



## Skąd się bierze tarcie?

Przemysław Borys

Katedra Fizykochemii i Technologii Polimerów,  
Wydział Chemiczny, Politechnika Śląska

### 1. Wprowadzenie

Już w szkole podstawowej każdy uczeń słyszy o tarcii. Przekazywana teoria sprowadza się zwykle do następujących praw tarcia Amontonsa i Coulomba [1, 2, 7]:

- Pierwsze prawo tarcia (Amontonsa): wartość siły tarcia jest proporcjonalna do wartości siły normalnej;
- Drugie prawo tarcia (Amontonsa): tarcie nie zależy od wielkości powierzchni stykających się ciał<sup>1</sup>;
- Trzecie prawo tarcia (Coulomba): tarcie kinetyczne nie zależy od prędkości ślizgania.

Te opisowe prawa tarcia uzupełniane są w typowych podręcznikach fizyki co najwyżej informacją o tym, że w skali mikroskopowej trące powierzchnie nie są idealnie gładkie [1]. W ogólności ten punkt widzenia jest prawdziwy, ale brakuje mu precyzji. W ten sposób stawiamy się w pozycji XVII-wiecznych uczonych (wśród nich Amontonsa), którzy nie wiedzieli nic o kluczowym dla tarcia znaczeniu adhezji, odkrytym na początku XX wieku przez Franka Philipa Bowdena i Davida Tabora.

Współczesna teoria tarcia badana jest w ramach nauki zwanej *trybologią*<sup>2</sup>. Fragmentami tej teorii zamierzam się w następujących paragrafach podzielić z czytelnikami. Przedmiotem rozważań będzie tarcie suche (bez stosowania smarów) zewnętrzne (występujące pomiędzy powierzchniami, a nie wewnątrz materiału). O tarcii wewnętrznej napomknę tylko trochę omawiając tarcie gumy. Ponieważ przedstawiany materiał nie jest łatwy, w pierwszym czytaniu proponuję pominąć treść ramek, aby nie stracić z oczu myśli przewodniej tekstu<sup>3</sup>.

### 2. Historyczne poglądy na tarcie

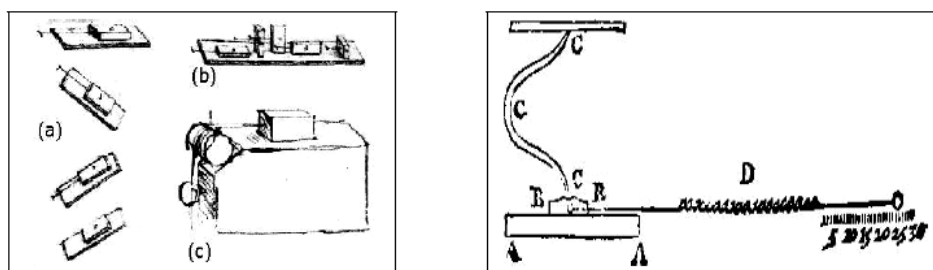
Pierwszym badaczem praw tarcia był Leonardo da Vinci pod koniec XV wieku. Badał on tarcie statyczne (rys. 1c, po lewej). Zaobserwował proporcjonalność tarcia statycznego do siły nacisku („tarcie wywołuje dwukrotne zwiększenie

<sup>1</sup> Drugie prawo tarcia było tak niezgodne z intuicją, że francuska Academie Royale, której Amontons je przedstawił, wydelegowała swojego eksperta (De la Hire) w celu jego zweryfikowania [2].

<sup>2</sup> Z greki: *tribos* (*τριβος*) – pocierać. Obecnie polscy trybolodzy (PAN) proponują nazwę „tribologia” [3], aby uniknąć skojarzeń z kołami zębatymi (nazwa *tryby* pochodzi bowiem z niemieckiego *treiben* – napędzać, a nie z greki [4]).

