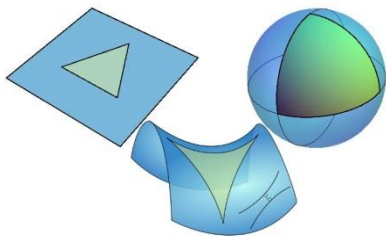


Rys. 2

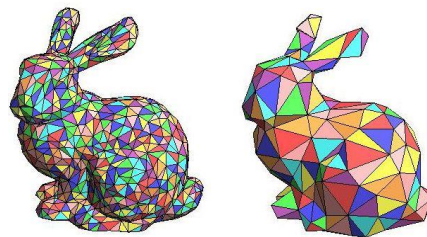
Posłużmy się tutaj pewną analogią. Wyobraźmy sobie dziecko budujące pojazd z klocków lego. Dziecko stara się uzyskać kształt samochodu zgodny z załączoną instrukcją, jednak z braku umiejętności, czy też ulegając fantazji, od czasu do czasu przestawia położenie pewnych klocków. Zazwyczaj odchylenia od kształtu z instrukcji nie są znaczne (np. kierownica zostaje przestawiona z lewej na prawą stronę, czy też zmienia się kolor przednich świateł), od czasu do czasu jednak zdarza się, że budowla bardziej przypomina samolot niż samochód. Wyobraźmy też sobie, że opiekun dziecka obiektywnie ocenia poszczególne kształty, za każdym razem przyznając punkty w zależności od tego, na ile wybudowany pojazd przypomina samochód z instrukcji. Im mniejsze odchylenie od instrukcji tym mniejsza liczba punktów (punkty mierzą odchylenia od założonego kształtu). Okazuje się, że nieco podobnie postępuje natura. Powróćmy do przykładu kwantowego pocisku poruszającego się między szczelinami. W fizyce odpowiednikiem oceny opiekuna jest tzw. **działanie**, opisujące ruch pocisku. Wartość działania zależy od tego jaką drogą (trajektorią) pocisk się porusza. W fizyce klasycznej pocisk za każdym razem „wybiera” identyczną drogę – linię prostą, łączącą lufę ze środkiem tarczy (odpowiednik kształtu auta z instrukcji) – taką, dla której wartość działania osiąga lokalne minimum. W mechanice kwantowej pocisk może się poruszać wszystkimi możliwymi drogami (tak jak mogą się zmieniać kształty w zabawie dziecka). Dla każdej z tych dróg działanie (ocena opiekuna) przybiera zazwyczaj inną wartość. Trajektorie o małej wartości działania (bliskie klasycznej) mają duży wkład przy obliczaniu prawdopodobieństwa znalezienia pocisku w danym punkcie tarczy, zaś trajektorie o dużej wartości działania (dalekie od klasycznej) są prawie pomijalne.

W modelu CDT rolę trajektorii spełnia geometria czasoprzestrzeni. Żeby lepiej zrozumieć to pojęcie wyobraźmy sobie płaską kartkę papieru. Właściwości powierzchni takiej kartki różnią się istotnie od właściwości powierzchni kuli, czy powierzchni siodła. W szczególności, suma kątów wewnętrznych dowolnego trójkąta na powierzchni kartki wynosi zawsze 180° . Okazuje się, że na powierzchni kuli suma kątów wewnętrznych trójkąta jest większa, zaś na powierzchni siodła – mniejsza niż 180° (rys. 3). Fizycy mówią o (dodatnim lub

ujemnym) deficycie kątowym i związanej z nim dodatniej lub ujemnej krzywiznie przestrzeni. W ogólności, można sobie wyobrazić bardzo skomplikowaną zakrzywioną powierzchnię (przestrzeń), gdzie niektóre fragmenty lokalnie przypominają powierzchnię kartki, podczas gdy inne są podobne do powierzchni kuli albo siodła. Właśnie takimi przestrzeniami zajmuje się Ogólna Teoria Względności, z której wynika, że ruch dowolnego ciała pod wpływem działania siły grawitacji może być opisany jako ruch w pewnej zakrzywionej (czaso)przestrzeni.



Rys. 3



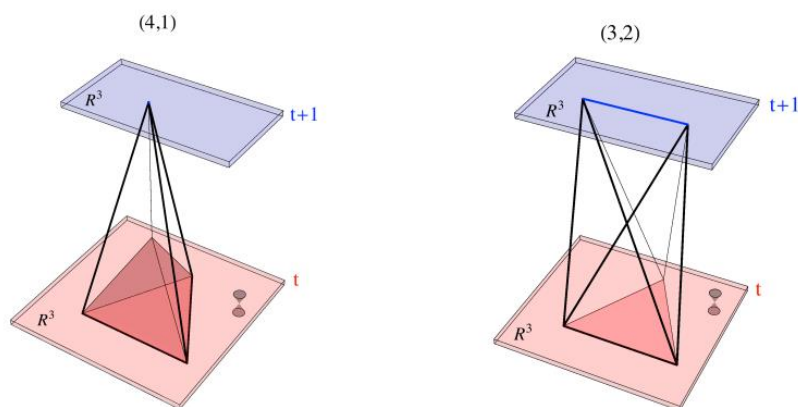
Rys. 4

Podobnie jak w przypadku kwantowego pocisku poruszającego się różnymi trajektoriami, w teorii kwantowej grawitacji oprócz klasycznej (wynikającej z minimum działania Ogólnej Teorii Względności) czasoprzestrzeni możliwe są inne geometrie, czasami znacząco różne od tej pierwszej. Każdą taką czasoprzestrzeń można przybliżyć za pomocą tzw. triangulacji, czyli powierzchni złożonej ze sklejonych bokami trójkątów. Im mniejszych trójkątów użyjemy, tym lepsze przybliżenie uzyskamy (rys. 4). Tak więc zagadnienie „sumowania” gładkich czasoprzestrzeni złożonych z nieskończonej liczby punktów można sprowadzić do znacznie łatwiejszego problemu „sumowania” triangulacji złożonych ze skończonej liczby trójkątów.

Sumowanie triangulacji dwuwymiarowych powierzchni jest stosunkowo łatwe do rozwiązania, problem znacząco się jednak komplikuje w przypadku większej liczby wymiarów. W przypadku czterowymiarowej czasoprzestrzeni (trzy wymiary przestrzenne + czas) musimy użyć czterowymiarowych uogólnień trójkątów, zwanych sympleksami. Wracając do analogii z klockami lego – praktycznie każdy dowolnie skomplikowany trójwymiarowy kształt możemy (z określoną dokładnością) odtworzyć łącząc ze sobą klocki zaledwie kilku rodzajów. W przypadku CDT dochodzi dodatkowy czwarty wymiar związany z czasem i „klocki” stają się czterowymiarowe³. Okazuje się przy tym, że do

³ Boki sympleksów („klocków”) używanych w CDT są w przeciwieństwie do klocków lego trójkątne a nie prostokątne, zaś klocki można łączyć dowolnymi „ścianami”, jednak ogólna analogia pozostaje prawdziwa.

połączenia ich w jedną zwartą całość wystarczy rozróżnić dwa rodzaje sympleksów (rys. 5).



Rys. 5

Pierwszy sympleks (schematycznie przedstawiony z lewej strony) jest związany z przestrzennymi warstwami określonego wspólnego czasu (obszary zaznaczone na rysunku kolorami – kolor w wersji internetowej). Warstwy te są zbudowane z połączonych ze sobą identycznych 3-wymiarowych czworoscianów foremnych, tzw. tetraedrów (zaznaczonych ciemno – w Internecie na czerwono). Każdy taki tetraedr ma cztery wierzchołki o wspólnej współrzędnej czasowej. Każdy z tych czterech wierzchołków jest następnie połączony z jednym dodatkowym wierzchołkiem w sąsiedniej warstwie czasu, tworząc razem 4-wymiarowy obiekt zwany sympleksem typu (4,1). Drugi sympleks – typu (3,2) – (przedstawiony z prawej strony) interpoluje między poszczególnymi warstwami przestrzennymi: posiada on trzy wierzchołki w jednej warstwie czasu oraz dwa wierzchołki w warstwie sąsiedniej. Czterowymiarowe sympleksy (4,1) oraz (3,2) są łączone (3-wymiarowymi czworocściami) bokami w jedną całość będącą triangulacją gładkiej 4-wymiarowej czasoprzestrzeni. Z każdą taką triangulacją związana jest zazwyczaj inna wartość działania – w CDT używa się działania zdefiniowanego 100 lat temu przez Alberta Einsteina do opisu Ogólnej Teorii Względności.

Problem sumowania 4-wymiarowych triangulacji (z uwzględnieniem odpowiadającego im działania) można rozwiązać przy pomocy odpowiednich algorytmów numerycznych⁴. Algorytmy te generują opisane powyżej triangulacje, odpowiadające kwantowym stanom mikroskopijnego Wszechświata oraz po-

⁴ W CDT używa się tzw. algorytmu *Metropolis*, który generuje triangulacje z prawdopodobieństwem określonym przez związane z nimi działanie, co umożliwia automatyczne uwzględnienie wagi danej triangulacji w obliczanej sumie (całce) po trajektoriach.

zwalają na pomiar niektórych jego cech. Pomimo, że sam model CDT należy do obszaru badań fizyki teoretycznej, praktyczne aspekty jego analizy przypominają często pracę fizyka eksperymentalnego. Rzeczywisty eksperyment (nieosiągalny przy obecnym rozwoju technologicznym) jest w tym przypadku zastępowany eksperymentem numerycznym. Analogia ta jest daleko posunięta – eksperyment numeryczny, podobnie jak złożony eksperyment rzeczywisty, wymaga wielu wstępnych przygotowań (wstępnego przemyślenia problemu, zdefiniowania interesujących wielkości pomiarowych, zakupu aparatury – w tym wypadku komputerowej, modyfikacji/stworzenia nowego oprogramowania itp.), długiego czasu oczekiwania na wyniki (pomimo postępu współczesnej techniki obliczeniowej, pomiary zajmują niejednokrotnie wiele tygodni lub nawet miesiący) oraz starannego opracowania uzyskanych danych i analizy płynących z nich wniosków. Niejednokrotnie również koszt aparatury pomiarowej (superkomputerów użytych do symulacji) jest porównywalny z kosztem aparatury wykorzystywanej w badaniach fizyki eksperymentalnej. Z uwagi na złożoność problemu, ograniczony czas dostępny dla obliczeń i wielkość dostępnej pamięci komputerowej w symulacjach numerycznych CDT uwzględniane są obecnie jedynie najbardziej podstawowe cechy rzeczywistego Wszechświata (np. zazwyczaj pomija się obecność materii), zaś kwantowe „Wszechświaty” symulowane we wnętrzu komputera są niezwykle małe⁵.

Pomimo tych uproszczeń, badania modelu CDT doprowadziły do kilku niezwykle interesujących wniosków, które zostaną pokrótce przedstawione poniżej.

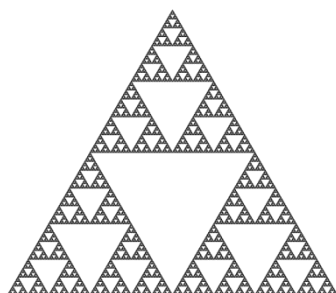
Po pierwsze, podobnie jak np. woda może znajdować się w różnych fazach różniących się stanem skupienia (lód, woda, para wodna), tak i kwantowa geometria w modelu CDT może występować w różnych fazach o odmiennych cechach fizycznych. Szczególnie interesująca jest tzw. faza C, która wykazuje cechy rzeczywistego makroskopowego Wszechświata. Można wykazać, że w obrębie tej fazy spełniona jest wspomniana na wstępie **zasada korespondencji** modelu CDT z Ogólną Teorią Względności Einsteina. Aby to zrozumieć powróćmy na chwilę do pocisku poruszającego się między przesłonami. Gdybyśmy zamiast rozpatrywać mikroskopowy kwantowy elektron obserwowali prawdziwą kulę z karabinu, to okazałoby się, że zawsze podąża ona klasyczną drogą i trafia w środek tarczy. Jest tak dlatego, że w przypadku obiektów makroskopowych wpływ poprawek kwantowych (nieklasycznych trajektorii) jest znikomy i praktycznie niemożliwy do zaobserwowania. Zasada korespondencji mówi w tym przypadku, że dla „dużych” obiektów mechanika kwantowa jest zbieżna z fizyką klasyczną. Symulacje komputerowe pokazują, że w modelu CDT kwantowe oscylacje geometrii zachodzą wokół tzw. czasoprzestrzeni de

⁵ „Wszechświaty” CDT mają średnicę kilku(nastu) długości Plancka. Długość Plancka – jednostka długości w naturalnym systemie jednostek oznaczana jako $l_p = 1,616199(97) \times 10^{-35}$ m.

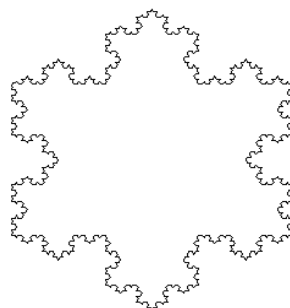
Sittera, zgodnej z klasyczną (niekwantową) Ogólną Teorią Względności Einsteina. Jednocześnie, znaczenie odchyień od stanu klasycznego maleje przy zwiększaniu rozmiarów symulowanego Wszechświata. CDT jest jedną z niewielu teorii kwantowej grawitacji, które zdołały odtworzyć tę klasyczną „granicę”.

Po drugie, badania pokazały, że kluczowym elementem w prezentowanym tutaj podejściu do teorii kwantowej grawitacji jest odgórne założenie kauzalności (przyczynowości). Oznacza to, że każde zdarzenie zachodzące w czasoprzestrzeni ma dobrze określoną przeszłość i przyszłość, które nie mogą się rozdzielać, czy zapętleć. Poprzednie próby stworzenia podobnego do CDT modelu bez uwzględnienia tego założenia nie pozwalały na odtworzenie opisanej powyższej klasycznej „granicznej” geometrii – zasada korespondencji nie była tym samym spełniona. Niestety wygląda więc na to, że przedstawiane w literaturze *science fiction* podróże w czasie nie są fizycznie możliwe.

Po trzecie, badania pokazują szereg nietrywialnych własności kwantowej czasoprzestrzeni opisanej przez CDT. W szczególności, we wspomnianej powyżej fazie C, geometria wydaje się być efektywnie dwuwymiarowa na bardzo małych odległościach, zaś dla większych odległości obserwujemy fizyczne cztery wymiary czasoprzestrzeni. Na pierwszy rzut oka może wydawać się to bardzo dziwne – przeciw do budowy (triangulacji) czasoprzestrzeni używamy czterowymiarowych „klocków”. Problem tkwi w zbieżności różnych definicji tego, co nazywamy wymiarem. Po pierwsze, wymiar możemy zdefiniować jako ilość współrzędnych niezbędnych do opisu położenia dowolnego punktu – jest to tzw. wymiar topologiczny (w „zwykłej”, znanej ze szkoły, przestrzeni euklidesowej potrzebne są do tego trzy współrzędne, więc wymiar topologiczny wynosi trzy). Po drugie, wymiar można określić, patrząc na zmianę objętości dowolnej kuli wraz z jej promieniem – jest to tzw. wymiar Hausdorffa (w „zwykłej” przestrzeni objętość kuli rośnie jak promień do potęgi trzeciej, stąd wymiar Hausdorffa wynosi 3). Po trzecie wreszcie, wymiar można obliczyć analizując zachowanie hipotetycznego mikroskopowego ludzika, który przy każdym kroku wybiera losowo, w którą stronę pójdzie – jest to tzw. wymiar spektralny, zdefiniowany przez prawdopodobieństwo powrotu do punktu startowego (w „zwykłej” przestrzeni również wynosi on trzy). Okazuje się jednak, że w matematyce istnieją obiekty, dla których intuicyjne pojęcie wymiaru zawodzi i każda z powyższych definicji daje odmienny wynik, co więcej niekoniecznie będący liczbą całkowitą! Obiekty takie zwane są fraktalami. Przykłady fraktali wraz z ich wymiarem Hausdorffa zostały pokazane na rys. 6. W przypadku opisanej powyżej fazy C modelu CDT mierzony wymiar spektralny, który może zależeć od odległości, zmienia się od około dwóch dla małych odległości do czterech dla dużych odległości. Pozostałe definicje wymiaru w tym przypadku dają wynik cztery. Tym samym można przypuszczać, że opisana przez CDT kwantowa geometria ma naturę fraktalną.



Trójkąt Sierpińskiego
Wymiar Hausdorffa $\approx 1,585$
Źródło: Wikipedia



Płatek Kocha
Wymiar Hausdorffa $\approx 1,262$
Źródło: Wikipedia

Rys. 6

Po czwarte wreszcie, nie zapominajmy, że w CDT istnieją inne fazy. Niektóre z nich zapewne nie mają fizycznej interpretacji, istnieje jednak przypuszczenie, że ostatnio odkryta tzw. faza bifurkacji może być niezwykle interesująca. W szczególności, zachowanie geometrii na nowym przejściu fazowym można interpretować jako zamianę wymiaru czasu na dodatkowy (czwarty) wymiar przestrzeni (fizycy nazywają to zjawisko zmianą sygnatury metryki). Istnieje hipoteza mówiąca o tym, że taka zmiana mogła nastąpić na „bardzo wczesnym” etapie rozwoju Wszechświata (hipoteza ta tłumaczy częściowo mechanizm powstania wyróżnionego wymiaru czasu). Dokładne zrozumienie tego zjawiska jest niezwykle istotnym zadaniem, wymagającym dalszych badań.

Od Redakcji:

Polecamy artykuł Jerzego Jurkiewicza *Kwantowanie grawitacji. Co to znaczy?*, *Foton* 109, Lato 2010.



