Fizyka w matematyce

Waldemar Gorzkowski[1]
Instytut Fizyki PAN, Warszawa

Wstęp

Rola matematyki w fizyce jest powszechnie znana i nie ma potrzeby, by o niej wspominać w oddzielnym artykule. Jest to bowiem codzienność. Bywają jednak sytuacje, gdy fizyka przychodzi z pomocą matematyce w rozwiązywaniu niektórych, wcale niełatwych problemów. W artykule tym podamy jeden z takich przykładów. Rzecz będzie dotyczyła rozkładu prostokąta na kwadraty, a w szczególności na różne kwadraty. Problem ten to jeden z wielu tematów dotyczących teorii liczb i kombinatoryki i na pierwszy rzut oka trudno dopatrzyć się w nim związków z fizyką, a w szczególności z... prawami Kirchhoffa. Ale związek taki istnieje i przedstawimy go tutaj.

Prawa Kirchhoffa w uproszczeniu

Prawa Kirchhoffa dla obwodów prądu stałego bez wewnętrznych sił elektromotorycznych dobrze znamy i nie jest naszym celem powielanie tu wiadomości podręcznikowych. Będziemy interesować się tu tylko uproszczoną ich wersją, gdy wszystkie oporniki w obwodzie mają oporność równą jednemu omowi. Napięcie będziemy wyrażać w woltach, a natężenia w amperach. Krótko mówiąc będziemy stosować układ SI. Dzięki temu będziemy opuszczać jednostki wszędzie tam, gdzie tylko nie będzie to prowadzić do nieporozumień. Będziemy też pomijać oznaczenia oporników na rysunkach przyjmując milcząco, że każdy odcinek od danego węzła do najbliższego węzła ma oporność równą jednemu omowi. Kierunki prądów uważane za dodatnie będziemy zaznaczać strzałkami (ujemnej wartości natężenia prądu będzie odpowiadał przepływ prądu w kierunku przeciwnym do strzałki). Przy takiej umowie prawa Kirchhoffa będą brzmiały następująco:

I prawo: *Suma prądów dochodzących do każdego węzła jest równa sumie prądów opuszczających ten węzeł* lub też następująco: *algebraiczna suma prądów dochodzących do każdego węzła jest równa zeru*. Przez sumę algebraiczna rozumiemy sumę z uwzględnieniem znaku prądów (prądy wychodzące traktujemy jako prądy dochodzące, ale o ujemnym natężeniu). Akurat w przypadku tego prawa nic się nie zmieniło w stosunku do znanego Państwu sformułowania.

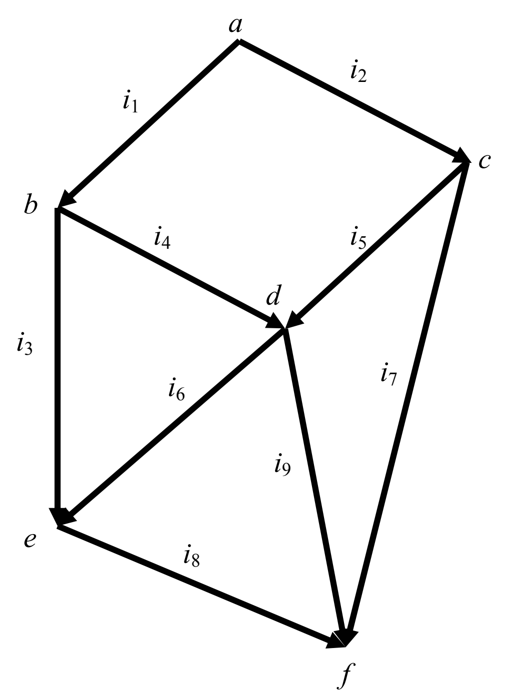
---

[1] Z autorem można kontaktować się za pomocą poczty elektronicznej: gorzk@ifpan.edu.pl

II prawo: *Algebraiczna suma prądów dla każdego oczka obwodu jest równa zeru.* Od tradycyjnego sformułowania prawo to różni się tym, że z góry uwzględniliśmy w nim fakt, że opór każdego odcinaka obwodu od węzła do najbliższego węzła jest równy jedności. Oczywiście przy określonym kierunku obiegu oczka prądy płynące zgodnie z tym obiegiem uważamy za dodatnie, a przeciwnie – za ujemne. Oczywiście można to prawo sformułować i inaczej: *Algebraiczna suma prądów wzdłuż dowolnej zorientowanej drogi łączącej dwa węzły jest taka sama*.