<sup>3</sup> Uczniom proponuję na początek nie wnikać w matematykę modeli Belidora, Bowdena-Tabora i Greenwooda-Williamsona, a skoncentrować się na ich opisie jakościowym.

oporu, gdy ciężar ulegnie powiększeniu dwa razy” [2] i dalej, „każde ciało stanowi opór ruchowi z siłą równą jednej czwartej swego ciężaru”<sup>4</sup> [5]). Zauważył też niezależność tarcia od pola powierzchni (rys. 1b po lewej). Choć da Vinci nie rozróżniał tarcia statycznego i kinetycznego, jego odkrycia są szokująco precyzyjne zważywszy, że w jego czasach nie istniała nawet definicja siły (Newton opracował ją dopiero 200 lat później [6]).



Rys. 1. Po lewej: rysunki Leonarda da Vinci dotyczące tarcia – a) badania na równi pochyłej, b) badania niezależności tarcia od pola powierzchni (klocek ułożony w różnych pozycjach), c) przyrząd pomiarowy, w którym po płaskiej powierzchni ciało było przesuwane za pomocą ciężarka na sznurku. Po prawej: rysunek układu pomiarowego Amontonsa (1699). Sprężyna D mierzy siłę tarcia pomiędzy materiałami A i B. Sprężyna C reguluje nacisk ([www.nano-world.org](http://www.nano-world.org))

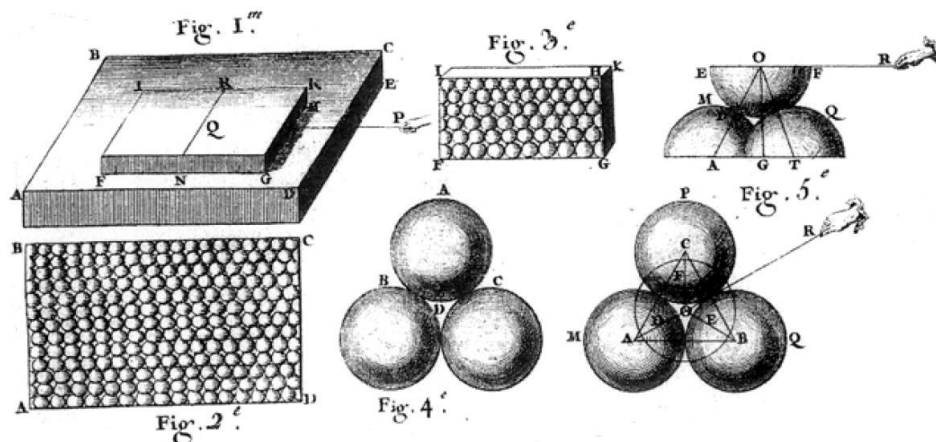
Przez kolejne 200 lat, notatki Leonarda leżały w zapomnieniu [7]. W tej sytuacji prawa tarcia zostały odkryte ponownie przez Guillaume Amontonsa (1663–1705), który złożył pracę o tarcu Francuskiej Królewskiej Akademii Nauk w 1699 r. i to jemu przysługuje chwała odkrywcy [2, 7]. Układ pomiarowy Amontonsa pokazany jest po prawej stronie na rys. 1 – badał on rozciągnięcie sprężyny podczas przesuwania przedmiotu, a więc studiował tarcie kinetyczne [5, 8]. Doszedł do tych samych wniosków co Leonardo, znanych obecnie jako dwa prawa Amontonsa, podane we wstępie artykułu. Amontons, podobnie jak da Vinci, uważał, że współczynnik tarcia jest wielkością uniwersalną. Jego wyniki wskazywały na  $\mu = \frac{1}{3}$  [5].