Jak dyfuzja anomalna stała się normalna

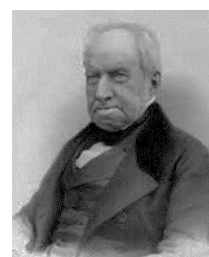
Bartłomiej Dybiec

Instytut Fizyki UJ

Dyfuzja jest procesem samoistnego przemieszczania się cząsteczek na skutek zderzeń z innymi cząsteczkami. Zderzenia te mogą zachodzić zarówno pomiędzy dyfundującymi cząsteczkami jak i cząsteczkami ośrodka, w którym odbywa się dyfuzja. Makroskopowo dyfuzja prowadzi do wyrównywania stężeń dyfundujących cząsteczek w układzie. Typowym doświadczeniem demonstrującym makroskopową dyfuzję jest umieszczenie w szklance wody kropli atramentu. Wraz z upływem czasu stężenie atramentu wyrównuje się, a woda w całej swojej objętości zostaje zabarwiona. Metody eksperymentalne pozwalają nie tylko na obserwację makroskopowej dyfuzji, ale także na obserwacje i śledzenie ruchu pojedynczych cząsteczek, wywołanego licznymi, nieregularnymi zderzeniami z cząsteczkami otoczenia.

Stwierdzenie, że dyfuzja jest wywołana licznymi, chaotycznymi zderzeniami między cząsteczkami cieczy lub gazu wydaje się obecnie oczywiste ze względu na niekwestionowaną atomistyczną budowę materii. Jednak nie zawsze tak było. W 1785 roku holenderski fizjolog, biolog i chemik Jan Ingenhousz opisał nieregularny ruch pyłu węglowego na powierzchni alkoholu. Podobnych stwierdzeń dokonał szkocki botanik Robert Brown w roku 1827, obserwując ruch zawieszony pyłków roślinnych oraz cząsteczek nieorganicznych w wodzie. Jego obserwacje wykluczyły organiczną przyczynę ruchu, ale ani Ingenhousz, ani Brown, nie podali wytłumaczenia chaotycznych, nieregularnych przemieszczeń obserwowanych cząsteczek. Na wytłumaczenie ruchów Browna trzeba było poczekać do początku XX wieku. Od tamtego czasu, ze względu na rozwój metod eksperymentalnych oraz teoretycznych, obraz dyfuzji jak i jej zrozumienie uległo licznym zmianom.

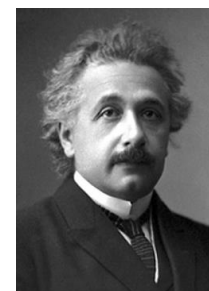
Wytłumaczenie ruchów Browna zostało niezależnie podane przez Alberta Einsteina (1905) i Mariana Smoluchowskiego (1906), którym udało się nie tylko stworzyć teorię ruchów Browna, ale także powiązać współczynnik dyfuzji ze znanymi wielkościami (relacja Smoluchowskiego-Ein-



Robert Brown
(1773–1858)



Marian Smoluchowski
(1872–1917)



Albert Einstein
(1879–1955)

steina). Podobny związek wyprowadził także William Sutherland w 1904 roku. W tym kontekście należy także wymienić francuskiego matematyka Louisa Bacheliera, który w swojej rozprawie doktorskiej z 1900 roku wykorzystał teorię procesów stochastycznych (ruchów Browna) do opisu cen na giełdzie.

Liczne zderzenia dyfundujących cząsteczek prowadzą do rozplywania się cząstek umieszczonych początkowo w jednym punkcie. Makroskopowo ewolucję gęstości prawdopodobieństwa znalezienia cząstek opisuje równanie dyfuzji

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = K_1 \frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial x^2}, \quad (1)$$

którego rozwiązaniem jest

$$P(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi K_1 t}} \exp\left[-\frac{x^2}{4K_1 t}\right], \quad (2)$$

dla którego

$$\langle x(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} xP(x,t)dx = 0 \quad (3)$$

oraz

$$\langle x^2(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 P(x,t)dx = 2K_1 t. \quad (4)$$

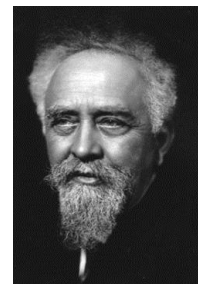
$P(x,t)$ jest rozkładem normalnym $N(\mu, \sigma^2)$ ze średnią $\mu = 0$ oraz wariancją $\sigma^2 = 2K_1 t$. Natomiast związek fluktuacyjno-dyssypacyjny (relacja Smoluchowskiego-Einsteina)

$$K_1 = k_B \frac{T}{m\eta} = \frac{R}{N_A} \frac{T}{m\eta}$$

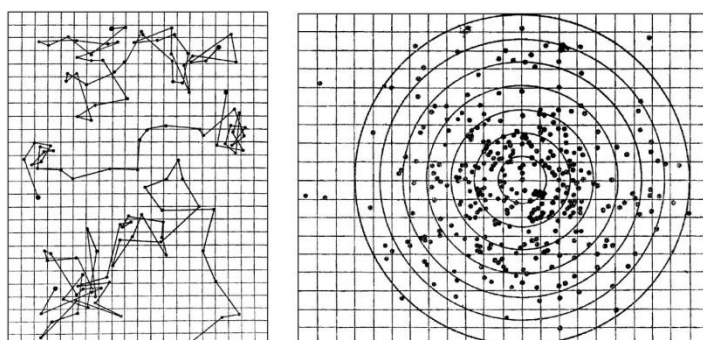
wiąże z sobą współczynnik dyfuzji K_1 (miara fluktuacji) ze znanymi i wyznaczonymi wielkościami: T – temperatura, m – masa cząsteczki, k_B – stała Boltzmana oraz η – lepkość (dyssypacja). Stała Boltzmana jest równa $k_B = \frac{R}{N_A}$, gdzie R jest stałą gazową, a N_A liczbą Avogadra.

Teoria rozwinięta przez Einsteina i Smoluchowskiego może zostać wykorzystana do wyznaczenia liczby Avogadra. Współczynnik dyfuzji K_1 można wyznaczyć mierząc wariancję przemieszczenia wielu dyfundujących cząsteczek. Dzięki znajomości związku fluktuacyjno-dyssypacyjnego znalezione przez Smoluchowskiego, Einsteina i Sutherlanda oraz znajomości pozostałych wielkości występujących w tym związku, francuski fizyk Jean-Baptiste Perrin w 1908 roku wyznaczył liczbę Avogadra. Rysunek 1 pokazuje trzy przykładowe trajektorie drobin kitu zarejestrowane przez Perrina wraz z wykresem, na

podstawie którego wyznaczono gęstość prawdopodobieństwa $P(\vec{r}, t)$ oraz $\langle \vec{r}^2 \rangle$, a następnie liczbę Avogadra. Doświadczenia te były początkiem całej serii eksperymentów prowadzących do coraz dokładniejszego wyznaczenia tejże stałej. W 1926 roku Jean-Baptiste Perrin został uhonorowany Nagrodą Nobla z fizyki „za prace dotyczące nieciągłej budowy materii, a szczególnie za odkrycie równowagi w procesach osadzania”.



Jean-Baptiste Perrin
(1870–1942)



Rys. 1. Trajektorie ruchów Browna obserwowane przez Perrina za: J. Perrin, Ann. chim. et d. phys. VIII 18, 5 (1909). Łamana łączy zarejestrowane położenia drobin kitu

Liczbę Avogadra można wyznaczyć nie tylko na podstawie obserwacji położenia wielu cząsteczek, ale także na podstawie pojedynczej długiej obserwacji (trajektorii). Tego typu doświadczenia zostały wykonane między innymi przez Ivara Nordlunda (1913) oraz Eugene Kapplera (1931). Podobnie jak poprzednio, taki pomiar opiera się na teorii Smoluchowskiego, Einsteina oraz na hipotezie ergodycznej, która pozwala na zamianę średnich po zespole na średnie po czasie

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \overline{\mathcal{O}}_t, \quad (6)$$

gdzie

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \int P(\mathcal{O}) \mathcal{O} d\mathcal{O} \quad (7)$$

oraz

$$\overline{\mathcal{O}}_t = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{O}(t) dt. \quad (8)$$

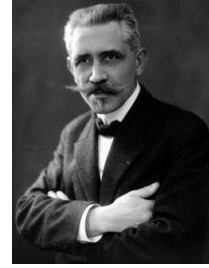
Dla średniego przemieszczenia kwadratowego hipoteza ergodyczna prowadzi do następującego związku

$$\langle x^2(t) \rangle = \overline{\delta^2(t, T)}, \quad (9)$$

gdzie

$$\overline{\delta^2(t,T)} = \frac{1}{T-t} \int_0^{T-t} [x(t'+t) - x(t')]^2 dt'. \quad (10)$$

Efektywny opis układów stochastycznych zawdzięczamy francuskiemu fizykowi Paulowi Langevinowi. Jest on twórcą dynamiki stochastycznej opartej na stochastycznym równaniu różniczkowym (obecnie nazywanym równaniem Langevina). Langevin założył, że skomplikowane, nie w pełni znane oddziaływania badanej cząstki z otoczeniem może zostać przybliżone przez szum, czyli proces stochastyczny o określonych własnościach. W najprostszej, przetłumionej formie równanie Langevina przyjmuje postać



Paul Langevin
(1872–1946)

$$\frac{dx(t)}{dt} = \xi(t), \quad (11)$$

gdzie $x(t)$ jest położeniem cząstki Brownowskiej, a $\xi(t)$ jest białym szumem gaussowskim, dla którego

$$\langle \xi(t) \rangle = 0 \quad (12)$$

oraz

$$\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = 2K_1\delta(t-t'). \quad (13)$$

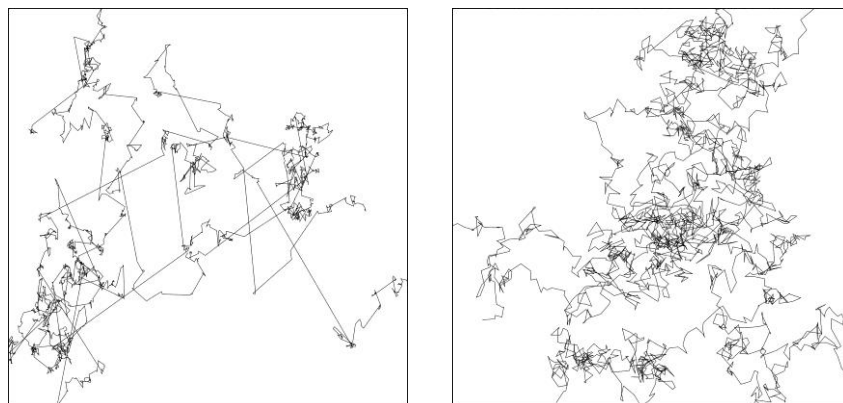
Z powyższego równania Langevina automatycznie wynika

$$\langle x^2(t) \rangle = 2K_1t. \quad (14)$$

Proces $x(t)$ jest tak zwanym procesem Wienera (ruchem Browna). Ewolucja gęstości prawdopodobieństwa zmiennej x opisana jest przez równanie dyfuzji (1).

Dyfuzja jednak nie zawsze musi być taka sama i nie zawsze przebiega tak samo, a obserwowane różnice nie sprowadzają się tylko i wyłącznie do różnych wartości współczynnika dyfuzji K_1 . Rysunek 2 pokazuje dwie dwuwymiarowe trajektorie, które posiadają różne własności. Dlatego pojawia się naturalne pytanie: jak można zdefiniować, rozróżnić i scharakteryzować różne rodzaje dyfuzji? W przedstawionych dotychczas modelach wariancja (średnie przemieszczenie kwadratowe) rośnie liniowo w czasie

$$\langle x^2(t) \rangle = 2K_1t. \quad (15)$$



Rys. 2. Dwuwymiarowe trajektorie odpowiadające dyfuzji anomalnej (lewa kolumna) i normalnej (prawa kolumna)

Jednak nie zawsze tak musi być. Już w 1926 roku Levis Fry Richardson badał dyfuzję w przepływie turbulentnym, dla której zaobserwował nieliniowy wzrost średniego przemieszczenia kwadratowego

$$\langle x^2(t) \rangle \propto t^3. \quad (16)$$

Zwykle to właśnie średnie przemieszczenie kwadratowe jest używane do określenia rodzaju dyfuzji

$$\langle [x(t) - x(0)]^2 \rangle \propto t^\delta \quad (17)$$

a o rodzaju dyfuzji decyduje wartość wykładnika δ . Według uproszczonego podziału $\delta = 1$ odpowiada dyfuzji normalnej, która była badana między innymi przez Smoluchowskiego i Einsteina. Odstępstwa wykładnika δ od jedności wskazują zwykle na dyfuzję anomalną: $\delta < 1$ odpowiada subdyfuzji, a $\delta > 1$ superdyfuzji. Układy anomalne nie są opisane zwykłym równaniem dyfuzji (1).

Mikroskopowy obraz dyfuzji polegający na licznych zderzeniach badanej cząsteczki z cząsteczkami otoczenia znajduje swoje odzwierciedlenie w równaniu Langevina i teorii procesów stochastycznych. Z matematycznego punktu widzenia dyfuzja normalna jest naturalną konsekwencją centralnego twierdzenia granicznego, które głosi, że suma wielu niezależnych zmiennych losowych (scharakteryzowanych skończoną wariancją) pochodzących z takiego samego rozkładu prawdopodobieństwa jest zbieżna do rozkładu normalnego. Dla dyfundującej cząsteczki sumowanymi przyczynkami są jej losowe przemieszczenia, które w pierwszym przybliżeniu można potraktować jako ograniczone i niezależne. Dlatego gęstość prawdopodobieństwa dyfundującej cząsteczki jest opisana rozkładem Gaussa.

Centralne twierdzenie graniczne wymaga, aby sumowane przyczynki były „ograniczone” (posiadały skończoną wariancję) i niezależne. Osłabienie założeń centralnego twierdzenia granicznego na ogół będzie prowadziło do dyfuzji anomalnej. Proste możliwe modyfikacje zakładają losowanie długości skoków z rozkładów ciężkoogonowych. Założenie, że skoki nie są niezależne lub że odbywają się one w sposób nieregularny, tzn. w taki, że średni czas oczekiwania na kolejny skok nie jest dobrze określony. Dane eksperymentalne pokazują, że istotnie mamy do czynienia z tego typu odstępstwami od dyfuzji normalnej i że są one bardzo częste.

W układach silnie nierównowagowych często obserwuje się fluktuacje bardziej ogólne niż gaussowskie. Przykładem zjawisk, w których obserwuje się fluktuacje o asymptocie typu prawa potęgowego, są efekty dynamiczne w plazmie, dyfuzja w układach koloidalnych, relaksacja dielektryczna w ośrodkach anizotropowych, transport ładunkowy i energetyczny w konformacyjnie zmiennych biopolimerach, dyfuzja w sieciach optycznych oraz efektywne strategie poszukiwawcze. Układy tego typu nadal mogą być opisane za pomocą odpowiedniego równania Langevina, w którym zamiast białego szumu gaussowskiego występuje biały szum α -stabilny, który jest naturalnym uogólnieniem białego szumu gaussowskiego. Zasadnicza zmiana zachodzi jednak na poziomie równania dyfuzji. Ewolucja gęstości prawdopodobieństwa jest opisana ułamkowym równaniem Smoluchowskiego-Fokkera-Plancka ($0 < \alpha < 2$)

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} [V'(x)P(x,t)] + K_\alpha \frac{\partial^\alpha P(x,t)}{\partial |x|^\alpha}, \quad (18)$$

$V(x)$ jest zewnętrznym potencjałem; α jest wykładnikiem charakteryzującym asymptotę fluktuacji, która jest typu $|x|^{-(\alpha+1)}$. Pochodna ułamkowa (Riesz-Weila) funkcji $f(x)$ jest zdefiniowana poprzez swoją transformatę Fouriera $\hat{f}(k)$

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial |x|^\alpha} f(x) = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{-ikx} |k|^\alpha \hat{f}(k), \quad (19)$$

(W granicy $\alpha = 2$ (oraz dla $\alpha > 2$) ułamkowa pochodna odtwarza drugą pochodną cząstkową.

W układach z pułapkami lub z zatłoczeniem również czasy oczekiwania na kolejny skok mogą pochodzić z rozkładów ciężkoogonowych. Obecność pułapek o różnej głębokości prowadzi do uwięzienia dyfundującej cząsteczki, co jest szczególnie dobrze widoczne w żywych komórkach, wypełnionych licznymi organellami. Dlatego często obserwowany jest potęgowy rozkład czasów oczekiwania na kolejny skok

$$P(\tau) \propto \tau^{-(\nu+1)}. \quad (20)$$

Dla rozkładu prawdopodobieństwa o asymptotyce prawa potęgowego z $\nu < 1$ średni czas oczekiwania na kolejny skok jest nieskończony, co prowadzi do spowolnienia dyfuzji (subdyfuzji), a także łamania ergodyczności.

Obecność przeszkód może modyfikować zarówno własności czasowe (uwięzienia, pułapkowanie dyfundującej cząsteczki), jak i przestrzenne (obciążenia długich skoków) dyfuzji, w efekcie czego geometria układu może prowadzić do niemarkowowskości (uwięzienia) oraz na powrót do gaussowskości (obciążenia długich skoków).