Pierwszy przykład

Rozważmy na początek obwód pokazany na rysunku 1, złożony z dziewięciu oporników. Niech prąd wpływa w węźle *a*, a wypływa w węźle *f*. Przyjmijmy oznaczenia natężeń prądów takie, jak pokazano na rysunku.



Rys. 1

Korzystając z praw Kirchhoffa możemy wypisać odpowiednie równania je wyrażające. Mamy:

Węzeł lub oczko	Równanie
b	$i_1 - i_3 - i_4 = 0$
c	$i_2 - i_5 - i_7 = 0$
d	$i_4 + i_5 - i_6 - i_9 = 0$
e	$i_3 + i_6 - i_8 = 0$
$acdba$	$i_2 + i_5 - i_4 - i_1 = 0$
$bdeb$	$i_4 + i_6 - i_3 = 0$
$cfdc$	$i_7 - i_9 - i_5 = 0$
$dfed$	$i_9 - i_8 - i_6 = 0$

Jak widać, równań wyrażających prawa Kirchhoffa jest osiem, podczas gdy nieznanych prądów jest dziewięć. Nie powinno nas to jednak dziwić. Jest bowiem oczywiste, że jeżeli i_1, i_2, ..., i_9 jest układem prądów mogących płynąć w układzie, to także układ prądów αi_1, αi_2, ..., αi_9, gdzie α jest dowolna liczbą też ma tę właściwość. Mamy więc mniej równań niż niewiadomych i musimy się z tym pogodzić. Uznając jedno z natężeń, np. i_1, za znane, inne możemy już wyznaczyć. Rozwiązując układ ośmiu równań podany w tabelce dostajemy:

$$i_2 = \frac{6}{5} i_1;\ i_3 = \frac{8}{15} i_1;\ i_4 = \frac{7}{15} i_1;\ i_5 = \frac{4}{15} i_1;$$

$$i_6 = \frac{1}{15} i_1;\ i_7 = \frac{14}{15} i_1;\ i_8 = \frac{3}{5} i_1;\ i_9 = \frac{2}{3} i_1.$$

Zgodnie z uwagą poczynioną wyżej skorzystajmy z dowolności i przyjmijmy, że $i_1 = 15$. Wtedy otrzymamy rozwiązanie na natężenia prądów w postaci względnie pierwszych liczb naturalnych:

$$i_1 = 15;\ i_2 = 18;\ i_3 = 8;\ i_4 = 7;\ i_5 = 4;\ i_6 = 1;\ i_7 = 14;\ i_8 = 9;\ i_9 = 10.$$

Zgodnie z II prawem Kirchhoffa w wersji rozważanej w tym artykule, „napięcie” U między węzłami a i f nie zależy od drogi, jaką by się je połączyło. Dla rozważanego układu wynosi ono $i_1 + i_3 + i_8 = 32$.

Natomiast z I prawa Kirchhoffa wynika, że dla dowolnego przekroju obwodu linią prostopadłą do odcinka łączącego węzły a i f suma natężeń prądów przepływających przez ten przekrój musi być taka sama i równa natężeniu prądu wpływającego, wynoszącego w rozważanym przypadku $I = i_1 + i_2 = 33$.

Moc wydzielana w całym obwodzie jest równa M = UI, czyli równa się polu prostokąta o bokach U oraz I. W naszym przypadku jest to prostokąt 32×33. Ale moc ta jest równa łącznej mocy wydzielanej na jednostkowych oporach tworzących sieć, czyli jest równa sumie natężeń wszystkich prądów:

$$M = i_1^2 + i_2^2 + i_3^2 + i_4^2 + i_5^2 + i_6^2 + i_7^2 + i_8^2 + i_9^2 .$$

Łatwo sprawdzić, że

$$32\times33 = 1056 = 15^2 + 18^2 + 8^2 + 7^2 + 4^2 + 1^2 + 14^2 + 9^2 + 10^2$$

Widzimy więc, że pole prostokąta 32×33 jest równe łącznemu polu dziewięciu kwadratów o bokach równych odpowiednio 15, 18, 8, 7, 4, 1, 14, 9, 10. Ale to nie wszystko. Mogłoby przecież tak być, że mimo, iż pole prostokąta równa się łącznemu polu wszystkich kwadratów, to prostokąt nie da się z tych mniejszych kwadratów złożyć (bez ich rozcinania na jeszcze mniejsze kawałki). Tak się jednak składa, że obwód elektryczny od razu podaje wskazówki, jak z kwadratów prostokąt złożyć.