Opory ruchu w rozumieniu Amontonsa mogły być wynikiem dwóch efektów związanych z zazębaniem się powierzchni: wspinania się na nierówności i elastycznego pochylania nierówności. Sam Amontons ograniczył się jedynie do jakościowego opisu mechanizmu tarcia [9, 10, 11], ale późniejsi badacze proponowali bardziej szczegółowe modele. Pierwszy model przedstawił **Belidor w 1737 roku** – *wspinanie się po sobie nierówności kulistych* (rys. 2). W tym modelu powierzchnia przybliżona jest przez rzędy jednakowych kul. W spoczynku górna kula znajduje się między trzema kulami u dołu, tworząc pomię-

<sup>4</sup> Co oznacza, że współczynnik tarcia ma wartość 1/4 i jest wielkością uniwersalną.

dzy środkami kul czworoscian foremny o wysokości danej (znanym) wzorem

$$h_1 = 2R\sqrt{\frac{2}{3}}^5.$$



Rys. 2. Rysunki Belidora z pracy *Architecture Hydraulique*, 1737 (wg [12])

Aby poruszyć górną płaszczyznę ponad dolną, należy wspinać się po okręgu na dwie z trzech kul podstawy, osiągając pozycję maksymalną, przy której tworzy się struktura trójkąta równobocznego o wysokości  $h_2 = R\sqrt{3}$ . Połowa tej wysokości wyznacza promień równoleżnika dolnej kuli, po którym porusza się kula górna ( $r_d = R\frac{\sqrt{3}}{2}$ ).

Ponieważ, jak wykażemy niżej<sup>6</sup>  $\mu = \operatorname{tg} \alpha$ , potrzebny jest nam tangens nachylenia zbocza, po którym wspina się kula. Dany jest on poprzez pochodną wzoru na wysokość,  $y' = \left(\sqrt{r_d^2 - x^2}\right)' = \frac{x}{\sqrt{r_d^2 - x^2}}$ .

Jak wyznaczyć punkt styku  $x^7$  o największym kącie nachylenia? Znajduje się on w dolinie, gdy kule są w spoczynku. Wiemy, że jego wysokość  $y = \frac{h_1}{2}$ <sup>8</sup>.

<sup>5</sup> Długość krawędzi czworoscianu, przechodzących przez punkty styku to  $2R$ .

<sup>6</sup> Wynik ten u Eulera jest przedstawiony bardziej czytelnie i klasycznie wiąże się wyprowadzenie tego wzoru z Eulerem. Jest to w istocie zwykły warunek równowagi sił na zboczu nierówności.

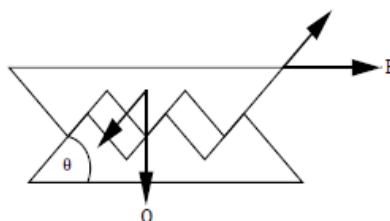
<sup>7</sup> Licząc od środka równoleżnika, po którym zachodzi wspinać.

<sup>8</sup> Połowa odległości  $h_1$  między środkami kul jest odległością od środka kuli do punktu styku.

Stąd,  $x = \sqrt{r_d^2 - \frac{h_1^2}{4}} = \frac{R}{\sqrt{12}}$ . Podstawiając wszystko do wzoru na  $y'$ , uzyskamy

$y' = \frac{1}{\sqrt{8}} \approx 0,35$ <sup>9</sup>, co jest (uniwersalnym!) współczynnikiem tarcia teorii Belidora. Jest to wynik bardzo zbliżony do współcześnie mierzonego współczynnika tarcia!

Kolejny model zaproponowany został przez **Eulera w 1748 roku** – *wspinanie się jednej pilokształtnej powierzchni na drugą* (rys. 3). Euler zaproponował prostszy, bardziej czytelny model tarcia niż Belidor. Na rysunku widać, że podczas przykładania siły  $\vec{F}$  do ciała górnego, pojawia się pewna składowa, wciągająca to ciało na nierówność. Jest ona równa  $F_{\parallel} = F \cos \Theta$ .