W przypadku błędzeń przypadkowych z czasem ciągłym najbardziej ogólna sytuacja występuje, gdy zarówno długości skoków, jak i czasy oczekiwania na kolejny skok pochodzą z rozkładów ciężkoogonowych. Zakładając, że długości skoków Δx losowane są z rozkładu o asymptotyce ($0 < \alpha < 2$)

$$P(\Delta x) \propto |\Delta x|^{-(1+\alpha)}, \quad (21)$$

a czasy oczekiwania τ mają asymptotę ($0 < \nu < 1$)

$$P(\tau) \propto \tau^{-(1+\nu)} \quad (22)$$

to ewolucja gęstości prawdopodobieństwa znalezienia cząsteczki w okolicach x w czasie t jest opisana przez podwójnie ułamkowe równanie Smoluchowskiego-Fokkera-Plancka

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = {}_0D_t^{1-\nu} \left[\frac{\partial}{\partial x} V'(x) + K_\alpha \frac{\partial^\alpha}{\partial |x|^\alpha} \right] P(x,t). \quad (23)$$

Anomalie czasowe są odpowiedzialne za pojawienie się czasowej pochodnej ułamkowej Riemanna-Liouville'a zdefiniowanej równaniem (18)

$${}_0D_t^{1-\nu} f(x,t) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \frac{d}{dt} \int_0^t dt' \frac{f(x,t')}{(t-t')^{1-\nu}}. \quad (24)$$

Długie skoki odpowiadają za pojawienie się przestrzennej pochodnej Riesz-Weila

$$F \left[\frac{\partial^\alpha}{\partial |x|^\alpha} f(x) \right] = -|k|^\alpha \hat{f}(x). \quad (25)$$

Dla błędzeń przypadkowych z czasem ciągłym dla $\nu \geq 1$ średni czas oczekiwania na kolejny skok jest dobrze określony, a dla $\alpha \geq 2$ wariancja długości skoku także jest skończona. W takiej sytuacji błędzenia przypadkowe z czasem ciągłym są opisane przez standardowe równanie dyfuzji w zewnętrznym potencjale



Andrei Markov
(1856–1922)

$V(x)$. $\nu < 1$ odpowiada dyfuzji niemarkowskiej, a $\alpha < 2$ tak zwanym lotem Lévy'ego.

Układy opisane równaniem (23) wykazują anomalne skalowanie średniego przemieszczenia kwadratowego oraz dla $\nu < 1$ są nieergodyczne, czyli nie jest spełniona dla nich hipoteza ergodyczna (9). Występuje w nich słabe łamanie ergodyczności. Współzawodnictwo między długimi czasami oczekiwania na kolejny skok a długimi skokami może prowadzić do dyfuzji paradoksalnej, czyli takiej dyfuzji anomalnej, dla której średnie przemieszczenie kwadratowe skaluje się jak dla dyfuzji normalnej. Dzieje się tak dlatego, że długie czasy oczekiwania na kolejny skok mogą zostać skompensowane długimi skokami. Taka hipotetyczna możliwość wskazuje, że rozróżnienie rodzaju dyfuzji tylko i wyłącznie na podstawie średniego przemieszczenia kwadratowego w pewnych bardzo specjalnych sytuacjach może być nierozstrzygujące.

Liczne obserwacje doświadczalne, wykorzystujące metody śledzenia pojedynczych cząsteczek, pokazują, że powszechną, czyli normalną, jest dyfuzja anomalna. Dyfuzję normalną należy traktować jako dobrze zrozumiany model, będący pierwszym przybliżeniem dla bardziej ogólnych i skomplikowanych sytuacji, do opisu których konieczny jest bardziej zaawansowany opis matematyczny niż cząstkowe równania różniczkowe. Badanie doświadczalne oraz teoretyczne układów prowadzących do dyfuzji anomalnej jest bardzo intensywnie rozwijanym obszarem badań. Świadczą o tym liczne publikacje oraz konferencje poświęcone tym zagadnieniom. Podczas tegorocznego XLIII Zjazdu Polskiego Towarzystwa Fizycznego (Kielce, 6–11 września 2015) jedna z sesji specjalistycznych zostanie poświęcona procesom dyfuzji normalnej i anomalnej.

Metody matematyczne rozwinięte i zastosowane do badania dyfuzji mogą być używane i do innych zagadnień. Tematyka badań zapoczątkowana przez Bacheliera dała początek matematyce finansowej, a później i ekonofizyce. Rozwinięte na ich potrzeby metody, w tym teoria procesów stochastycznych, znalazły liczne zastosowania. Z powodzeniem stosuje się je między innymi do badania dyfuzji oraz zjawisk indukowanych szumami, czyli zjawisk, które mają miejsce dzięki obecności szumu. Obecność szumów w układach fizycznych jest nie tylko niepożądana, ale prowadzi do szeregu zjawisk demonstrujących konstruktywną rolę fluktuacji w układach dynamicznych. Przykładem takich zjawisk są między innymi rezonans stochastyczny, aktywacja rezonansowa oraz efekt zapadkowy, które także mogą być badane w obszarze dyfuzji anomalnej.

Serdecznie dziękuję Pani Profesor Ewie Gudowskiej-Nowak za zainteresowanie mnie zagadnieniami transportu anomalnego oraz liczne cenne sugestie podczas wieloletniej współpracy naukowej.

Literatura

- [1] N.G. van Kampen, *Procesy stochastyczne w fizyce i chemii*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1990.
- [2] H. Risken, *The Fokker-Planck equation. Methods of solution and application*, Springer Verlag, Berlin 1984.
- [3] C.W. Gardiner, *Handbook of stochastic methods for physics, chemistry and natural sciences*, Springer Verlag, Berlin 2009.
- [4] A. Janicki, A. Izydorczyk, *Komputerowe metody w modelowaniu stochastycznym*, Wydawnictwa Naukowo Techniczne, Warszawa 2001.
- [5] G. Samorodnitsky, M.S. Taqqu, *Stable non-Gaussian random processes: Stochastic models with infinite variance*, Chapman and Hall, New York 1994.
- [6] P.Hänggi, P. Talkner, M. Borkovec, *Rev. Mod. Phys.* **62**, 251 (1990).
- [7] L. Gammaitoni, P. Hänggi, P. Jung, F. Marchesoni, *Rev. Mod. Phys.* **70**, 223 (1998).
- [8] R. Metzler, J. Klafter, *Phys. Rep.* **339**, 1 (2000).
- [9] P. Reimann, *Phys. Rep.* **361**, 57 (2002).
- [10] R. Metzler, J. Klafter, *J. Phys. A: Math. Gen.* **37**, R161 (2004).
- [11] R. Metzler, J.-H. Jeon, A.G. Cherstvy, E. Barkai, *Phys. Chem. Chem. Phys.* **16**, 24128 (2014).
- [12] B. Dybiec, E. Gudowska-Nowak, *Chaos* **20**, 043129 (2010).
- [13] B. Dybiec, E. Gudowska-Nowak, *Phys. Rev. E* **80**, 061122 (2009).
- [14] B. Dybiec, E. Gudowska-Nowak, *J. Stat. Mech.* P05004 (2009).



Znikające grosze i rozkład Poissona

Paweł F. Góra

Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej UJ

Narodowy Bank Polski przymierza się do projektu wycofania z obiegu monet jedno- i dwugroszowych. Są kosztowne w produkcji (wybicie monety jednogroszowej kosztuje ponoć kilkadziesiąt groszy) i dość uciążliwe w użyciu (kłopoty z wydawaniem reszty!), tak dla sklepów, jak i dla klientów. Monetą obiegową o najmniejszym nominale byłoby 5 gr. Plan nie zakłada automatycznego zaokrąglania cen: zaokrąglana byłaby tylko końcowa płatność w kasie, dokonywana gotówką. Przy płatności kartą naliczana byłaby kwota niezaokrąglona. Podobnie postąpiło już wiele krajów (na przykład Australia, Czechy, Holandia, Szwecja, Węgry) i bardzo sobie to chwala.



Jak miałyby to działać? Kwoty z cyfrą groszy 1, 2, 6, 7 byłyby zaokrąglane w dół do pełnych 5 gr, kwoty kończące się na 3, 4, 8, 9 byłyby zaokrąglane w górę. Na przykład 17,62 zł zaokrąglono by do 17,60 zł, ale 18,24 zł zaokrąglono by do 18,25 zł. Podobnie 25,69 zł zaokrąglono by do 25,70 zł. I tak dalej. Widać, że statystycznie byłyby tyle samo zaokrągleń w dół, co i w górę, przynajmniej na pierwszy rzut oka. Na pojedynczej transakcji (płatności w kasie) zysk lub strata nigdy nie przekroczy 2 gr.

Jednak handlowcy protestują, twierdząc, że „musieliby” zaokrąglić ceny i nie mogliby już sprzedawać towarów z końcówką 99 gr, na przykład po 14,99 zł. Klienci podobno interpretują taką cenę jako „14 z hakiem” i *wydaje* im się to znacznie bardziej atrakcyjne niż 15 zł, a więc chętniej taki towar kupują. Powtórzmy jeszcze raz: Plan Narodowego Banku Polskiego nie zakłada obowiązkowego zaokrąglania cen. Zaokrąglić – i to wyłącznie przy płatności gotówką – trzeba będzie dopiero końcową kwotę, a to się powinno uśrednić. Dla przykładu, chcemy kupić kilka batoników (i tylko batoników, nic więcej) po 1,99 zł sztuka. Jeśli kupimy jeden, będziemy musieli po zaokrągleniu zapłacić 2,00 zł – stracimy 1 gr. Jeśli kupimy dwa, zapłacimy nie 3,98 zł, ale 4,00 zł – stracimy 2 gr. Ale jeśli kupimy trzy batoniki, zapłacimy nie 5,97 zł, ale 5,95 zł – tym razem zarobimy 2 gr.

Także niektórzy klienci protestują przeciwko planowanym zmianom, upatrując w tym okazji do nienależnych zysków sklepów przy niekorzystnych dla klientów zaokrągleniach. Czy obawy te są uzasadnione? Innymi słowy, ile klienci mogą stracić (lub zarobić!) na zaokrągleniach płatności?

Żeby znaleźć odpowiedź na takie pytanie, fizyk ucieka się do symulacji. Symulacje przeprowadza się zawsze przy pewnych założeniach. Co przyjąć w tym wypadku? Duże sklepy oferują wiele towarów z końcówką ceny 9 gr. Klient za każdym razem wybiera pewną przypadkową liczbę tych produktów, które składać się będą na jedną płatność końcową, podlegającą zaokrągleniu. Zaraz, przypadkową, czyli jaką? Mówiąc ściśle, z jakiego rozkładu prawdopodobieństwa pochodzić będzie liczba produktów o końcówce ceny 9 gr, którą klient jednorazowo umieści w swoim koszyku? Otóż sądzę, że będzie to liczba losowa o rozkładzie Poissona.

Rozważmy pewną nieskończoną rodzinę zbiorów, które są parami rozłączne. Mogą to być odcinki czasu, wielokąty na płaszczyźnie, koszyki różnych klientów, właściwie wszystko jedno, co. W zbiorach tych umieszczamy losowo pewne elementy, przy czym domagamy się, aby w każdym była całkowita i nieujemna liczba elementów oraz żeby liczba elementów w różnych zbiorach była statystycznie niezależna. Można udowodnić [1], że te trzy wymagania – nieprzecinanie się zbiorów, liczba umieszczanych w nich elementów musi być liczbą całkowitą nieujemną, oraz statystyczna niezależność – wystarcza do tego, żeby liczba elementów w poszczególnych zbiorach zadana była rozkładem Poissona.

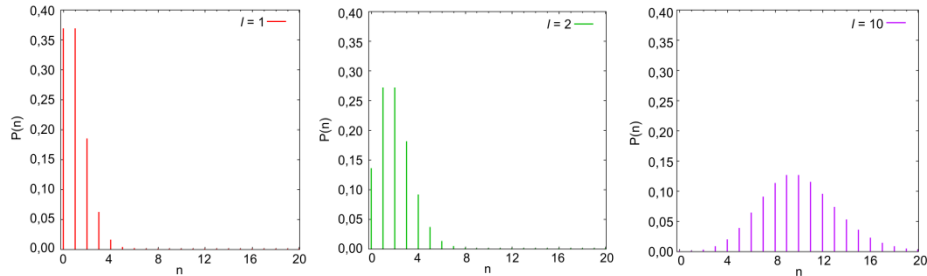
Jeśli mamy substancję promieniotwórczą, zawierającą wiele atomów promieniotwórczego pierwiastka, liczba rozpadów promieniotwórczych zachodzących w kolejnych przedziałach czasu (na przykład w kolejnych sekundach) dana jest rozkładem Poissona. Podobnie za pomocą rozkładu Poissona opisujemy liczbę gwiazd widocznych w różnych obszarach nieboskłonu lub też liczbę ziarenek piasku naniesionych przez wiatr na poszczególne poletka.

Rozkład Poissona – to znaczy prawdopodobieństwo, że w badanym zbiorze znajdzie się n elementów – dany jest wzorem

$$P(n) = \frac{l^n}{n!} e^{-l}.$$

Ma on jeden parametr, l , równy wartości średniej (oczekiwanej) tego rozkładu:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot P(n) = l.$$



Rysunek przedstawia rozkłady Poissona dla l równego, odpowiednio, 1, 2 oraz 10.

Parametr l nie musi być liczbą całkowitą. Warto zauważyć, że rozkład Poissona jest dosyć szeroki: jeśli l jest całkowite, prawdopodobieństwa że we wskazanym zbiorze jest $l-1$ lub $l+1$ elementów mogą być niewiele mniejsze od prawdopodobieństwa, że elementów jest dokładnie l , a w dostatecznie dużej próbie wystąpią też zbiory, w których liczba elementów będzie znacząco różnić się od wartości oczekiwanej l . Zauważmy, że dla małych l rozkład Poissona jest też wyraźnie niesymetryczny.

Zmienne losowe o rozkładzie Poissona można generować na komputerze za pomocą następującego algorytmu [2]:

```

P = -1, S = 1,0, q = exp(-l)
While S > q
  Generuj U o rozkładzie U(0,1), S=S*U, P=P+1
Return P

```

W powyższym algorytmie $U(0,1)$ oznacza liczbę o rozkładzie jednorodnym na przedziale $(0,1)$. Do jej wygenerowania można użyć generatora wbudowanego w język programowania, ale można też czegoś bardziej wyrafinowanego. Na przykład ja zawsze używam generatora Mersenne Twister [3].

Jesteśmy zatem gotowi do przeprowadzenia symulacji. Aby uczynić ją nieco bardziej realistyczną, zauważmy, że końcówki groszowe, oprócz „promocyjnych” cen typu 14,99, pojawiają się także przy zakupach „na wagę”. W tym ostatnim przypadku założmy, że rozkład ostatniej cyfry groszy $(0,1,\dots,9)$ jest równomierny. Mamy więc N klientów (w symulacji przyjąłem $N=1024$), z których każdy kupuje *średnio* l produktów o „promocyjnych” końcówkach 99 gr oraz jakieś towary „na wagę”. Aby uzyskać bardziej wiarygodne statystyczne wyniki, założmy, że każdy z klientów odbył $M=32$ wizyty w sklepie. (Nie jest ważne, ile stracimy lub zyskamy na pojedynczej operacji, ważne jest, jak na tym wyjdziemy długoterminowo.) Wyniki symulacji przedstawia poniższa tabela:

l	średni zysk klienta (zł)	średni zysk sklepu (zł)
1	-0,14	146,48
2	-0,09	92,54
3	-0,01	13,75
4	0,02	-15,90
5	0,01	-13,06
6	0,00	-3,04
7	0,00	1,23
8	0,00	1,60
9	0,00	0,10
10	0,00	-0,58

Jak widzimy, jeśli *średnio* kupujemy tylko jeden lub dwa artykuły o „promocyjnych” końcówkach cen, możemy na tym po wielu transakcjach stracić kilka- kilkanaście groszy, zaś obsługujący wielu klientów sklep na tym zarabia. Jeśli kupujemy więcej artykułów o „promocyjnych” końcówkach cen, wychodzimy na tym na zero, a zyski/straty sklepu też stają się nieistotne. Myślę, że ta symulacja przekonuje, iż obawy przed straszliwymi stratami, jakie poniosą klienci, jak i nieuzasadnionymi zyskami sklepów, jakie miałyby wynikać z wycofania monet o nominałach 1 i 2 gr, są nieuzasadnione. Podobne wnioski płyną z doświadczenia krajów, które już wprowadziły analogiczne zmiany.

Na wycofaniu monet o najniższych nominałach zarobi natomiast Narodowy Bank Polski, a więc my wszyscy (NBP całe swoje zyski odprowadza do budżetu państwa), nasze portmonetki staną się dosłownie lżejsze, zniknie też uciążliwa konieczność szukania i liczenia drobniaków przy płaceniu gotówką. Zdecydujmy się zrobić ten krok!

Bibliografia

- [1] Kingman J.F. (1993). *Poisson Processes*. Oxford: Oxford University Press.
- [2] Matsumoto M., Nishimura T. (1988). Mersenne twister: a 623-dimensionally equidistributed uniform pseudo-random number generator. *ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation* 8 (1), pp. 3–30.
- [3] Wieczorkowski R., Zieliński R. (1997). *Komputerowe generatory liczb losowych*. Warszawa: WNT.



Emisja wymuszona – modele klasyczne

Jerzy Ginter
Wydział Fizyki UW

1. Wprowadzenie

Jak wiadomo, zjawisko emisji wymuszonej stanowi podstawę działania laserów. Mówi się o nim na przykład tak (cytat z Wikipedii):

W optyce **emisja wymuszona** (*stymulowana, indukowana*) – proces emisji fotonów przez materię w wyniku oddziaływania z fotonem inicjującym. Warunkiem do tego, aby emisja wymuszona nastąpiła, jest równość energii fotonu z energią wzbudzenia atomu. Foton inicjujący emisję nie jest pochłaniany przez materię – pełni tylko rolę wyzwalającą proces. Foton emitowany przez atom ma częstotliwość (a więc również energię), fazę i polaryzację taką samą jak foton wywołujący emisję. Kierunek ruchu obu fotonów również jest ten sam. Światło złożone z takich identycznych fotonów nazywa się światłem spójnym. Zjawisko to jest podstawą działania laserów.

W sformułowaniu tym co najmniej dwie rzeczy są niezbyt precyzyjne:

1. Mogłoby się wydawać, że zjawisko emisji wymuszonej jest z natury swojej procesem kwantowym.
2. Mylone są dwa języki: falowy i korpuskularny, na przykład w zwrocie „foton ... ma fazę i polaryzację”.