Przypiszmy każdemu węzłowi pewien poziom. Zacznijmy od węzła a – rys. 1. Z węzła tego wychodzą dwa prądy. Zaznaczmy moc na nich wydzielaną za pomocą kwadratów o bokach $i_1 = 15$ i $i_2 = 18$, dotykających górna krawędzią tego poziomu. Prąd i_1 dochodzi do węzła b. Zaznaczmy więc poziom dolnego boku kwadratu odpowiadającego temu prądowi przez b. Podobnie, poziom odpowiadający dolnemu bokowi kwadratu odpowiadającego prądowi i_2 zaznaczmy literką c. Prąd i_1 rozwidla się na prądy $i_3 = 8$ i $i_4 = 7$. Narysujmy więc po lewej stronie kwadraty o bokach 8 i 7, odpowiadające tym prądom itd. Postępując tak dalej znajdujemy rozkład prostokąta 32×33 na kwadraty, pokazany na rys. 2. Układ elektryczny, który rozważaliśmy pozwolił nam nie tylko na wyznaczenie boków kwadratów składowych, ale i na wyznaczenie ich wzajemnego położenia w rozkładzie prostokąta na kwadraty.

Reguła ogólna

Z przedstawionych tu rozważań widać pewną ogólną drogę postępowania:

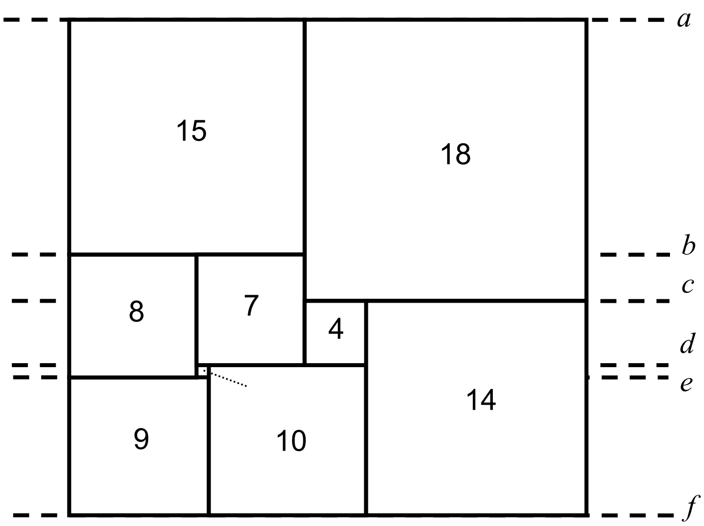
1. Weźmy dowolny płaski układ elektryczny zbudowany z oporów jednostkowych i ustalmy, którym węzłem prąd wpływa, a którym wypływa.
2. Znajdźmy natężenia prądów w układzie (liczba niewiadomych jest oczywiście równa liczbie oporników tworzących układ). Zawsze będziemy mieli tu pewną dowolność, gdyż liczba równań będzie mniejsza o jeden niż liczba niewiadomych (udowodnij to!).
3. Ponieważ równania wyrażające prawa Kirchhoffa są liniowe, więc rozwiązania będą wyrażały się liczbami wymiernymi mnożonymi przez jakąś stałą. Dobierzmy tę stałą tak, by wszystkie natężenia wyrażały się względnie pierwszymi liczbami naturalnymi.
4. Wyznaczmy „napięcie”, czyli sumę natężeń prądów od węzła, przez który prąd wpływa, do węzła, przez który prąd wypływa.
5. Wyznaczmy całkowite natężenie prądu wpływającego I.

6. Ze względu na to, że całkowita moc prądu wydzielana w układzie $M = UI$ jest równa sumie mocy wydzielanych na poszczególnych opornikach, mamy:

$$UI = M = \sum_{\substack{\text{po wszystkich} \\ \text{prądach}}} i_k^2$$

Związek ten mówi, że pole prostokąta o bokach U i I jest równe sumie pól o bokach odpowiadających natężeniom prądów.

7. Konkretny rozkład prostokąta na kwadraty przeprowadzamy wg opisu podanego w pierwszym przykładzie – odpowiada on wykorzystaniu I prawa Kirchhoffa.