Rys. 3. Schemat powstawania tarcia podczas unoszenia jednej powierzchni nad nierównościami drugiej

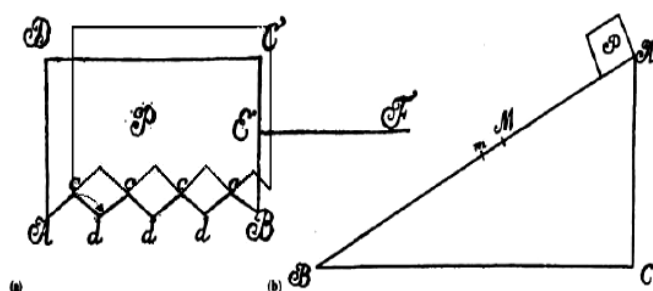
Działaniu tej siły przeciwdziała siła ciężkości  $\vec{Q}$  (ogólniej, siła nacisku na powierzchnię,  $\vec{N}$ ), poprzez składową równoległą do zbocza nierówności, tj.  $N_{\parallel} = N \sin \Theta$ .

Porównując siły, warunek ruchu zapisujemy jako  $F = N \tan \Theta$ . W modelu tym,  $\mu = \frac{F}{N} = \tan \Theta$  pełni rolę współczynnika tarcia. Siła tarcia zależy więc jedynie od ciężaru i średniego nachylenia nierówności, a nie od wielkości powierzchni.

Model ten doprowadził Eulera do rozważań nad tym, co stanie się po pokonaniu nierówności [13, 14]. Po pokonaniu drogi „pod górę”, ciało zaczyna opadać w dół. Jeśli opadając w dół jest w kontakcie z powierzchnią opadającego zbocza, dozna (dodatkowego) przyspieszenia w kierunku ruchu. Jeśli nie, dozna jedynie przyspieszającego działania siły przyłożonej. Jeśli opadając w dół spadnie na zbocze narastające w środku jego długości, droga działania siły oporów przy wciąganiu na nierówność staje się mniejsza.

<sup>9</sup> Rachunki odtworzone przez autora, niedostępne w cytowanej literaturze.

W konsekwencji, średnia siła tarcia, wyznaczana z pracy wykonanej przeciw siłom tarcia wyniesie  $F = \frac{W}{l_1 + l_2} = \frac{F_s l_1 + 0 l_2}{l_1 + l_2}$ , gdzie  $F_s$  – siła tarcia statycznego,  $l_1$  – horyzontalna droga wspinania się po nierówności,  $l_2$  – droga swobodnego opadania. W ten sposób, Euler przewidział, że tarcie kinetyczne powinno być mniejsze niż statyczne, co następnie sprawdził (rys. 4) i opisał w swojej pracy z 1750 roku [15, 16].



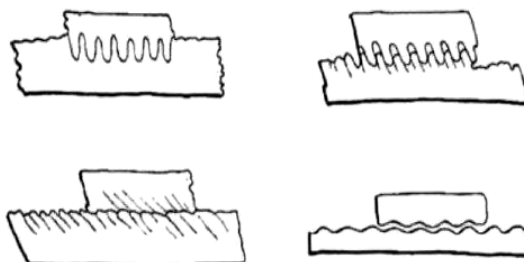
Rys. 4. Tarcie kinetyczne w modelu Eulera. Rysunek Eulera z jego pracy z 1750 (według dostępnego w Internecie rozdziału [15]). Do oryginalnego rysunku dorysowany został górny przedmiot uniesiony na szczyt nierówności i strzałeczka pokazująca kierunek opadania (rys. a)

Ostatni z omawianych modeli historycznych przedstawił **Coulomb w 1781 roku**. Było to *elastyczne odginanie nierówności połączone z koncepcją pylonkształtnych nierówności Eulera*.

Coulomb poświęcił wiele czasu doświadczeniom i zweryfikował model Eulera w odniesieniu do różnych materiałów. Uzyskiwał rozmaite wartości tarcia kinetycznego, ale co ważniejsze odkrył, że tarcie statyczne nie jest stałe! [14, 17, 18, 19]. Okazało się, że im dłużej zostawić metal na drewnie, tym większa siła tarcia. Inne materiały wykazywały podobne zachowania, choć wartość siły tarcia statycznego stabilizowała się znacznie szybciej i można było przeoczyć ten efekt.