Niniejszy artykuł poświęcony jest omówieniu kilku modeli klasycznych, które przynajmniej w pewnym stopniu mogą ułatwić zrozumienie zjawiska emisji wymuszonej.

1. Rozpocniemy od rozważania klasycznego oscylatora harmonicznego, pobudzanego siłą o częstości równej częstości własnej. Wykażemy, że w zależności od warunków początkowych dla położenia i prędkości oscylatora, istnieją dwie możliwości:
 - a. Pod wpływem siły zewnętrznej amplituda drgań rośnie z czasem. Energia jest przekazywana od źródła siły do oscylatora. Mamy do czynienia z „absorpcją” energii przez oscylator.
 - b. Pod wpływem siły zewnętrznej amplituda drgań maleje z czasem. Energia jest przekazywana od oscylatora do źródła siły. Mamy do czynienia z „emisją wymuszoną”.
2. Rozważymy przypadek, kiedy masa oscylatora byłaby także obdarzona ładunkiem, a ściślej mielibyśmy do czynienia z dipolem elektrycznym. Zastanowimy się, jak taki układ oddziałuje z falą elektromagnetyczną, a w szczególności, kiedy energia fali jest przez oscylator absorbowana, a kiedy mamy do czynienia z emisją wymuszoną.

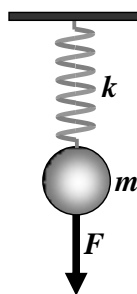
3. Omówimy układ wielu klasycznych mikrooscylatorów. Spróbujemy wyjaśnić, jak taki układ oddziałuje z falą elektromagnetyczną i dlaczego w takim przypadku zwykle mamy do czynienia z absorpcją energii.
4. Rozważymy ruch klasycznego bąka, który wykonuje precesję pod wpływem działającej na niego stałej siły.
5. Zastanowimy się – dla najprostszycch przypadków – jak taki bąk by się zachowywał, gdyby działała na niego siła periodyczna o częstości równej częstości precesji.
6. Rozważymy niezbyt fizyczny model, w którym obracający się bąk o stałej wartości momentu pędu ma jednocześnie pewien moment elektryczny, równoległy do momentu pędu bąka. Zastanowimy się, jak taki układ oddziaływałby z falą elektromagnetyczną.
7. Omówimy, jak można by przygotować układ wielu takich bąków, aby w oddziaływaniu z falą elektromagnetyczną emisja wymuszona przeważała nad procesem absorpcji.
8. Wspomnimy o prawdziwym spinowym momencie pędu i spinowym momencie magnetycznym elektronu. Omówiony model bąka może stanowić klasyczną – niestety dość daleką – ich analogię.

2. Klasyczny oscylator harmoniczny z siłą wymuszającą

Zacznijmy od przypadku bardzo prostego: klasycznego oscylatora harmonicznego o masie m i współczynniku sprężystości sprężyny k , czyli o częstości własnej $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, na który działa siła wymuszająca¹ (rys. 1)

$$F = F_0 \cos(\omega_0 t). \quad (1)$$

Jest to więc przypadek rezonansu.



Rys. 1

¹ Można byloby także wybrać siłę wymuszającą opisaną funkcją $\sin(\omega_0 t)$. Wtedy jednak obliczenia byloby nieco bardziej skomplikowane.

Równanie ruchu ma w tym przypadku postać

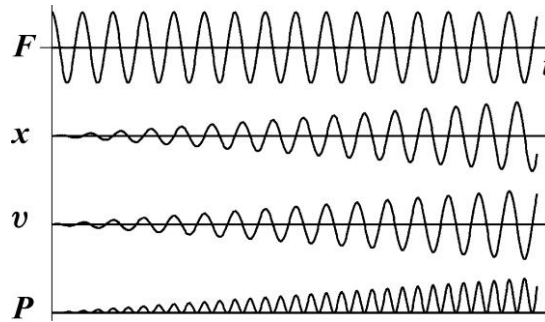
$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx + F_0 \cos(\omega_0 t), \quad (2)$$

czyli

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega_0 t). \quad (3)$$

Szczególne rozwiązanie równania niejednorodnego odpowiada drganiom o amplitudzie narastającej liniowo z czasem (rys. 2)

$$x_s = At \sin(\omega_0 t). \quad (4)$$



Rys. 2

Sprawdźmy to, a przy okazji wyznaczmy stałą A

$$\frac{d^2 x_s}{dt^2} = 2A\omega_0 \cos(\omega_0 t) - At\omega_0^2 \sin(\omega_0 t). \quad (5)$$

Po podstawieniu równania (5) do (3) dostajemy

$$2A\omega_0 \cos(\omega_0 t) - At\omega_0^2 \sin(\omega_0 t) + At\omega_0^2 \sin(\omega_0 t) = \frac{F_0}{m} \cos(\omega_0 t). \quad (6)$$

Widać, że funkcja (4) spełnia równanie ruchu, jeżeli

$$A = \frac{F_0}{2m\omega_0}. \quad (7)$$

Zatem

$$x_s = \frac{F_0}{2m\omega_0} t \sin(\omega_0 t). \quad (8)$$

Rozwiązanie to odpowiada warunkom początkowym $x(0) = 0$ i $v(0) = 0$. Aby wykazać drugą z tych równości obliczmy pochodną (rys. 2)

$$v_s = \frac{dx_s}{dt} = \frac{F_0}{2m\omega_0} \sin(\omega_0 t) + \frac{F_0}{2m} t \cos(\omega_0 t). \quad (9)$$

Widać, że v_s znika dla $t = 0$.

Z wzorów (8) i (9) wynika, że energia oscylatora rośnie z czasem. Mamy więc do czynienia z „absorpcją” energii z zewnętrznego źródła.

Na uzyskane wyniki możemy spojrzeć jeszcze z innego punktu widzenia. Moc uzyskiwana przez oscylator jest równa $P = vF$. Zatem (rys. 2)

$$\begin{aligned} P = v_s F &= \left[\frac{F_0}{2m\omega_0} \sin(\omega_0 t) + \frac{F_0}{2m} t \cos(\omega_0 t) \right] F_0 \cos(\omega_0 t) = \\ &= \frac{F_0^2}{2m\omega_0} \sin(\omega_0 t) \cos(\omega_0 t) + \frac{F_0^2}{2m} t \cos^2(\omega_0 t) = \\ &= \frac{F_0^2}{4m\omega_0} \sin(2\omega_0 t) + \frac{F_0^2}{2m} t \cos^2(\omega_0 t). \end{aligned} \quad (10)$$

Pierwszy składnik ostatniego wiersza wyrażenia (10) uśredniony po okresie daje zero, drugi, nieujemny, opisuje przekazywanie energii od źródła siły do oscylatora.

Rozwiązanie ogólne równania (2) jest sumą rozwiązania szczególnego równania niejednorodnego i rozwiązania ogólnego równania jednorodnego, ma więc postać

$$\begin{aligned} x &= \frac{F_0}{2m\omega_0} t \sin(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + C \cos(\omega_0 t) \\ &= \left(\frac{F_0}{2m\omega_0} t + B \right) \sin(\omega_0 t) + C \cos(\omega_0 t). \end{aligned} \quad (11)$$

Odpowiada mu prędkość

$$\begin{aligned} v &= \frac{F_0}{2m\omega_0} \sin(\omega_0 t) + \frac{F_0}{2m} t \cos(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t) - C\omega_0 \sin(\omega_0 t) = \\ &= \left(\frac{F_0}{2m\omega_0} - C\omega_0 \right) \sin(\omega_0 t) + \left(\frac{F_0}{2m} t + B\omega_0 \right) \cos(\omega_0 t) \end{aligned} \quad (12)$$

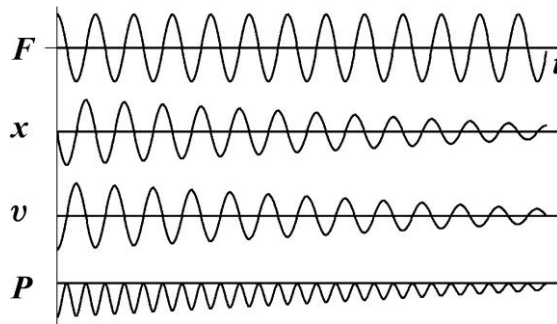
i moc

$$P = \left(\frac{F_0^2}{4m\omega_0} - \frac{C\omega_0 F_0}{2} \right) \sin(2\omega_0 t) + \left(\frac{F_0^2}{2m} t + B\omega_0 F_0 \right) \cos^2(\omega_0 t). \quad (13)$$

Wyraz $C \cos(\omega_0 t)$ we wzorze (11) jest mniej interesujący, bo średnia moc z nim związana jest równa zero. Załóżmy więc na razie $C = 0$. Wtedy

$$x = \left(\frac{F_0}{2m\omega_0} t + B \right) \sin(\omega_0 t). \quad (14)$$

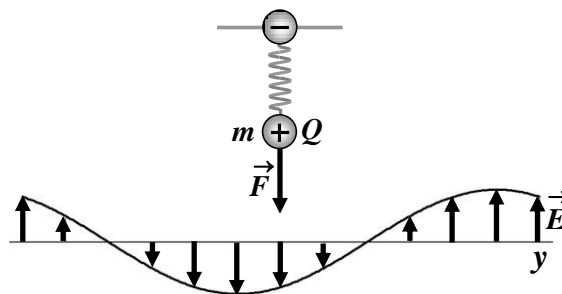
1. Jeżeli $B \geq 0$, amplituda drgań rośnie z czasem. Mamy do czynienia z „absorpcją” energii przez oscylator.
2. Jeżeli $B < 0$, dla niezbyt długich czasów wyrażenie w dużym nawiasie wzoru (14) jest ujemne. Jego wartość bezwzględna, czyli amplituda drgań, z czasem maleje (rys. 3). Energia jest przekazywana od oscylatora do źródła. Widać to też ze wzoru na moc, w którym prawy duży nawias dla małych czasów jest ujemny (rys. 3). Mamy do czynienia z **emisją wymuszoną** energii z oscylatora do źródła siły.



Rys. 3

3. Oddziaływanie oscylatora z falą

Przypuśćmy teraz, że nasz oscylator jest obdarzony ładunkiem Q i znajduje się w polu płaskiej fali elektromagnetycznej o pionowym kierunku pola elektrycznego i o częstotliwości równej ω_0 (rys. 4).



Rys. 4

Pole elektryczne tej fali opisane jest funkcją

$$E(x, t) = E_m \cos(ky - \omega_0 t). \quad (15)$$

Zakładamy, że długość fali $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ jest znacznie większa od rozmiarów oscylatora (co rysunek nie najlepiej oddaje), oraz że oscylator znajduje się w pobliżu punktu $y = 0$.

Pole elektryczne fali (15) w chwili $t = 0$ w punkcie $y = 0$ jest zwrócone do góry. Na masę oscylatora, oprócz siły sprężystości, działa teraz siła elektryczna

$$F = QE_m \cos(\omega_0 t). \quad (16)$$

Jest ona zgodna z wyrażeniem (1), przy czym $F_0 = QE_m$. Zatem ruch oscylatora opisują uzyskane wyżej wyrażenia.

W szczególności możemy mieć do czynienia z dwoma przypadkami:

1. w chwili początkowej masa oscylatora znajduje się w położeniu równowagi. Siła opisana wzorem (16) wywoływać będzie oscylacje o narastającej amplitudzie. Energia będzie przekazywana od fali do oscylatora, zatem będziemy mieli do czynienia z **absorpcją** fali;
2. w chwili początkowej wychylenie oscylatora jest zerowe, ale jego prędkość jest różna od zera i zwrócona w dół. Odpowiada to $B < 0$ i $C = 0$ dla ruchów omówionych w poprzedniej części artykułu. Amplituda drgań oscylatora będzie więc malała. Będziemy mieli do czynienia z przekazywaniem energii od oscylatora do fali, czyli z **emisją wymuszoną**.

4. Układ wielu mikrooscylatorów

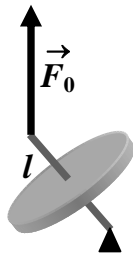
Zastanówmy się teraz, co by było, gdybyśmy mieli do czynienia z układem bardzo wielu małych klasycznych elektrycznych oscylatorów, opisanych powyżej. Wyobraźmy sobie, że oscylatory te wykonują drgania termiczne z przypadkowymi fazami i amplitudami. Gdyby na taki układ padała fala elektromagnetyczna, w niektórych z oscylatorów mielibyśmy do czynienia z absorpcją, a w innych z emisją wymuszoną.

Oznaczałoby to jednak, że ruchy poszczególnych oscylatorów opisane są funkcjami, danymi przez wzór (11). Człon narastający w czasie – czyli pierwszy wyraz w górnym wierszu wzoru – byłby jednakowy dla wszystkich oscylatorów. Człony pozostałe odpowiadałyby przypadkowym doborom stałych B i C . Po uśrednieniu po wszystkich oscylatorach istotne byłyby tylko człony narastające. Absorpcja przeważałaby nad emisją wymuszoną. Emisja wymuszona mogłaby przeważać tylko wtedy, gdyby fazy początkowe wszystkich oscylatorów były odpowiednio dobrane do fazy fali – ale nie widać, jak taką sytuację można by technicznie zrealizować.

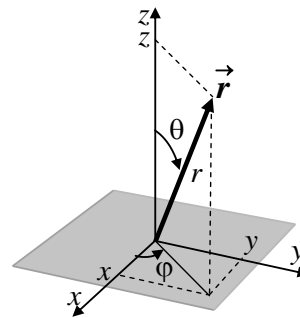
5. Precesja klasycznego bąka

Rozważmy więc teraz inny model klasyczny: wirujący bąk symetryczny o stałej wartości momentu pędu \vec{L} (rys. 5), którego jeden koniec ma ustalone położenie². Przypuśćmy najpierw, że na drugi koniec bąka działa stała siła pionowa i zwrócona w górę \vec{F}_0 , z którą związany jest poziomy moment siły

$$\vec{M}_0 = \vec{l} \times \vec{F}_0. \quad (17)$$



Rys. 5



Rys. 6

Przyjmijmy, że \vec{L} jest równoległe do \vec{l} . Wtedy można napisać

$$\vec{M}_0 = \frac{l}{L} \vec{L} \times \vec{F}_0. \quad (18)$$

Bąk taki będzie wykonywał precesję. W rozumowaniach wygodnie posłużyć się biegunowym układem współrzędnych, przedstawionym na rys. 6.

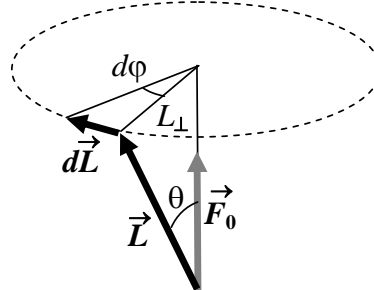
Równanie ruchu można napisać w postaci

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_0 = \frac{l}{L} \vec{L} \times \vec{F}_0. \quad (19)$$

Z wzoru (19) wynika, że przyrosty $d\vec{L}$ są zawsze prostopadłe i do \vec{F}_0 i do \vec{L} (rys. 7). Składowa pionowa wektora \vec{L} jest więc stała, nie zmienia się kąt θ . Wierzchołek wektora \vec{L} zakreśla w przestrzeni okrąg w płaszczyźnie prostopadłej do \vec{F}_0 ze zwrotem zaznaczonym strzałką. Zmiana wartości kąta ϕ , czyli $d\phi$, jest równa

$$d\phi = \frac{dL}{L_{\perp}}. \quad (20)$$

² Jak dyskutowane niżej zachowania bąka można zademonstrować za pomocą żyroskopu z koła rowerowego opisuje *Wstęp do fizyki 1* Andrzeja Wróblewskiego i Janusza Zakrzewskiego.



Rys. 7

Z wzoru (19)

$$dL = dt \frac{l}{L} L F_0 \sin \theta ; \quad (21)$$

ponadto

$$L_{\perp} = L \sin \theta . \quad (22)$$

Podstawiając (21) i (22) do (20), dostajemy

$$d\varphi = dt \frac{\frac{l}{L} L F_0 \sin \theta}{L \sin \theta} = dt \frac{l}{L} F_0 , \quad (23)$$

a więc częstość kołowa precesji Ω_0 jest równa

$$\Omega_0 = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{l}{L} F_0 \quad (24)$$

i nie zależy od kąta θ . Oznacza to, że częstość precesji bąka nie zależy od tego, jaki kąt tworzy moment pędu \vec{L} ze stałą siłą \vec{F}_0 .

Nie wykonują precesji takie bąki, dla których:

1. \vec{L} jest równoległe do \vec{F}_0 . Jest to stan równowagi trwałej.
2. \vec{L} jest antyrównoległe do \vec{F}_0 . Jest to stan równowagi nietrwałej.

6. Klasyczny bąk z momentem wymuszającym

Zastanówmy się teraz, co by było, gdyby na nasz bąk działa dodatkowa siła \vec{F}_1 , która miałaby stałą wartość, ale obracałaby się w tę samą stronę, w którą zachodzi precesja. Pojawienie się siły \vec{F}_1 powoduje powstanie dodatkowego momentu siły, działającego na bąk, określonego wzorem

$$\vec{M}_1 = \vec{l} \times \vec{F}_1 . \quad (25)$$

Nowe równanie ruchu będzie zatem miało postać

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{l} \times \vec{F}_0 + \vec{l} \times \vec{F}_1, \quad (26)$$

czyli

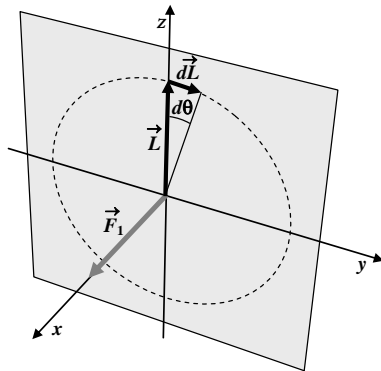
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{l}{L}(\vec{L} \times \vec{F}_0) + \frac{l}{L}(\vec{L} \times \vec{F}_1). \quad (27)$$

Rozpatrzmy tylko dwa najprostsze przypadki:

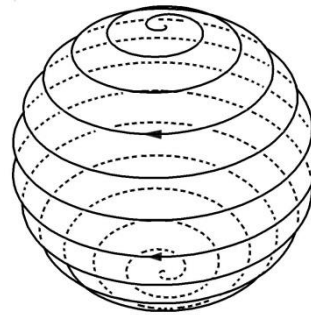
1. kiedy w chwili początkowej moment \vec{L} jest równoległy do \vec{F}_0 ;
2. kiedy w chwili początkowej moment \vec{L} jest antyrównoległy do \vec{F}_0 .