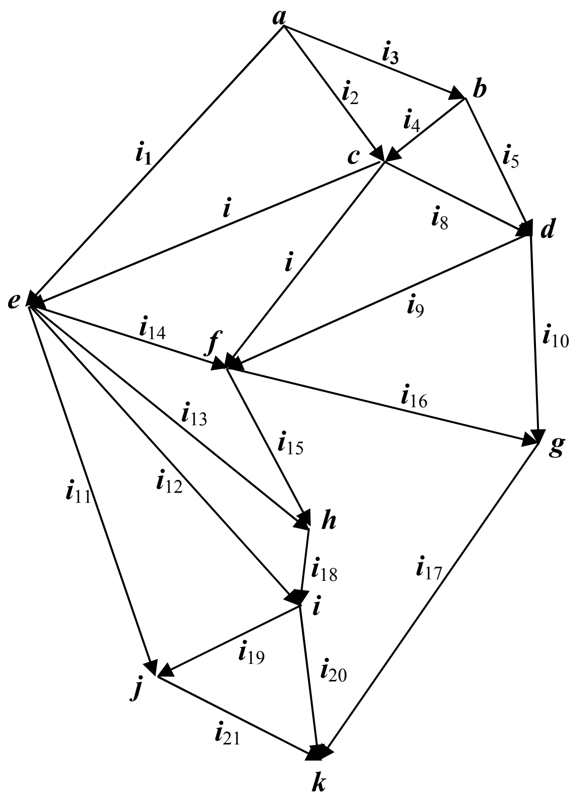


Rys. 2

Wykorzystanie obwodów elektrycznych do rozkładu prostokątów na kwadraty odkryto bardzo dawno temu, jeszcze w roku 1940. Niestety, praca [1], choć czasami cytowana wydaje się nie do zdobycia. W znanych mi bibliotekach jej nie ma. Nie jest też dostępna w Internecie. Na podstawie jej objętości (28 stron druku) można wnosić, że dowód reguł, które tutaj podaliśmy był dość skomplikowany. Potwierdzałoby to stwierdzenie: „*Dowodów tych twierdzeń nie podamy, gdyż są zbyt złożone*", które odnosi się do tego wspomnianych tu reguł w książce [2]. Tymczasem w moim przekonaniu odwołanie się do mocy wydzielanej na jednostkowych opornikach i na całym obwodzie czyni te reguły zupełnie prostymi, a nawet trywialnymi.

Pewne komplikacje mogą się pojawić, gdy któreś z natężeń prądów okaże się ujemne. W takim razie można układ przebudować tak, by w odpowiedniej gałęzi wybrać inny kierunek prądu za dodatni i poprzesuwać węzły tak, by wszystkie prądy płynęły tylko w „dół". Nie będziemy jednak wchodzić tu w szczegóły, bo nie są one zbyt istotne.

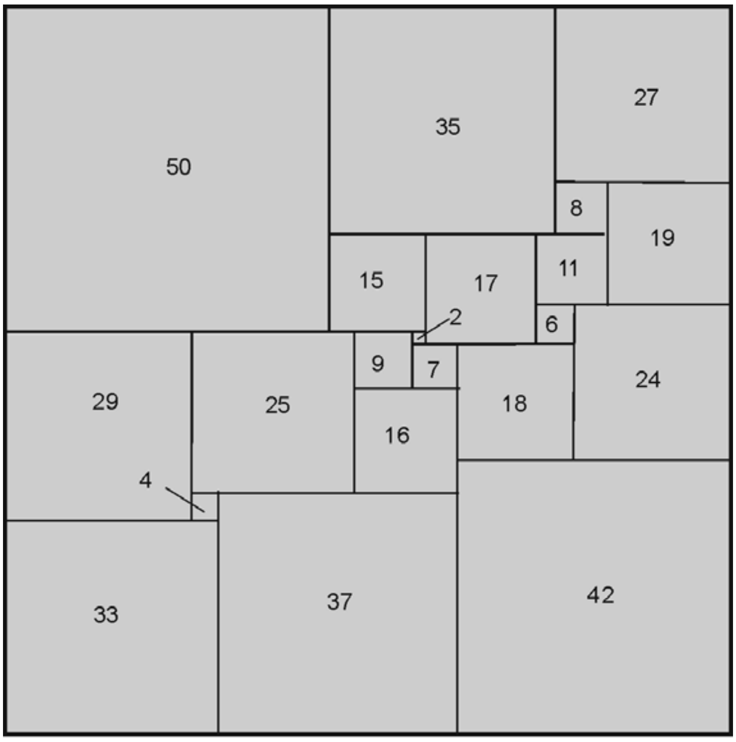
Drugi przykład



Rys. 3

Rozkład prostokąta na same różne kwadraty nazywa się rozkładem doskonałym. Jest oczywiste, że rozkłady niedoskonałe są mniej interesujące, wiele z nich to po prostu rozkłady trywialne.