Model tarcia, mający odzwierciedlić to zjawisko ukazuje rys. 5. Początkowo nierówności obydwu powierzchni zazębiają się, uniemożliwiając ruch. Po przyłożeniu siły poziomej, nierówności elastycznie się pochylają, a ciało górne wspiną się na ich szczyt. Następnie, po uwolnieniu ze szczeliny, ciało „płynie” nad sprasowanymi nierównościami [2, 7]. Kluczem do modelowania zmiennego w czasie tarcia statycznego było stwierdzenie, że nierówność jednej powierzchni nie jest łatwo wpasować się w doliny powierzchni drugiej. Potrzeba czasu, aby zaszły odpowiednie odkształcenia, aby wyprzeć wodę (smar) z dolin, itd. Oczywiście im większe obciążenie tym łatwiej te zmiany zachodzą, tym

większe zazębienie w stanie ustalonym i tym większa siła tarcia statycznego [18].



Rys. 5. Schemat powstawania tarcia podczas pochylania nierówności. (Z oryginalnej pracy Coulomba, „Teoria Maszyn Prostych”, 1781, dostępny np. w [10])

Omawiane modele historyczne nie biorą pod uwagę problemu, że ciało po wzniesieniu na szczyt nierówności uzyskuje energię wystarczającą do pokonania kolejnych wzniesień. Aby istniało tarcie potrzebny jest jakiś mechanizm rozpraszania energii. Problem podjął w 1804 roku John Leslie, który upatrywał strat energii w plastycznym odkształcaniu nierówności na skutek uderzenia po opadnięciu na dno doliny [2].

W dzisiejszych czasach, nierówności geometryczne (tzw. teoria chropowatości, ang. *roughness theory*) nie są już uważane za główne źródło tarcia w zastosowaniach technicznych. W 1921–1928 W. Hardy wykonał doświadczenie, w którym pokrył powierzchnię szklaną warstwą kwasu tłuszczowego grubości ok. 2 nm. Ponieważ nierówności szkła były znacznie wyższe, warstewka ta nie powinna mieć wpływu na tarcie generowane chropowatością. Efekt pomiaru wskazał jednak spadek współczynnika tarcia z wartości 0,6 do ok. 0,06! Niezwykle, żeby odpowiadała za to zmiana chropowatości [13].

Teoria ta nie jest jednak bezużyteczna. Współcześnie ma ona zastosowanie do opisu tarcia płyt tektonicznych [9, 17] oraz w teoriach tarcia w skali nano – do tarcia atomowego, gdzie rzeczywiście powierzchnię można interpretować po części jako złożoną z twardych kuleczek, pomiędzy którymi występują zagłębienia [20, 21, 22, 23].

### 3. Wpływ adhezji – droga do tradycyjnej teorii tarcia

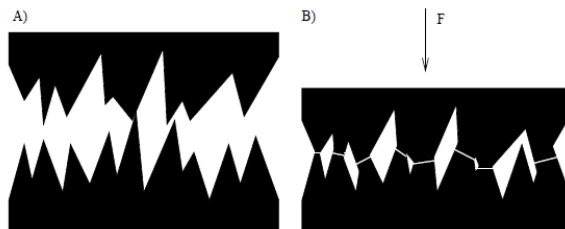
Przedstawione powyżej poglądy uwzględniają tarcie wywołane chropowatością powierzchni. Nie jest to jedyna możliwość. We współczesnej technice obowiązuje adhezyjny model tarcia, wprowadzony w połowie XX wieku przez Bowdena i Tabora [2]. Zanim jednak sformułowali oni swój model tarcia, konieczne było wykonanie pewnych drobnych kroków i spostrzeżeń. Pierwszy taki krok wykonał John Theophilus Desaguliers w 1734. Zauważył on, że „doświadczenie pokazuje, iż dwie płaskie powierzchnie metalu można wypolerować tak