Przypadek 1

W chwili początkowej wektor \vec{L} jest równoległy do \vec{F}_0 i oba mają kierunek osi z , a więc pierwszy człon prawej strony równania (27) znika (rys. 8). W tej samej chwili siła \vec{F}_1 ma kierunek osi x . Z drugiego członu wynika, że w krótkim czasie dt nastąpi zmiana wektora \vec{L} o $d\vec{L}$ prostopadłe i do \vec{L} i do \vec{F}_1 , czyli i do osi x i do osi z , a więc mające kierunek osi y .



Rys. 8



Rys. 9

Oznacza to, że

1. kąt θ wektora \vec{L} zmieni się od zera o $d\theta$ równe

$$d\theta = \frac{dL}{L} = \frac{dt \frac{l}{L} L F_1}{L} = dt \frac{l}{L} F_1; \quad (28)$$

2. wektor \vec{L} przestanie być równoległy do wektora \vec{F}_0 , zacznie więc uczestniczyć w ruchu precesyjnym wokół osi pionowej.

W rezultacie oddziaływania z obu siłami:

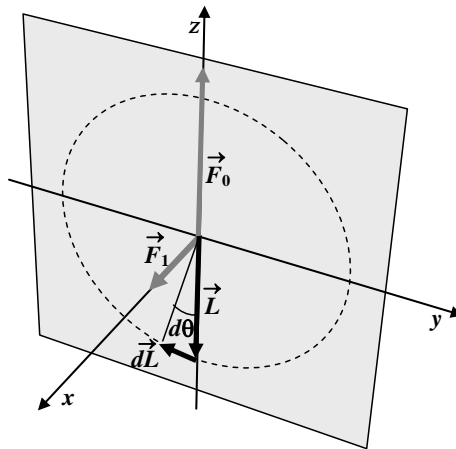
1. wektor \vec{L} będzie znajdował się stale w płaszczyźnie przechodzącej przez oś pionową i obracającą się wokół tej osi z prędkością precesji Ω_0 ;
2. obracająca się siła \vec{F}_1 będzie stale do tej płaszczyzny prostopadła i będzie wywoływać zmiany θ ze stałą prędkością kątową

$$\Omega_1 = \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{L} F_1; \quad (29)$$

3. koniec wektora \vec{L} będzie zakreślał na powierzchni kulistej o promieniu L specyficzną przestrzenną spiralę (rys. 9);
4. kąt θ pomiędzy momentem \vec{L} a stałą siłą \vec{F}_0 będzie wzrastał od 0 do π , a więc energia potencjalna momentu bąka będzie rosła. Mamy więc do czynienia z przekazywaniem energii od źródła siły \vec{F}_1 do bąka, czyli z **absorpcją**.

Przypadek 2

W chwili początkowej wektor \vec{L} jest antyrównoległy do \vec{F}_0 (rys. 10).



Rys. 10

Oba mają kierunek osi z , ale pierwszy ma zwrot ujemny, a drugi dodatni. Pierwszy człon prawej strony równania (27) znika. W tej samej chwili siła \vec{F}_1 ma kierunek osi x . Z drugiego członu wynika, że w krótkim czasie dt nastąpi zmiana wektora \vec{L} o $d\vec{L}$ prostopadłe i do \vec{L} , i do \vec{F}_1 , czyli i do osi x , i do osi z , a więc mające kierunek osi y , ale zwrot przeciwny. Oznacza to, że:

1. kąt θ wektora \vec{L} zmieni się o $d\theta$ o wartości równej

$$d\theta = dt \frac{L}{L} F_1; \quad (30)$$

2. wektor \vec{L} przestanie być równoległy do wektora \vec{F}_1 , zacznie więc uczestniczyć w ruchu precesyjnym wokół osi pionowej.

W rezultacie oddziaływania na skutek działania obu sił:

- wektor \vec{L} będzie znajdował się stale w płaszczyźnie przechodzącej przez oś pionową i obracającą się wokół tej osi z prędkością precesji Ω_0 ;
- obracające się pole \vec{F}_1 będzie stale do tej płaszczyzny prostopadłe i będzie wywoływać zmiany θ ze stałą prędkością kątową

$$\Omega_1 = \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{L} F_1; \quad (31)$$

- koniec wektora \vec{L} będzie zakreślał na powierzchni kulistej o promieniu L specyficzną przestrzenną spiralę, podobną do przedstawionej na rys. 9.
- teraz jednak kąt θ pomiędzy momentem \vec{L} a siłą \vec{F}_0 będzie **malał** od π do 0, a więc energia potencjalna bąka będzie malała. Mamy więc do czynienia z przekazywaniem energii od bąka do źródła siły \vec{F}_1 , czyli z **emisją wymuszoną**;
- w omawianym przypadku nie musimy specjalnie dobierać fazy ruchu, jak to miało miejsce dla oscylatora. Siła \vec{F}_1 sama narzuci odpowiednią fazę zmianom wektora \vec{L} .

Jeżeli ktoś ma wątpliwości co do słuszności powyższych „dowodów przez machanie rękami”, może rozpisać równanie (27) na współrzędnych, przyjmując wyrażenie na siłę \vec{F}_1

$$\vec{F}_1 = [F_1 \cos(\Omega_0 t), -F_1 \sin(\Omega_0 t), 0]. \quad (32)$$

Równanie to ściśle spełniają funkcje

$$\begin{aligned} L_x &= L \sin(\Omega_1 t) \sin(\Omega_0 t); \\ L_y &= L \sin(\Omega_1 t) \cos(\Omega_0 t); \\ L_z &= L \cos(\Omega_1 t). \end{aligned} \quad (33)$$

Wzory (33) oznaczają, że

- w chwili początkowej $t = 0$ zachodzi $L_x = L_y = 0$ i $L_z = L$;

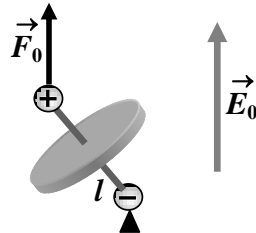
2. moment pędu \vec{L} odwraca się o 180° , czyli o π , po czasie t_1 , spełniającym związek $\Omega_1 t_1 = \pi$, czyli $t_1 = \frac{\pi}{\Omega_1}$. Od $t = 0$ do $t = t_1$ energia potencjalna bąka wzrasta;
3. moment pędu \vec{L} odwraca się o 360° , czyli o 2π , po czasie $2t_1$. Od $t = t_1$ do $t = 2t_1$ energia potencjalna bąka maleje.

Sprawdzenie, że funkcje (33) spełniają równanie (27) jest proste, ale żmudne, więc go tu nie przytaczamy.

7. Elektryczny bąk w stałym polu elektrycznym

Rozważmy teraz następny model klasyczny: wirujący bąk o momencie pędu \vec{L} , z którego osią związany jest dipol elektryczny o momencie \vec{p}_e . Dla uproszczenia rozumowań przyjmijmy, że ładunek ujemny dipola jest nieruchomy, a porusza się tylko jego ładunek dodatni.

Przypuśćmy, że rozważany bąk znalazł się w jednorodnym pionowym polu elektrycznym o natężeniu \vec{E}_0 (rys. 11). Będzie on wykonywał precesję – podobnie jak w przykładzie omówionym w części 5.



Rys. 11

Siła \vec{F}_0 działająca na ładunek dodatni będzie zwrócona pionowo w górę i równa iloczynowi ładunku Q i natężenia pola elektrycznego \vec{E}_0

$$\vec{F}_0 = Q\vec{E}_0. \quad (34)$$

Na dipol będzie działał wtedy moment siły

$$\vec{M}_0 = \vec{p}_e \times \vec{E}_0. \quad (35)$$

Równanie ruchu można napisać w postaci

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_0 = \vec{p}_e \times \vec{E}_0 = \frac{p_e}{L} (\vec{L} \times \vec{E}_0). \quad (36)$$

Wierzchołek wektora \vec{L} zakreślać więc będzie w przestrzeni okrąg w płaszczyźnie prostopadłej do \vec{E}_0 .

Zmieniając odpowiednio oznaczenia we wzorze (24) wykażemy, że częstość kołowa precesji jest równa

$$\Omega_0 = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{p_e}{L} E_0 \quad (37)$$

i nie zależy od kąta θ .

Zauważmy ponadto: pole elektryczne \vec{E}_0 ma kierunek pionowy. Przesunięcia $d\vec{l}$ ładunku dodatniego dipola są poziome. A więc wykonywane prace elementarne $dW = \vec{E}_0 d\vec{l} = 0$.

Oczywiście nie wykonują precesji takie bąki, dla których:

1. \vec{p}_e jest równoległe do \vec{E}_0 . Jest to stan równowagi trwałej o energii potencjalnej równej $E_p = -p_e E_0$. Jest to klasyczny analog układu kwantowego w stanie podstawowym.
2. \vec{p}_e jest antyrównoległe do \vec{E}_0 . Jest to stan równowagi nietrwałej o energii potencjalnej równej $E_p = +p_e E_0$. Jest to klasyczny analog układu kwantowego w stanie wzbudzonym.

8. Oddziaływanie bąka z falą elektromagnetyczną

Zajmiemy się teraz ruchem naszego bąka pod wpływem zmiennego pola elektrycznego \vec{E}_1 , prostopadłego do pola \vec{E}_0 , a które obraca się z częstością kołową precesji Ω_0 . Źródłem takiego pola może być fala elektromagnetyczna. Przyjmujemy, że na układ pada pionowo w górę fala o polaryzacji kołowej prawej i częstości kołowej równej Ω_0 (rys. 12), opisana wzorami³

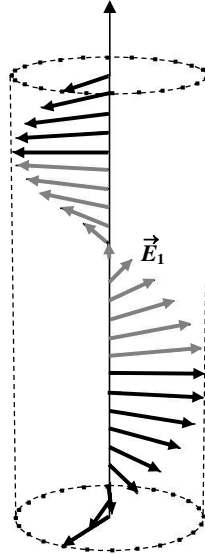
$$E_{1x} = E_m \cos(kz - \Omega_0 t), \quad (38)$$

$$E_{1y} = -E_m \sin(kz - \Omega_0 t). \quad (39)$$

Pole elektryczne tej fali \vec{E}_1 w miejscu, gdzie znajduje się dipol, obraca się z prędkością kołową Ω_0 w tę samą stronę, w którą obracał się koniec wierzchołka wektora \vec{L} , wykonujący precesję, omówioną w części 5.

Zakładamy – jak dla oscylatora – że długość fali $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ jest znacznie większa od rozmiarów naszego bąka, oraz że bąk znajduje się w pobliżu płaszczyzny $z = 0$.

³ Animacja przedstawiająca taką falę znajduje się w Internecie: *ginter polaryzacja youtube*.



Rys. 12

Istnienie pola \vec{E}_1 powoduje powstanie dodatkowego momentu siły, działającego na błąk, o postaci

$$\vec{M}_1 = \vec{p}_e \times \vec{E}_1. \quad (40)$$

Zatem nowe równanie ruchu będzie miało postać (por. wzory (26) i (27))

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{p}_e \times \vec{E}_0 + \vec{p}_e \times \vec{E}_1, \quad (41)$$

czyli

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{p_e}{L} (\vec{L} \times \vec{E}_0) + \frac{p_e}{L} (\vec{L} \times \vec{E}_1). \quad (42)$$

Rozpatrzmy tylko dwa najprostsze przypadki, analogiczne do omówionych w części 6:

1. kiedy w chwili początkowej moment \vec{p}_e jest równoległy do \vec{E}_0 ;
2. kiedy w chwili początkowej moment \vec{p}_e jest antyrównoległy do \vec{E}_0 .

Przypadek 1

W chwili początkowej wektor \vec{L} jest równoległy do \vec{E}_0 i oba mają kierunek osi z , a więc pierwszy człon prawej strony równania znika.

1. Wektor \vec{L} będzie znajdował się stale w płaszczyźnie przechodzącej przez osi pionową i obracającej się wokół tej osi z prędkością precesji Ω_0 .

2. Obracające się pole \vec{E}_1 będzie stale do tej płaszczyzny prostopadłe i będzie wywoływać zmiany θ ze stałą prędkością kołową.
3.

$$\Omega_1 = \frac{d\theta}{dt} = \frac{p_e}{L} E_1 \quad (43)$$
4. Koniec wektora \vec{L} będzie zakreślał na powierzchni kulistej o promieniu L specyficzną przestrzenną spiralę (jak na rys. 9).
5. Kąt θ pomiędzy momentem dipolowym \vec{p}_e a polem \vec{E}_0 będzie wzrastał od 0 do π , a więc energia potencjalna momentu dipolowego w tym polu będzie rosła od $E_p = -p_e E_0$ do $E_p = +p_e E_0$. Mamy więc do czynienia z przekazywaniem energii od fali elektromagnetycznej do dipola, czyli z **absorpcją**.

Przypadek 2

W chwili początkowej wektor \vec{L} jest równoległy do \vec{E}_0 . Oba mają kierunek osi z , ale pierwszy ma zwrot ujemny, a drugi dodatni. W rezultacie oddziaływania z obu polami elektrycznymi:

1. wektor \vec{L} będzie znajdował się stale w płaszczyźnie przechodzącej przez os pionową i obracającą się wokół tej osi z prędkością precesji Ω_0 ;
2. obracające się pole \vec{E}_1 będzie stale do tej płaszczyzny prostopadłe i będzie wywoływać zmiany θ ze stałą prędkością kołową Ω_1 ;
3. koniec wektora \vec{L} będzie zakreślał na powierzchni kulistej o promieniu L specyficzną przestrzenną spiralę.
4. teraz jednak kąt θ pomiędzy momentem dipolowym \vec{p}_e a polem \vec{E}_0 będzie malał od π do 0, a więc energia potencjalna momentu dipolowego w tym polu będzie malała od $E_p = +p_e E_0$ do $E_p = -p_e E_0$. Mamy więc do czynienia z przekazywaniem energii od dipola do fali elektromagnetycznej, czyli z **emisją wymuszoną**.

9. Emisja spontaniczna i do czego można by ją wykorzystać

W naszych dotychczasowych rozważaniach zupełnie pomijaliśmy istotny fakt. Jeżeli dipol elektryczny wykonuje ruch precesyjny w nieobecności fali zewnętrznej, sam wysyła falę elektromagnetyczną. Mamy wtedy do czynienia z **emisją spontaniczną**. Obracający się dipol będzie tracił energię. Kąt pomiędzy kierunkiem dipola a kierunkiem stałego pola elektrycznego \vec{E}_0 będzie malał, aż w końcu dipol ustawi się równoległe do pola.

Rozpatrzmy teraz zespół wielu bąków dipolowych. Pojawia się następująca hipotetyczna możliwość: wytwórzmy jednorodne pionowe pole elektryczne \vec{E}'_0 o zwrocie przeciwnym do omawianego wyżej pola \vec{E}_0 . Jeżeli odczekamy dosta-

tecznie długo, wszystkie dipole ustawią się równoległe do tego nowego pola \vec{E}'_0 . A teraz szybko wyłączmy pole \vec{E}'_0 i włączmy pole \vec{E}_0 . Wtedy wszystkie dipole będą ustawione antyrównoległe do zewnętrznego pola, czyli będą w stanach o wyższej energii potencjalnej $E_p = +p_e E_0$. Jest to klasyczny analog układu kwantowego z odwróconą populacją.

Jeżeli na taki układ padłaby fala spolaryzowana kołowo, omówiona w poprzedniej części, we wszystkich rozważanych centrach wywołałaby emisję wymuszoną. Energia zostałaby przekazana od bąków do fali, nastąpiłoby więc wzmocnienie fali. Mielibyśmy do czynienia z ośrodkiem o **ujemnym współczynniku absorpcji**. Ten fakt stanowi podstawę działania maserów i laserów.

10. Spin

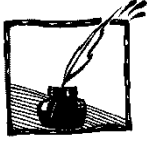
W przyrodzie nie ma obiektów, które miałyby charakter bąka obdarzonego dipolowym momentem elektrycznym. Wiele cząstek jest jednak obdarzonych jednocześnie spinowym momentem pędu i spinowym **momentem magnetycznym**. Należą do nich i elektron, i proton. Omówiony wyżej fikcyjny model w pewnym stopniu można zastosować do elektronu, związanego w atomie wodoru.

1. Spinowe momenty magnetyczne elektronu \vec{p}_m ustawiają się w zewnętrznym jednorodnym polu **magnetycznym** \vec{B}_0 . Mogą przyjmować dwa stany: o energii mniejszej $E_p = -p_m B_0$ i energii większej $E_p = +p_m B_0$.
2. Spinowe momenty magnetyczne mogą oddziaływać z falą elektromagnetyczną, z jej polem magnetycznym \vec{B}_1 – a nie z polem elektrycznym. Oddziaływanie to może przesuwać elektrony z poziomu niższego na wyższy, czyli wywoływać absorpcję fali. Może też przesuwać elektrony ze stanu wyższego na niższy – i wywoływać emisję wymuszoną.