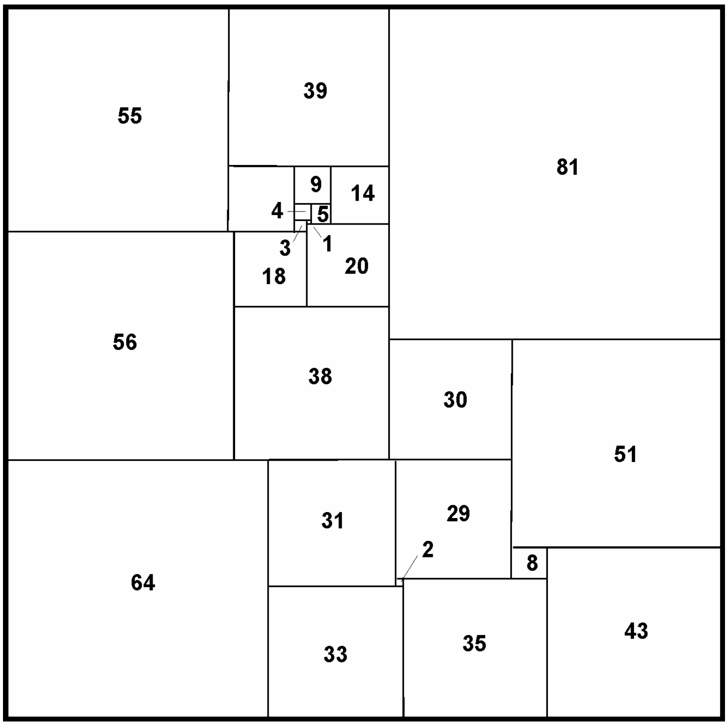
Na początku rozpatrzyliśmy układ złożony z dziewięciu oporników. To nie był wybór przypadkowy. Okazuje się bowiem, a Czytelnik może sam to sprawdzić, że dla mniejszej liczby oporników wśród natężeń prądów zawsze znajdą się co najmniej dwa równe. Tak więc, nie ma rozkładów doskonałych prostokąta na mniej niż dziewięć kwadratów. Jeden z takich rozkładów doskonałych pokazuje rys. 2. Można jednak metodą prób i błędów przekonać się, że istnieje jeszcze jeden rozkład prostokąta na dziewięć kwadratów, nierównoważny rozkładowi podanemu wyżej: $6169 = 4209 = 2^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2 + 16^2 + 25^2 + 28^2 + 33^2 + 36^2$. Spróbuj jednak Czytelniku znaleźć go samemu!



Rys. 4

A czy kwadrat można rozciąć na same różne kwadraty o mniejszych bokach? Tak, można. Wystarczy rozważyć układ przedstawiony na rys. 3. Czytelnik może bez trudu przekonać się, że układ ten prowadzi do doskonałego rozkładu kwadratu na 21 kwadratów, pokazanego na rys. 4. Okazuje się, że mniej niż 21 kwadratów nie wystarczy do rozkładu kwadratu na różne kwadraty. Udowodnił to A.W.J. Duijvestijn, który potem opublikował katalog doskonałych rozkładów kwadratów o bokach równych od 21 do 25 [3, 4].

Jest oczywiste, że mając doskonały rozkład kwadratu lub prostokąta na kwadraty, można odtworzyć układ elektryczny, który do niego prowadzi. W „Kalejdoskopie Matematycznym" H. Steinhausa [5] podany jest rozkład kwadratu na 24 kwadraty – rys. 5. Spróbujcie narysować odpowiadający mu układ elektryczny i wykazać, że rzeczywiście odpowiada on temu rozkładowi!



Rys. 5

Literatura

[1] R.L. Brooks, C.A.B. Smith, A.H. Stone, W.T. Tutte, *The Dissection of Rectangles into Squares*, Duke Math. J., **7** (1940) 312–340.

[2] B. Kordiemski, N. Rusalew, *Dziwy kwadratu*, PZWS, Warszawa 1956 (tłumaczenie z rosyjskiego), str. 109.

[3] A.J.W. Duijvestijn, *Simple Perfect Squared Squares and 2×1 Squared Rectangles of Orders 21–24*, Journal of Combinatorial Theory, Ser. **B**, vol. **59**, no. 1, September 1993, pp. 24–36.

[4] C.J. Bouwkamp, A.J.W. Duijvestijn, *Catalog of Simple Perfect Squared Squares of Orders 21 trough 25*, Eindhoven Univ. of Technology, Dept of Math., Report 92-WSK-03, Nov. 1992.

[5] H. Steinhaus, *Kalejdoskop Matematyczny*, WSiP, Warszawa 1989 (wydanie czwarte).