*mocno, że tarcie pomiędzy nimi zaczyna wzrastać. To paradoks mechaniczny: powód jego pojawienia wynika z uwzględnienia przyciągania kohezji pomiędzy metalami, gdy zbliżamy je do siebie w ich połączeniu” [2, 16].*

Desaguliers używając słowa „kohezja”, miał na myśli to samo, co Bowden i Tabor mówiąc o adhezji [2]. Prace nad adhezją zostały, niestety, wstrzymane na 100 lat przez Coulomba w 1781. Rozważając jej wpływ na tarcie uznał, że przeczy prawom Amontonsa (adhezja jest tym silniejsza im większa powierzchnia styku, a tarcie jest niezależne od tej powierzchni) [2, 24, 25]<sup>10</sup>.

Rozwiązanie tej trudności nastąpiło dopiero w 1939 przez Bowdena i Tabora [2, 5, 7, 13, 24, 26, 27]. Teoria ta jest do dziś aktualna i odwołują się do niej nawet współcześni badacze z zakresu „nano”, określając granice jej stosowalności.

Autorzy spostrzegli, że dwa ciała stykają się nie na całej pozornej powierzchni kontaktu  $A$ , lecz tylko na pewnym jej podzbiorze  $A_r$ , gdzie nierówności zachodzą na siebie. Ponieważ  $A_r$  jest stosunkowo małe, ciśnienie wywierane na nierówności  $P = \frac{N}{A_r}$  jest bardzo duże i prowadzi do plastycznych odkształceń materiału. Odkształcanie następuje tak długo, aż sumaryczna powierzchnia  $A_r$  po odkształceniu zmniejszy ciśnienie na nierównościach do wartości krytycznej (zwanej twardością  $H = 3Y$ , gdzie  $Y$  – granica plastyczności, por. rys. 6 oraz ew. ramki 1 i 2, gdzie szczegółowo objaśniono pojęcie twardości).



Rys. 6. Efekt plastycznego płynięcia kontaktów pod obciążeniem. Kontakty przestają być punktowe, a ich powierzchnia zmniejsza naprężenie kontaktowe poniżej granicy plastyczności

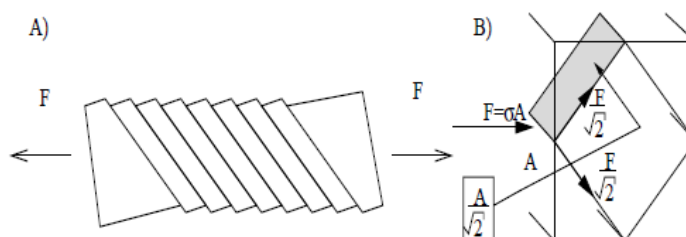
Ostatecznie, sumaryczna powierzchnia kontaktów okazuje się stała<sup>11</sup>, niezależnie od pozornej powierzchni stykających się ciał i wynosi  $A_r = \frac{N}{H}$ . Wprowadzamy więc adhezję bez pogwałcenia drugiego prawa Amontonsa.

<sup>10</sup> Co ciekawe, ten sam Coulomb dwa lata wcześniej, w 1779 wprowadził swój słynny wzór [3, 22]  $F = fN + A$  z członem adhezyjnym  $A$ .

<sup>11</sup> Bowden i Tabor potwierdzili to pomiarami prądu elektrycznego płynącego przez takie mikrokontakty. Opór elektryczny kontaktu jest odwrotnie proporcjonalny do jego powierzchni [2, 23].