W rzeczywistości jednak nawet w atomie wodoru sytuacja jest bardziej złożona. Spin ma nie tylko elektron, ale i proton, który jest jądrem atomu wodoru. Ich wzajemne oddziaływanie powoduje, że układ poziomów energetycznych jest bardziej skomplikowany.

11. Konkluzja

Na zakończenie trzeba stwierdzić wyraźnie: mikroświat musi być opisywany przez mechanikę kwantową, a nie mechanikę klasyczną. Najbardziej wymyślne modele klasyczne mogą więc co najwyżej ilustrować tylko pewne wybrane aspekty rzeczywistości.

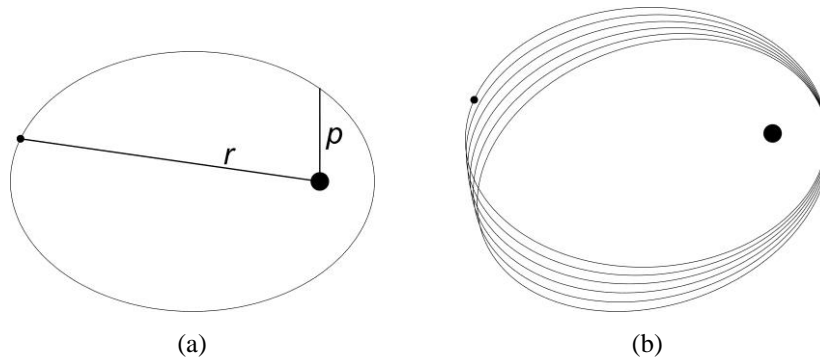


Zamknięte orbity wokół czarnych dziur

Dominika Hunik

*Studentka V roku astronomii
Obserwatorium Astronomiczne UJ*

Często przeciwstawia się sobie wydłużone orbity newtonowskie, które są zawsze zamknięte* i analogiczne orbity znane z Ogólnej Teorii Względności, które nie są zamknięte. Otóż mało znanym faktem jest istnienie klasy orbit zamkniętych wokół czarnych dziur. Mają one postać „rozetek” przypominających epicykloidy.



Rys. 1. Przykłady orbity newtonowskiej (a) oraz odpowiednika w Ogólnej Teorii Względności z precesją (b)

Ogólna Teoria Względności wprowadza istotne zmiany zarówno w opisie ruchu cząstek posiadających masę, jak i fotonów. W rezultacie powstają takie zjawiska jak zmiana pozycji na niebie gwiazd położonych blisko Słońca, soczewkowanie grawitacyjne lub zmiany kształtu orbit. Ten ostatni efekt sprawia, że trajektorie obiektów różnią się od opisanych przez newtonowską grawitację, a przy odpowiednich warunkach mogą tworzyć zamknięte pętle.

Zacznijmy od ogólnego opisu zmiany kształtu orbit. Najsłynniejszym przypadkiem obserwacji rozbieżności jest ruch Merkurego dookoła Słońca. Ze względu na bliskość macierzystej gwiazdy zaobserwowanie efektów relatywistycznych jest łatwiejsze dla tej planety niż dla innych. Zgodnie z prawami Keplera, Merkury powinien poruszać się po orbicie eliptycznej. Jeśli odległość od Słońca jest minimalna, znajduje się on w peryhelium, jeśli maksymalna – w aphelium. Ruch najwygodniej jest opisać w układzie biegunowym, gdzie

* W przypadku orbit związanych, np. planet, planetoid itp. Nie dotyczy to niektórych komet, tzw. jednopojawieniowych.

współzrzednymi są: odległość r planety (w przybliżeniu punkt) od środka układu oraz odległość kątowa od ustalonego kierunku odniesienia ϕ . Trajektoria obiektu jest opisana wzorem

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \phi}, \quad (1)$$

gdzie p i e (mimośród) są stałymi. W rzeczywistości obserwuje się precesję perihelium. Oznacza to, że punkt ten przesuwa się po orbicie, a planeta osiąga minimum odległości w innych miejscach w dwóch kolejnych obiegach. Zjawisko zostało zilustrowane na rys. 2. Początkowo próbowano wytłumaczyć rozbieżności na gruncie mechaniki Newtona wpływem innych planet, jednak nie przyniosło to pożądanego rezultatu. Zaproponowano nawet, że wewnątrz orbity Merkurego mogłaby krążyć jeszcze jedna planeta, ale nie udało się jej odnaleźć. Wyjaśnienie nadeszło dopiero wraz z pojawieniem się Ogólnej Teorii Względności.

Według Ogólnej Teorii Względności czas i przestrzeń opisywane są razem jako czasoprzestrzeń, która ulega zakrzywieniu pod wpływem masy i energii. Trajektorie obiektów różnią się od opisywanych przez klasyczną grawitację. Wtedy rozwiązanie równań ruchu przyjmuje odmienną postać

$$\phi = \frac{2}{(1 - 6\mu + 2\mu e)^{\frac{1}{2}}} F\left(\frac{\chi}{2}, k\right), \quad \mu = \frac{GM}{c^2 p} = \frac{1}{2} \frac{R_g}{p} \quad (2)$$

gdzie ϕ jest współzrzedną kątową planety, χ funkcją odległości r

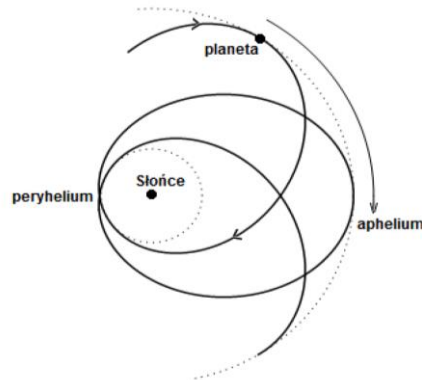
$$r = \frac{p}{1 + e \cos \chi},$$

natomiast k i μ zależą od krętu, czyli momentu pędu i energii ciała. R_g to „promień” horyzontu czarnej dziury, proporcjonalny do jej masy M . Dokładna formuła, pozwalająca obliczyć k , ma postać

$$k^2 = \frac{4\mu e}{1 - 6\mu + 2\mu e}. \quad (3)$$

Stałe p i e określają kształt orbity. Pierwsza z nich odpowiada za to, jak duży jest efekt precesji, druga – za eliptyczność orbity.

Funkcja F we wzorze (2) jest całką eliptyczną, której wartość można obliczyć na przykład za pomocą programu *Mathematica* jako *EllipticF*. Jeżeli $p \gg R_g$, czyli orbita nie zbliża się do czarnej dziury, to $\phi = \chi$ i otrzymujemy newtonowski wzór (1).



Rys. 2. Precesja orbity dookoła Słońca. Linia ciągła przedstawia trajektorię planety, natomiast linie przerywane wyznaczają granice ruchu. Położenia peryhelium i aphelium zmieniają się w kolejnych obiegach wokół ciała centralnego

W ogólnym przypadku otrzymane w ten sposób trajektorie nie są krzywymi zamkniętymi, jednak można znaleźć warunki, dla których przybierają taką postać. Jeśli przyjrzymy się dokładnej postaci funkcji χ , to okaże się, że kolejne peryhelia są osiągane wtedy, gdy χ zmienia się o 2π . Stąd można wywnioskować, że aby ciało zakresliło krzywą zamkniętą, całkowita wielokrotność ϕ musi być równa całkowitej wielokrotności 2π . Parametry, dla których orbita jest zamknięta, możemy więc znaleźć, wybierając takie wartości, aby zachodziła zależność

$$\frac{n}{m} \pi = \frac{2}{(1 - 6\mu + 2\mu e)^{\frac{1}{2}}} K(k), \quad (6)$$

gdzie K jest zupełną całką eliptyczną pierwszego rodzaju.

Przykładowe rezultaty zostały zilustrowane na rys. 3. Aby samodzielnie otrzymać analogiczne krzywe w programie *Mathematica* można posłużyć się poniższymi formułami.

Najpierw obliczamy numerycznie p :

(* Początek *)

$R = 1$ (* Jako jednostkę długości bierzemy promień czarnej dziury *)

$e = 0.7$ (* mimośród orbity $0 < e < 1$ *)

$k = 2 R e / \sqrt{1 - 3 R / p + R / p * e}$

$n = 4; m = 3$; (* Parametry orbity zamkniętej, liczby naturalne, $n > m$ *)

(* Linijka poniżej to numeryczne obliczenie parametru p , dla którego orbita się zamyka. Jeżeli zamiast tego podamy inną wartość, lub n, m będzie niewymierne/przestępne, np.:

$n=\pi$ lub $n=\sqrt{2}$, to orbita się nie zamknie. Dla p/R rzędu kilkudziesięciu otrzymamy powolną precesję orbity eliptycznej, dla p/R około 10 skomplikowane krzywe. *)

```
p = p /. FindRoot[
  n/m Pi == 2/Sqrt[1 - 3 R/p + R/p*e] EllipticK[k^2], {p, 2 R}] // Chop
```

```
f = 2/Sqrt[1 - 3 R/p + R/p*e] EllipticF[X/2, k^2]
```

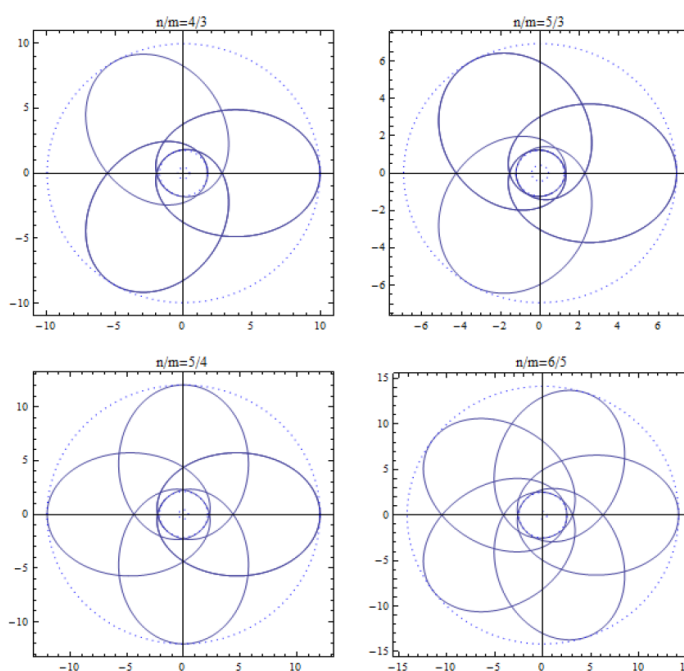
```
r = p/(1 + e Cos[X])
```

```
ParametricPlot[
```

```
{r Cos[f], r Sin[f]},
```

```
{X, 0, 2 Pi m n}]
```

(* Koniec *)



Rys. 3. Orbity zamknięte otrzymane dla $M = \frac{3}{14}$, $e = 0,7$ dla wybranych stosunków $\frac{n}{m}$

Jak widać na rysunkach, po uwzględnieniu dokładnych obliczeń, wynikających z Ogólnej Teorii Względności, perihelium planety może ulegać takiemu przesunięciu, że trajektoria utworzy orbitę zamkniętą. Jednak przypadki, które zostały zilustrowane, wynikają jedynie z obliczeń, a w praktyce nie są obserwowane. Dokładne trajektorie w otoczeniu czarnej dziury Kerra znalazły ostatnio zastosowanie w dosyć nieoczekiwanym miejscu. Mowa o Hollywood, a konkretnie wizualizacji w filmie *Interstellar*.



Fizyczka z Nysy – Hertha Sponer (1895–1968)

Witold Tomaszewski

Nauczyciel fizyki i matematyki z Nysy

Dzisiaj nikogo nie dziwi obecność dziewcząt na studiach fizyki, ani fizyczek w laboratoriach. Obecnie kobiety są profesorami, piastują kierownicze stanowiska, ale jeszcze przed drugą wojną światową należało to do rzadkości.

Tymczasem jedną z trzech kobiet, które już w przedwojennych Niemczech uzyskały prawo do nauczania fizyki na wyższych uczelniach, była, urodzona w Nysie, Hertha Sponer. Dwie pozostałe to Austriaczka Lise Meitner, znana z odkrycia rozszczepiania jąder oraz Hedwig Kohn. Hertha Sponer była też pierwszą kobietą zatrudnioną na Wydziale Fizyki na Uniwersytecie Duke'a w Stanach Zjednoczonych. Zanim do tego doszło musiała pokonać wiele trudności. Losy Herthy Sponer opisała niemiecka fizyczka Mary Ann Maushart.



Nysa na przedwojennej widokówce

Matura

Hertha Sponer przyszła na świat 1 września 1895 roku jako najstarsze dziecko w rodzinie protestanckiego kupca Roberta Sponera. W Nysie spędziła wczesne dzieciństwo. Tutaj też rozpoczęła naukę szkolną. Gdy miała 11 lat wraz z rodziną przeprowadziła się do Zittau w Saksonii.

Pomimo tego, że urodziła się w zamożnej, protestanckiej rodzinie, jej droga na uniwersytet nie była jednak łatwa. W owych czasach w Niemczech nie było szkół dla dziew-



Hertha Sponer jako młoda dziewczyna

czą, przygotowujących je do studiów wyższych. Wspomniana Lise Meitner po ukończeniu w Wiedniu żeńskiej szkoły musiała brać korepetycje, aby się przygotować do matury w męskim gimnazjum. Wybitna matematyczka Emmy Noether (patrz *Neutrino* 27) w swojej żeńskiej szkole uczyła się krawiectwa, a nie fizyki. Hertha Sponer dopiero po skończeniu odpowiednich kursów przygotowawczych w wieku 22 lat zdała egzaminy maturalne i uzyskała prawo do podjęcia nauki na uniwersytecie. Egzaminy maturalne zdała eksternistycznie w nyskim gimnazjum. Otrzymała bardzo dobre oceny, w tym najwyższą notę z egzaminu pisemnego z fizyki. W 1917 roku Hertha Sponer była jedną z zaledwie 570 kobiet, które na terenie ówczesnego państwa pruskiego zdały egzamin maturalny. Szkoła z Wrocławia, w której Hertha Sponer przygotowywała się do egzaminów, dumna z osiągnięć swojej słuchaczki, zamieściła informację o tym w gazecie. Uszczęśliwieni rodzice udzielili córce pełnego poparcia w jej zamiarze studiowania fizyki. Wcześniej spodziewali się, że będzie ona co najwyżej nauczycielką w szkole dla dziewcząt.

Studia

W tym samym, 1917 roku, Hertha Sponer rozpoczęła studia na uniwersytecie w Tybindze. Wybór, którego dokonała nie był przypadkowy. Uniwersytet w Tybindze był jednym z pierwszych uniwersytetów w Cesarstwie Niemieckim, który przyznał prawo studiowania kobietom. Dodatkowym elementem, który sprzyjał podjęciu tam nauki był fakt, że w mieście nie brakowało żywności, a były to czasy trwania pierwszej wojny światowej. Program studiów nie spełniał jednak oczekiwań młodej i ambitnej studentki. Naturalną więc rzeczą było przeniesienie się na jeden z najlepszych w tym czasie uniwersytetów w Europie – do Getyngi. Tym razem się nie zawiodła, szczególnie jeżeli chodzi o przedmioty z fizyki teoretycznej.

O wyjątkowości Herthy Sponer, jako studentki i przyszłej znakomitej fizyczki, najlepiej świadczy fakt, że już po trzech latach studiów obroniła pracę doktorską z fizyki teoretycznej. Olbrzymią zasługę miał w tym jej promotor, Holender z pochodzenia Peter Debye (Nagroda Nobla z chemii w 1936 r.), który nie tylko kierował jej studiami, ale także wspierał w początkach pracy naukowej. I co najważniejsze, liczyły się dla niego tylko jej kompetencje i determinacja w dążeniu do celów, a nie płeć. Nie była to jednak postawa powszechna. Świadczy o tym opinia innego wielkiego fizyka owych czasów Maxa Plancka (Nagroda Nobla z fizyki w 1918 r.), który ponoć uważał, że kobiety najlepiej sprawdzają się jako gospodynie domowe, a w nauce to może w niektórych specjalnościach lekarskich.

Rok w Berlinie

Początek XX wieku obfitował w znaczące odkrycia w fizyce. Wystarczy wspomnieć o sformułowanych przez Alberta Einsteina Szczególnej i Ogólnej

Teorii Względności, czy też teorii atomu Nielsa Bohra. W gorączce tych wydarzeń znalazła się Hertha Sponer, która przez rok po obronie doktoratu pracowała w instytucie fizyki w Berlinie. Był to ważny okres zarówno w jej karierze naukowej, jak i w życiu prywatnym. Po latach napisała, że wspomnienie tego okresu jest dla niej jednym z najpiękniejszych wspomnień z młodości. Cóż więc wydarzyło się wtedy takiego, co tak mocno wpłynęło na późniejsze życie Herthy Sponer? Na pewno bardzo istotny był klimat nowych idei, które pojawiły się w nauce. Idei, które rzucały całkiem nowe światło na budowę atomów i cząsteczek. Hertha zetknęła się osobiście z całą grupą wybitnych naukowców, którzy te problemy badali i rozwijali. W Berlinie napisała i opublikowała swoją pierwszą pracę naukową. Tam też poznała Jamesa Francka (Nagroda Nobla z fizyki w 1925 r.). Początkowo była jego asystentką w pracy naukowej, a później także towarzyszką życia. W Berlinie była świadkiem wydarzeń politycznych, które rozgrywały się po zakończeniu pierwszej wojny światowej. Szczególne wrażenie zrobiły na niej ekscesy rodzącej się ideologii nazistowskiej, której w przyszłości miała paść ofiarą.

Habilitacja

Po powrocie do Getyngi w 1921 roku Hertha Sponer znalazła zatrudnienie na uniwersytecie jako asystentka Jamesa Francka. Był to początek jej wielkiej kariery naukowej. Nabyta w Berlinie biegłość w zakresie technik eksperymentalnych w nowoczesnej wówczas fizyce atomowej, okazała się bardzo przydatna w Getyndze. Celem badań prowadzonych w zespole Jamesa Francka było doświadczenie sprawdzenie prawdziwości teorii Nielsa Bohra. Prace fizyków z Getyngi ją potwierdziły, za co James Franck został uhonorowany (wspólnie z Gustawem Hertzem) Nagrodą Nobla z fizyki.

Na uniwersytecie w Getyndze Hertha Sponer oprócz pracy naukowej prowadziła także zajęcia ze studentami. Zwieńczeniem jej aktywności naukowej i dydaktycznej w tym okresie było uzyskanie habilitacji w 1925 roku, co dawało jej prawo do wygłaszania bezpłatnych wykładów z fizyki (*veniam legendi*). W tym czasie w Niemczech było rzadkością, aby kobiety, szczególnie w naukach przyrodniczych, uzyskiwały takie przywileje. Sytuację dobrze ilustrują liczby. W latach 1919–1933 tylko 54 kobiety otrzymały habilitację, a tylko dwie z nich (Lise Meitner w Berlinie i Hertha Sponer w Getyndze) były członkiniami wydziałów fizyki (późniejszymi profesorkami).

Krótko po tym Sponer otrzymała prestiżowe stypendium z Fundacji Rockefellera, które pozwoliło jej spędzić rok na uniwersytecie w Berkeley. Trzydziestojednoletnia Hertha Sponer miała już znaczącą pozycję w swoim środowisku. O tym jak bardzo była ceniona i lubiana świadczy fakt, że na dworzec kolejowy, w drodze do Stanów Zjednoczonych, towarzyszyła jej grupa około pięćdziesięciu przyjaciół, dla których wynajęto autobus udekorowany amerykańskimi i niemieckimi flagami.

Rok spędzony w Stanach Zjednoczonych pozwolił jej poznać stosowane na amerykańskich uniwersytetach nowoczesne metody doświadczalne w badaniach widm atomów i cząsteczek. Metodom tym pozostała wierna do końca swojej pracy naukowej, upowszechniając je później także w Getyndze. Amerykanów nauczyła natomiast podstaw tworzonej w Europie mechaniki kwantowej.

Dojście Hitlera do władzy

W Getyndze Hertha Sponer pracowała do 1934 roku. Po dojściu Hitlera do władzy zaczęto usuwać z uniwersytetów naukowców pochodzenia żydowskiego. W wyniku tego James Franck już w listopadzie 1933 roku został zmuszony do wyjazdu do Stanów Zjednoczonych. Także sytuacja kobiet zajmujących się nauką uległa pogorszeniu. Ideologia nazistowska zakładała bowiem, że główną rolą kobiety ma być troska o dom, męża i dzieci. Pozbawiona wsparcia Jamesa Francka oraz zniechęcona pogarszającymi się warunkami pracy na uczelni profesor Hertha Sponer postanowiła wyjechać z Niemiec. Nie było to łatwe i wymagało wielu zabiegów. W pomoc dla niej zaangażowało się liczne grono osób, w tym także fundacja Rockefellera. W dużej mierze dzięki staraniom Jamesa Francka jej emigracja stała się możliwa. Najpierw przez rok pracowała na uniwersytecie w Oslo, a stamtąd, na początku 1936 roku, wyruszyła do Durham w Stanach Zjednoczonych.

Profesura na Uniwersytecie Duke'a

Po ponad dwóch latach starań Hertha Sponer, zmuszona przez okoliczności, znalazła zatrudnienie w USA. Stało się tak pomimo negatywnej opinii, jaką w tej sprawie wyraził Robert Millikan (Nagroda Nobla z fizyki w 1923 r.), który był przeciwny zatrudnianiu kobiet na amerykańskich uniwersytetach. Rada wydziału fizyki z Uniwersytetu Duke'a szczęśliwie nie wzięła jej pod uwagę. I tam, daleko od ojczyzny, życie Herthy Sponer nabrało innego wymiaru. Na amerykańskim uniwersytecie stworzyła laboratorium, w którym prowadziła badania przy użyciu metod spektroskopii optycznej. Wykładała i publikowała w renomowanych czasopismach. Była zapraszana na gościnne wykłady (do Indii, Japonii, Szwecji), a w kraju – na konferencje i spotkania naukowe. Została członkinią towarzystw fizycznych i chemicznych (w tym Amerykańskiego Towarzystwa Fizycznego). Była też w Ameryce prekursorką tak modnych dzisiaj badań interdyscyplinarnych, łączących w jej przypadku, zainteresowania fizyków, chemików i matematyków. Pozostawiła po sobie liczną grupę następców, w tym 23 wypromowanych doktorów.



Hertha Sponer z mężem Jamesem Franckiem
w swoim gabinecie na Uniwersytecie Duke'a



i na spacerze

W 1946 roku Hertha Sponer wyszła za mąż za owdowiałego kilka lat wcześniej Jamesa Francka, z którym spędziła osiemnaście szczęśliwych lat. Wspólnie angażowali się w udzielanie pomocy uchodźcom z hitlerowskich Niemiec. Po jego śmierci w 1966 roku Hertha Sponer przeszła na emeryturę, wróciła do Niemiec i zamieszkała z rodziną siostrzeńca. Zmarła 17 lutego 1968 roku w Ilten, niedaleko Hanoweru.

Hertha Sponer dzisiaj

Publikacje Herthy Sponer są cytowane do dzisiaj w pracach naukowych, a niektóre ze stworzonych przez nią metod (wykres Birge–Sponer) bywają wykorzystywane we współczesnych badaniach akademickich.

Na wydziale fizyki na Uniwersytecie Duke'a pielęgnuje się pamięć pierwszej zatrudnionej tam kobiety. Od 2007 roku wyróżniające się fizyczkami amerykańskimi wygłaszają wykłady noszące jej imię, a na stronie internetowej wydziału można zobaczyć fotografię, na której Hertha Sponer siedzi obok Alberta Einsteina. Tam też dostępna jest angielska wersja książki Mary Ann Maushart.

Niemieckie Towarzystwo Fizyczne od trzynastu lat przyznaje młodym, rozpoczynającym karierę fizykom, nagrodę jej imienia, której celem jest zachęcenie kobiet do studiowania fizyki.

I oto ironia tej historii. Sto lat temu utrudniano kobietom podejmowanie studiów w zakresie nauk przyrodniczych, a dzisiaj się je do tego zachęca, przyznając specjalne nagrody.

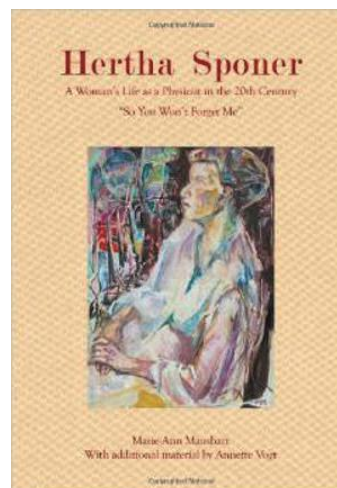


Hertha Spöner pierwsza z lewej, obok Albert Einstein

* * *

Na postać Herthy Spöner zwróciła moją uwagę pani profesor Brenda P. Winnewisser, która jako studentka fizyki zetknęła się z nią osobiście. Pani Brenda P. Winnewisser jest redaktorką amerykańskiego wydania biografii Herthy Spöner (w 2011 roku gościła w Polsce). Składam Pani Profesor gorące podziękowania.

Pisząc ten artykuł korzystałem z książki Mary Ann Maushart – *Hertha Spöner: A Woman's Life as A Physicist in the 20th Century „So You Won't Forget Me”*, Duke University, Durham, North Carolina. Zdjęcia pochodzą z tej książki i zostały zamieszczone za zgodą pani profesor Brendy P. Winnewisser.



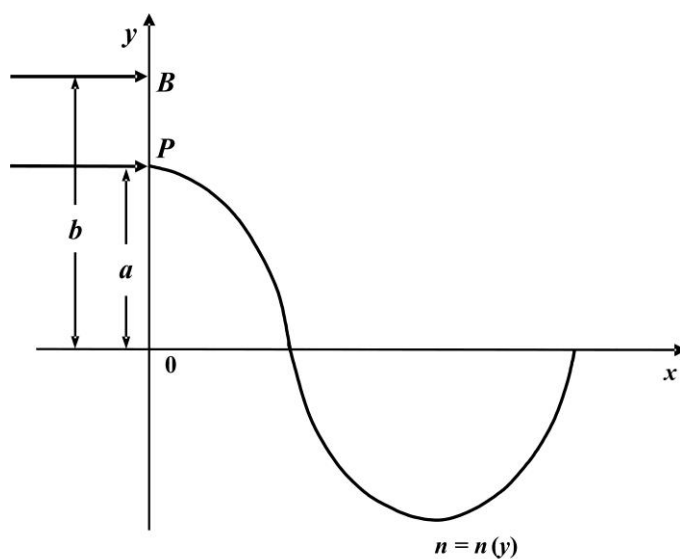


Bieg po sinusoidzie promienia świetlnego – zadanie z XXVII Olimpiady fizycznej 1977/1978

Stopień II, zadanie teoretyczne

Na powierzchnię ośrodka o współczynniku załamania zależnym od y , w punkcie P pada prostopadle do powierzchni promień świetlny.

1. Jaka powinna być postać funkcji $n(y)$, aby wewnątrz ośrodka promień świetlny biegł po sinusoidzie?
2. Czy można tak dobrać postać funkcji $n(y)$, aby dowolne dwa promienie padające prostopadle na rozważany ośrodek (np. w punktach P i B pokazanych na rysunku 1) poruszały się po sinusoidach o tym samym okresie?



Rys. 1

Zadanie zostało udostępnione z bazy zadań Olimpiady Fizycznej w Szczecinie (zadanie wraz z rozwiązaniem zostało opublikowane w czasopiśmie *Fizyka w Szkole* nr 6, 1978 i w zbiorze „Olimpiada Fizyczna XXVII–XXVIII”, WSiP, Warszawa 1983, s. 42–44 przez ówczesnego kierownika naukowego – [Waldemara Gorzkowskiego](#) i kierownika organizacyjnego – Andrzeja Kotlickiego z Komitetu Głównego Olimpiady Fizycznej). Nawiązuje ono do zadania z I stopnia XXVII Olimpiady Fizycznej – *Ruch promienia świetlnego w kuli niejednorodnej optycznie* i wcześniejszego z zawodów finałowych XXIV Olimpiady Fizycznej – *Bieg promienia świetlnego po paraboli* (było opublikowane w *Fotonie* 127, Zima 2014), jak też do zadania na VII Międzynarodowej Olimpiadzie Fizycznej (Warszawa 1974 r.) – *Płytką o zmiennym współczynniku*

załamania. Wymienione zadania znajdują się na stronie w bazie zadań olimpiady fizycznej – www.olimpiada.fizyka.szc.pl, która jest prowadzona przez przewodniczącego Komitetu Okręgowego OF w Szczecinie dra Tadeusza Molendę.

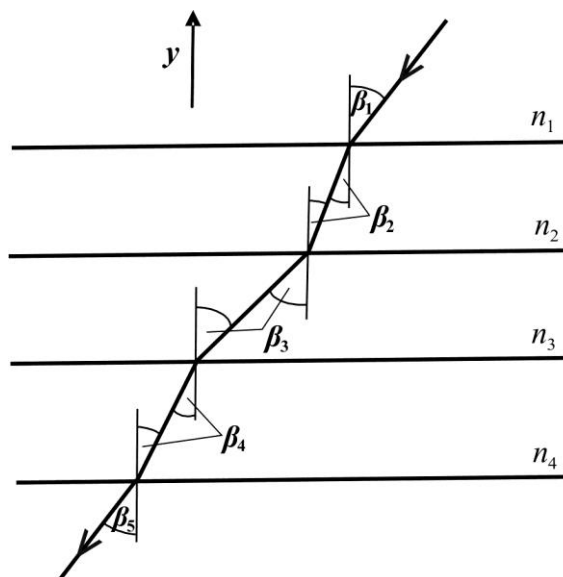
Zadania z olimpiad fizycznych są na ogół oryginalne. Pomysły pochodzą z różnych źródeł, też składanych przez nauczycieli i samych zawodników olimpiady. Propozycje zadań były zmieniane w wyniku dyskusji w Komitecie Głównym OF i często nie przypominają tekstu „pomysłodawcy” (przykład – Tadeusz Molenda, Instytut Fizyki, Uniwersytet Szczeciński).

Realizację doświadczalną biegu promienia świetlnego po sinusoidzie przedstawiono w artykule: T. Molenda, *Miraże a krzywoliniowe rozchodzenie się światła cd.*, *Neutrino* 29.

Rozwiązanie

Rozpatrzmy promień światła przechodzący przez szereg płasko-równoległych płytek o różnych współczynnikach załamania światła – rys. 2. Dla takiego układu płytek z prawa załamania mamy:

$$\frac{\sin \beta_i}{\sin \beta_{i+1}} = \frac{n_{i+1}}{n_i}$$



Rys. 2

Wynika stąd, że

$$n_i \sin \beta_i = \text{const.}$$

Związek ten nie zależy ani od grubości, ani od liczby płytek, wobec tego dla ciągłego rozkładu współczynnika załamania wzdłuż osi y możemy napisać

$$n(y) \sin \beta(y) = n(a) \sin 90^\circ = n(a),$$

stąd

$$\sin \beta(y) = \frac{n(a)}{n(y)}.$$

Równanie sinusoidy przechodzącej przez punkt P i stycznej w punkcie P do promienia padającego

$$y = a \cos kx,$$

gdzie k jest jakąś stałą.

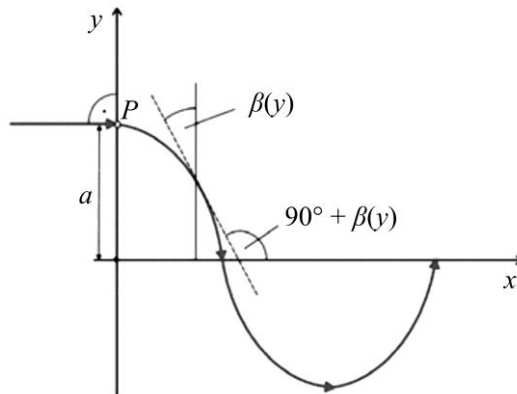
Tangens kąta $90^\circ + \beta(y)$ – nachylenia stycznej (rys. 3), jest pochodną funkcji $y(x) = a \cos kx$

$$\operatorname{tg}(90^\circ + \beta(y)) = -ak \sin kx,$$

$$\operatorname{tg}(90^\circ + \beta(y)) = -\operatorname{ctg} \beta(y),$$

ale

$$\sin kx = \sqrt{1 - \cos^2 kx} = \sqrt{1 - \frac{y^2}{a^2}}.$$



Rys. 3

Biorąc pod uwagę, że $\operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} - 1$ można napisać

$$\frac{1}{\sin^2 \beta(y)} = 1 + k^2 (a^2 - y^2).$$

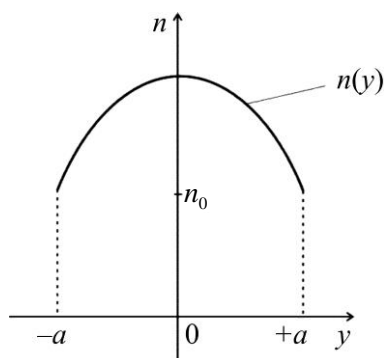
Korzystając z otrzymanego poprzednio wyrażenia na $\sin \beta(y)$ dostajemy

$$\frac{n^2(y)}{n^2(a)} = 1 + k^2 (a^2 - y^2),$$

czyli

$$n(y) = n(a) \sqrt{1 + k^2(a^2 - y^2)}.$$

Otrzymaliśmy zależność współczynnika załamania n od wartości y , co z ilustrowano na rys. 4.



Rys. 4. Wykres funkcji $n(y) = n_0 \sqrt{1 + k^2(a^2 - y^2)}$

Jeżeli promienie padające na ten sam ośrodek w punktach P i B miałyby poruszać się po sinusoidach o tym samym okresie, to musiałyby zachodzić tożsamość

$$n(a) \sqrt{1 + k^2(a^2 - y^2)} = n(b) \sqrt{1 + k^2(b^2 - y^2)}.$$

Tożsamość ta dla $a \neq b$ nie może zachodzić, zatem odpowiedź na pytanie 2 jest negatywna.

Opracował: Tadeusz Molenda.



Dwa medale na ICYS 2015

Emilia Pasamonik

Pracownia Fizyki Pałacu Młodzieży w Katowicach



Młodzi Polacy, uczestnicy Grupy Twórczej Quark, reprezentowali Polskę na Międzynarodowej Konferencji Młodych Naukowców ICYS 2015, która odbyła się w Izmirze w Turcji w dniach od 19 do 25 kwietnia 2015 roku. W konferencji wzięło udział łącznie ponad 200 uczestników, opiekunów i obserwatorów z 21 państw.

W ICYS 2015 wzięli udział młodzi pasjonaci nauki z Holandii, Niemiec, Czech, Białorusi, Ukrainy, Indonezji, Rumunii, Tajlandii, Węgier, Malezji, Gruzji, Serbii, Iranu, Rosji, Turcji, Chorwacji, Macedonii i Polski. Obecni byli obserwatorzy z Finlandii, Kenii i Singapuru.

Wszyscy uczestnicy z Polski są laureatami Ogólnopolskiej Konferencji Młodych Naukowców, organizowanej przez Pracownię Fizyki Pałacu Młodzieży w Katowicach. Stają się również członkami Grupy Twórczej Quark, która co roku reprezentuje Polskę w wielu zawodach w kraju i za granicą.

Srebrny medal w kategorii fizyka zdobył Przemysław Słota (I Liceum Ogólnokształcące w Bytomiu). W tym roku prezentował pracę o detektorze kryształkowym. Detektory tego typu były wykorzystywane we wczesnych odbiornikach radiowych. Ich największą zaletą było to, że nie wymagały zasilania bateryjnego ani sieciowego. W czasach, kiedy były powszechnie używane, zasada ich działania nie była znana, ale przyczyniły się do rozwoju elektroniki, w szczególności elektroniki półprzewodników. Projekt ucznia polegał

na zbadaniu właściwości charakterystycznych dla tego typu kryształów i określeniu, które z nich miały największy wpływ na wykorzystanie w radiofonii.

Medal specjalny w kategorii ekologia zdobyła Jadwiga Marchewka (I Liceum Ogólnokształcące w Chrzanowie) za pracę o wykorzystaniu węgla w medycynie. Uczennica skoncentrowała się na innowacyjnym wykorzystaniu węgla aktywnego, który zaskoczył ją mnogością zastosowań w bardzo odległych dziedzinach od medycyny do takich, jak przemysł ciężki, czy oczyszczalnie powietrza i wody. Węgiel aktywny dzięki swojej porowatej strukturze zatrzymuje cząsteczki, jony, biomolekuły i atomy substancji na swojej powierzchni. To zjawisko nosi nazwę adsorpcji. Oprócz węgla aktywnego w grupie adsorbentów znajdują się zeolity, aluminożele i żele krzemionkowe. Materiały te różnią się wielkością porów i ich rozłożeniem. Na potrzeby swojej pracy uczennica wykonała eksperymenty polegające na odbarwieniu wody z barwnikiem sztucznym, z sokiem malinowym oraz z napojem typu „cola”. Na Uniwersytecie Śląskim wykonała także badanie struktury wybranego węgla aktywnego.

Pozostali finaliści Międzynarodowej Konferencji Młodych Naukowców to:

Gabriela Irzyk – VIII LO Katowice – „Oklaski”;

Marcin Tatoń – V LO Gliwice – „Sztuczny mięsień”;

Karol Białas – II LO Dąbrowa Górnicza – „Podwójne wahadło”;

Mateusz Wiśniewski – VIII LO Katowice – „Niesamowite krzywe stożkowe”.

Gabriela Irzyk tak opisuje przeprowadzone przez siebie badania na temat oklasków.

„Okazuje się, że oddziaływanie zachodzące między ludźmi możemy opisać za pomocą modeli fizycznych. Z jednej strony za pomocą modelu Isinga, stworzonego jako model ferromagnetyka, możemy dowiedzieć się, dlaczego pojawia się aplauz i jak nasze zachowanie zależy od zachowania naszych sąsiadów. Z drugiej strony model Kuramoto pozwala nam odpowiedzieć na pytanie, dlaczego ludzie synchronizują swoje brawa.

Wyniki tych badań mogą się wydać zaskakujące. Dochodzimy do wniosku, że, mimo iż zwiemy się dumnie istotami *homo sapiens*, to nasze zachowanie nie różni się bardzo od zachowań cząstek, które możemy opisać prostymi modelami matematycznymi”^{*}.

Członkami jury byli naukowcy i nauczyciele – przedstawiciele różnych państw. Przewodniczącym jury w sesji plakatowej był wieloletni „kwark”, student wydziału Automatyki, Elektroniki i Informatyki Politechniki Śląskiej – Tomasz Tokarski.

^{*} Od Redakcji: czytaj „Kolektywny aplauz” Krzysztofa Sachy, *Foton* 86, Jesień 2004.

W konferencji wzięła również udział laborantka Pracowni Fizyki Pałacu Młodzieży w Katowicach – Emilia Pasamonik oraz prof. dr hab. Maciej Kolwas z Polskiej Akademii Nauk w Warszawie. Zawody odbyły się w pięciu kategoriach: fizyka, informatyka z inżynierią, ekologia, matematyka i nauka o życiu.

Organizatorzy konferencji zadbali o różnego rodzaju atrakcje dla uczestników. Zorganizowano wiele gier i zabaw integracyjnych m.in. Wieczorek Zapoznawczy, Jogę Śmiechu czy dyskotekę. Ciekawym punktem programu była Noc Kulturowa, dzięki której uczestnicy mogli wzajemnie poznać obyczaje panujące w ich krajach. Szczególnie popularne było wspólne wykonywanie tańców tradycyjnych.

Młodzież uczestniczyła w wycieczkach do Izmiru, Kusadasi, Selcuku, a także miała możliwość zwiedzenia domu Maryi Dziewicy, Muzeum Oliwy oraz ruin starożytnego Efezu. Podczas tej ostatniej odbyła się gra terenowa na orientację. Zwycięska drużyna odnalazła ukryte na terenie Efezu medale.

Każdy uczestnik konferencji zasadził również własne drzewko opatrzone imienną tabliczką i otrzymał stosowny certyfikat od fundatorów akcji zalesiania nieużytków w obrębie miasta Izmir. Wszystkie sadzonki stały się częścią lasu konferencji ICYS 2015. Powyższa akcja odbyła się pod patronatem Ministerstwa Leśnictwa i Gospodarki Wodnej Republiki Turcji.

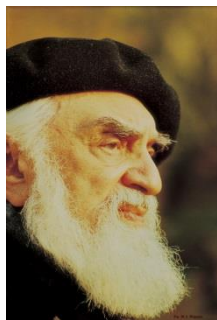
Podziękowania za współpracę z Grupą Twórczą Quark należy złożyć prof. zw. dr hab. Alicji Ratusznej, prof. dr hab. Władysławowi Borgielowi, prof. dr hab. Maciejowi Maśce, dr hab. Stanisławowi Duberowi z Uniwersytetu Śląskiego, prof. dr hab. inż. Andrzejowi Bluszczowi, dr inż. Maciejowi Krzywieckiemu, dr Joachimowi Gmyrkowi z Politechniki Śląskiej w Gliwicach, prof. dr hab. inż. Andrzejowi Ziębie z Akademii Górniczo-Hutniczej w Krakowie, prof. dr hab. Maciejowi Kolwasowi z Polskiej Akademii Nauk w Warszawie oraz wielu nauczycielom.

Urszula Woźnikowska-Bezak, prezes Stowarzyszenia „Z Nauką w Przyszłość” serdecznie dziękuje za wsparcie organizacyjne, jakie okazały Grupie Twórczej Quark następujące instytucje: Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego, Pałac Młodzieży w Katowicach, TAURON Polska Energia, Miejskie Przedsiębiorstwo Gospodarki Komunalnej w Katowicach, Urząd Miasta Katowice, Urząd Miasta Bytom oraz Urząd Miasta Łaziska Górne.



Planetarium i Obserwatorium Astronomiczne im. Arego Sternfelda w Łodzi – Specjalistyczny Ośrodek Pracy Pozaszkolnej

*Stanisław Bednarek
Uniwersytet Łódzki*



Urodzony w Sieradzu Ary Sternfeld (1905–1980) jest uważany za współtwórcę teoretycznych podstaw kosmonautyki. Lata swojej młodości spędził w Łodzi i tutaj wykonywał szczegółowe obliczenia parametrów trajektorii przyszłych lotów kosmicznych. Dlatego też łódzkie Planetarium i Obserwatorium Astronomiczne otrzymało imię tego wybitnego uczonego. Placówka działa nieprzerwanie od 1984 r. i prowadzi szeroką działalność edukacyjną oraz popularyzatorską. Dzięki finansowaniu przez Wydział Edukacji Urzędu Miasta, wszystkie zajęcia są bezpłatne. Chętnie bierze

w nich udział młodzież oraz dorośli z Łodzi i regionu łódzkiego. Stałym punktem zajęć są projekcje i wykłady „pod kopułą”, zapoznające z ruchami ciał niebieskich i innymi zjawiskami astronomicznymi. Planetarium wyposażone jest również w zespół teleskopów i taras obserwacyjny, zlokalizowany na dachu budynku. Pozwala to na samodzielne obserwacje astronomiczne pod okiem doświadczonych nauczycieli. Zajęcia „na tarasie” cieszą się popularnością przez cały rok, jednak zainteresowanie nimi bardzo wzrasta, gdy na niebie pojawiają się nowe obiekty i niecodzienne zjawiska astronomiczne, np. komety, roje meteorów, czy zaćmienia. Pracownicy Planetarium organizują również obserwacje w innych miejscach dostępnych dla wielu chętnych, np. w Ogrodzie Botanicznym – tak było m.in. podczas ostatniego zaćmienia Słońca 20 marca 2015 r. Biorą także udział w festiwalach, piknikach i konferencjach naukowych.

Każdego roku w Planetarium prowadzone są zajęcia około 25 uczniowskich kół zainteresowań. Ich tematyka dotyczy nie tylko astronomii, ale również fizyki, matematyki, geografii, fantastyki naukowej, filozofii i informatyki. Są też koła, których działalność ukierunkowana została na przygotowanie uczniów do matury i udziału w konkursach przedmiotowych. Zajęcia kół zainteresowań odbywają się w pracowniach: geograficznej, informatycznej i fizycznej. Wysoką frekwencją cieszą się zajęcia w pracowni informatycznej. Chętnie przychodzi tu młodzież z rodzin o niższych dochodach, mająca czasami problemy z nauką. W przypadku tych uczniów Planetarium umożliwia nie tylko rozwój zainteresowań, ale spełnia też rolę wychowawczą.

Na szczególną uwagę zasługuje pracownia fizyczna. Stanowi ona również Eksperymentarium i została zorganizowana przez dra Bogusława Malańskiego, który poświęcił na to ostatnie lata swojego życia. Oprócz wielu oryginalnych

stanowisk doświadczalnych znajduje się tutaj wahadło Foucaulta. W Planetarium organizowane są systematycznie wykłady popularnonaukowe, wchodzące w skład kilku cykli tematycznych. Jednym z nich jest cykl „Człowiek i Wszechświat”, obejmujący aktualne problemy niemal ze wszystkich dziedzin nauki. O różnorodności tematów świadczyć może fakt, że w ramach tego cyklu wykłady wygłosili, między innymi: wybitny kardiochirurg dziecięcy prof. Jacek Moll, rabin Łódzkiej Gminy Żydowskiej Szymcha Keller oraz znany menadżer i działacz społeczny Piotr Kociołek. Kilka osób zatrudnionych w Planetarium jest również nauczycielami akademickimi. Ułatwia to współpracę ze szkołami wyższymi i umożliwia zwiększenie atrakcyjności zajęć. Działania te chętnie wspiera dyrektor Planetarium mgr Jerzy Loba, absolwent studiów w zakresie fizyki i filozofii.



Planetarium i Obserwatorium Astronomiczne im. Arego Sternfelda w Łodzi

Od Redakcji:

Ary Sternfeld jest autorem teorii lotu rakiet wielostopniowych, opracował zasady przelotu rakiet przez atmosferę, obliczył trajektorie lotów międzyplanetarnych (w czasie, gdy nie było jeszcze ani jednego sztucznego satelity Ziemi) i optymalizował je ze względu na zużycie paliwa, siłę ciągu silnika, zdolność przewozową, przeciążenia i inne parametry. Obliczył prędkości kosmiczne i wiele orbit sztucznych satelitów Ziemi, między innymi tę, na którą 4 października 1957 roku wprowadzono pierwszego sztucznego satelitę – Sputnika. Zgodność owych obliczeń z realizowanymi orbitami jest duża, różnice są mniejsze niż 1%.

Ary Sternfeld w 1935 roku wyemigrował do Związku Radzieckiego, pracował w Moskwie oraz na Syberii. Więcej informacji można znaleźć w Wikipedii pod rzetelnie opracowanym hasłem „Ary Sternfeld”.



Fizyka w poezji Adama Mickiewicza

Andrzej Zięba

Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej AGH

Adam Mickiewicz w roku 1815 rozpoczął studia na Uniwersytecie Wileńskim, na Wydziale Fizyko-Matematycznym. Może dlatego, że zamieszkał u ks. Józefa Mickiewicza, dziekana tegoż wydziału i dalekiego krewnego. Wkrótce przeniósł się na wydział Filologiczny, który ukończył w roku 1919.

Pamiętką po fizycznej edukacji pozostaje m.in. wiersz *Toasty*, napisany, jak się można domyślić, z okazji koleżeńskej imprezki. Przy okazji mamy poetycki skrót programu nauczania ówczesnej fizyki. Tak jak i w dzisiejszym kursie fizyki klasycznej jest to termodynamika, elektryczność, magnetyzm i optyka, wtedy jeszcze słabo zmatematyzowane. Brak mechaniki wynika stąd, że już wtedy była ona nauką opartą na ścisłej teorii i często wykładaną razem z analizą matematyczną. Zapewne tak zarządził rektor Jan Śniadecki, pierwszy w Polsce dobry znawca rachunku różniczkowego i całkowego. Śniadecki jest prototypem Starca z ballady *Romantyczność*, który wierzy tylko „w mędrca szkiełko i oko”.

TOASTY (1821?)

*Co by było wśród zakresu,
Na którym ludzie rzuceni,
Bez światła, ciepła, magnesu
I elektrycznych promieni?*

*Co by było – zgadnąć łatwo:
Ciemno, zimno, chaos czyste.
Witaj więc, słoneczna dziatwo,
WITWAT światło promieniste!*

*Lecz cóż po światła iskierce,
Gdy wszystko dokoła skrzepło?
Zimny świat i zimne serce,
Ciepła trzeba. WITWAT ciepło!*

*Pełnych światła i zapachu
Często silny wiatr rozniesie;*

*By ciało zbliżyć ku ciału,
Jest magnes. WIWAT magnesie!*

*Tak gdy zrosniem w okrąg wielki
Przez magnesowaną styczność,
Wówczas z lejdejskiej butelki
Palniem: WIWAT elektryczność!*

Cesarski Uniwersytet Wileński był w tym czasie najlepszą polską uczelnią i jednocześnie największą w całym państwie rosyjskim (niestety, zamkniętą przez carat w 1834 r. w ramach represji po powstaniu listopadowym). Uniwersytet miał już wtedy ponad 200-letnią tradycję, do jego dziejów w drugiej połowie XVIII wieku Poeta nawiązał w *Panu Tadeuszu*. Połowę książki ósmej epopei zajmują fragmenty zatytułowane „Astronomia Wojskiego” oraz „Uwaga Podkomorzego nad kometami”. W usta tego ostatniego włożył Poeta słowa, dotyczące m.in. ponadczasowego problemu finansowania zakupów aparatury naukowej:

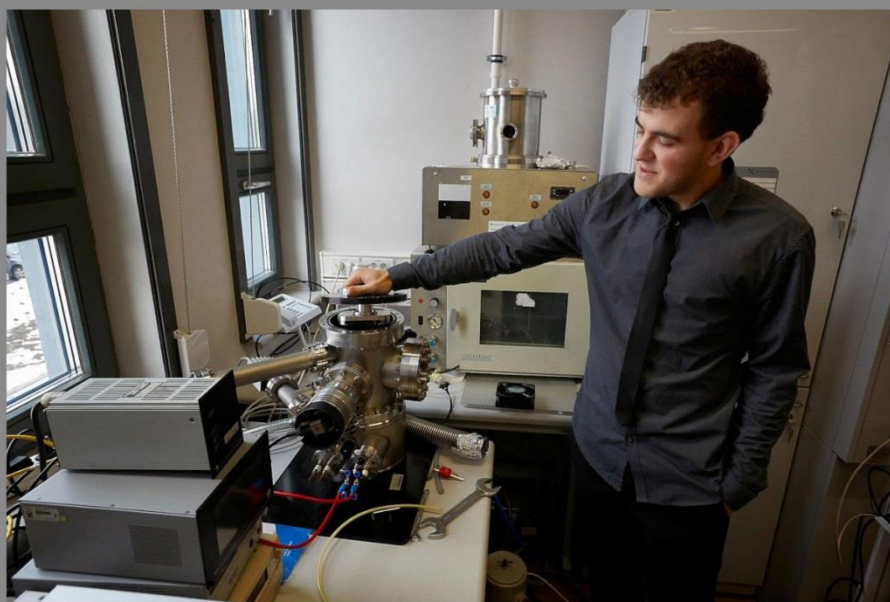
*I ja astronomiji słuchałem dwa lata
W Wilnie, gdzie Puzyrnina, mądra i bogata
Pani, oddała dochód z wioski dwiestu chłopów
Na zakupienie różnych szkielek i teleskopów;
Książdz Poczobut, człek sławny, był obserwatorem
I całej Akademiji naonczas rektorem,
Przecież w końcu katedrę i teleskop rzucił,
Do klasztoru, do cichej celi swej powrócił
I tam umarł przykładnie. Znam się też z Śniadeckim,
Który jest mądrym bardzo człekiem, chociaż świeckim.*



UNIwersytet JAGIELLOŃSKI
W KRAKOWIE

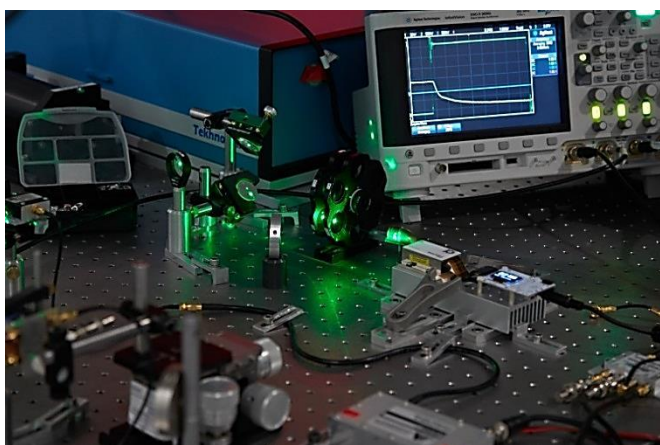
WYDZIAŁ FIZYKI, ASTRONOMII
I INFORMATYKI STOSOWANEJ

Bądź inspiracją
Twórz przyszłość



www.fais.uj.edu.pl

Laboratoria w Instytucie Fizyki UJ



Wnętrza nowego budynku Wydziału Fizyki,
Astronomii i Informatyki Stosowanej UJ