Ramka 1

Żeby zrozumieć prawa plastyczności, trzeba mieć wyobrażenie o tym jak zachodzą odkształcenia plastyczne. W próbie rozciągającej cylindra (gdzie wyznaczamy  $Y$ ) odkształcenie wcale nie następuje dzięki naprężeniom normalnym. Naprężenia<sup>a</sup> normalne jedynie indukują naprężenia ścinające, umożliwiające poślizgi płaszczyzn kryształicznych materiału<sup>b</sup>. Ilustruje to rysunek A poniżej (według [7]):



Widać tu, jak ukośne poślizgi powodują efektywne wydłużenie próbki i przewężenie w środku. Nietrudno domyślić się, że na ścinanie ukośnych płaszczyzn kryształu przeznaczana jest tylko część naprężenia normalnego. Wobec tego próg plastyczności dla naprężeń ścinających powinien być mniejszy niż dla naprężeń rozciągających. Rzeczywiście,  $Y_t = 0,5Y$ , gdzie  $Y_t$  to próg naprężeń ścinających.

Relację tę łatwo wyprowadzić z rysunku B): Siła normalna, działająca na próbkę rozchodzi się na elementy ukośne jak pokazano na rysunku. Jeśli siła normalna ma wartość odpowiadającą progowi plastyczności,  $F = AY$ , gdzie  $A$  – przekrój próbki, to składowe ukośne w próbce będą miały wartość  $F_t = \frac{F}{\sqrt{2}}$  (wyliczone np. ze wzoru na przekątną kwadratu). Siła ta działa na nowej powierzchni wewnętrznego sześciangu, której bok ma wartość  $A_t = \frac{A}{\sqrt{2}}$ . W związku z tym, naprężenie ścinające, działające stycznie do powierzchni  $A_t$  wyniesie  $Y_t = \frac{F_t}{A_t} = \frac{1}{2} \frac{F}{A} = \frac{1}{2} Y$  [28].

<sup>a</sup> Pojęcie naprężenia  $\sigma$  określa siłę  $F$ , działającą na zadaną powierzchnię  $A$  ( $\sigma = F/A$ ). Wyróżniamy naprężenia normalne, gdy siła działa prostopadle do powierzchni i ścinające, gdy siła jest równoległa do powierzchni.

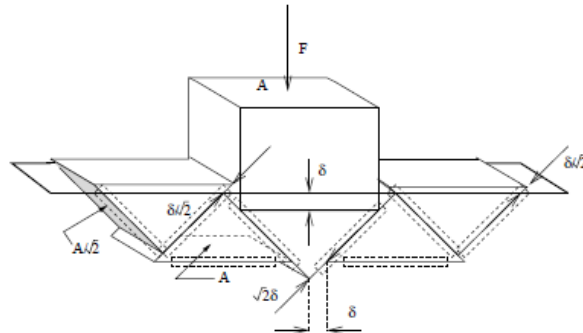
<sup>b</sup> Pod warunkiem, że rozpatrujemy kryształ, ale nie będziemy komplikować i tak złożonego obrazu szczegółami, które niewiele wnoszą do zrozumienia.

<sup>c</sup> Ostatnia równość na mocy założenia, że  $F/A = Y$ , tj. dostarczono siłę wystarczającą do odkształcenia rozważanego sześciangu.



Ramka 2

Materiał z poprzedniej ramki to pierwszy krok do zrozumienia, dlaczego  $H = 3Y$ , tzn. dlaczego materiał wydaje się twardszy niż pokazuje jego granica plastyczności.



Na rysunku powyżej schematycznie pokazane jest wgniatanie nierówności w płaską powierzchnię, zbudowaną z trójkątów<sup>a</sup> prostokątnych o nachyleniu  $45^\circ$  (zgodnym z nachyleniem płaszczyzn największych naprężeń ścinających) i polu podstawy  $A$  (połu ramienia  $A/\sqrt{2}$ ). Aby nastąpiło plastyczne odkształcenie, wszystkie poruszające się ścianki trójkątów (linie przerywane na rysunku) muszą osiągnąć granicę plastyczności. To powód, dla którego  $H > Y$ : nie wystarczy uplastycznianie ścianek jednego trójkąta. Siłę  $F$  konieczną do takiego odkształcenia można znaleźć z warunku na pracę: jeśli siła  $F$  wgnia trójkąt na odległość  $\delta$ , praca ta musi być równa sumie prac wykonywanych przez siły ścinające działające na każdej ślizgającej powierzchni na przesuwaniu trójkątów między sobą (siły te równe są na każdym boku naprężeniu ścinającemu granicy plastyczności –  $Y/2$ ). Uzyskujemy:

$$F\delta = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \delta \cdot \frac{Y}{2} \frac{A}{\sqrt{2}} + 4 \cdot \frac{\delta}{\sqrt{2}} \cdot \frac{Y}{2} \frac{A}{\sqrt{2}} + 2 \cdot \delta \cdot A \frac{Y}{2} \quad (2.1)$$

skąd widać,  $\frac{F}{A} = H = 3Y$  [29].

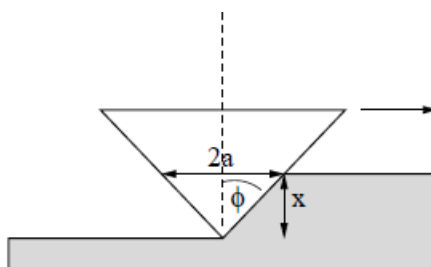
<sup>a</sup> Ściśle: graniastosłupów.

Dysponując stałą powierzchnią  $A_r$ , Bowden i Tabor postulowali, że siła tarcia pochodzi ze ścinania połączeń adhezyjnych między materiałami. W pierwszej ramce ustaliliśmy, że naprężenie ścinania wiąże się z granicą plastyczności relacją  $Y_t = 0,5Y$ . W związku z tym, możemy oczekiwać siły tarcia

$$F = Y_t \cdot A_r = \frac{0,5YN}{3Y} = \frac{1}{6}N; \quad A_r = \frac{N}{H} = \frac{N}{3Y} \quad (1)$$

co jest wynikiem trochę mniejszym niż uzyskany przez Amontonsa i Leonarda, ale rozsądnym w pierwszym przybliżeniu (Problem pojawia się, gdy rozpatrujemy tarcie metali w próżni. Tam, po oczyszczeniu powierzchni metalu z tlenków i zanieczyszczeń, osiągnęte są współczynniki tarcia nawet na poziomie  $\mu = 40$ . Co na to poradzić? Jak rozciągnąć teorię na zakres takich wartości?).

Istnieje kilka możliwości. Po pierwsze, Bowden i Tabor wprowadzili pojęcie złożenia [3, 7], tzn. wydzierania twardymi nierównościami jednego materiału rowków na drugim materiale. Do wykonania tej czynności potrzebne jest doprowadzenie kontaktu z miękkim materiałem do granicy plastyczności, a więc nierówność musi wyrzeć na nim naprężenie  $3Y$  (rys. 7). Przekrój czołowy rowka jest trójkątny, więc jego pole powierzchni  $A_{rr} = ax = a^2 \text{ctg } \varphi$ . Dla takiej powierzchni, siła tarcia równa jest  $F_r = A_{rr}H = H a^2 \text{ctg } \varphi$ .



Rys. 7. Wydrapywanie rowka twardą nierównością w miękkiej powierzchni

Aby wyznaczyć współczynnik tarcia, musimy wiedzieć, jaka jest siła nacisku na powierzchnię. W górnej części stożka mamy powierzchnię kołową

$A_{up} = \pi \frac{a^2}{4}$ , skąd nacisk obciążonej połowy stożka  $L = \frac{HA_{up}}{2} = H\pi \frac{a^2}{2}$ . Dysponując naciskiem  $L$  i siłą tarcia  $F_r$ , obliczamy współczynnik tarcia jako:

$$\mu = \frac{F_r}{L} = \frac{2}{\pi} \text{ctg } \varphi \quad (2)$$

dla typowych nierówności spotykanych w pomiarach mamy  $\varphi > 80^\circ$ , więc  $\mu \sim 0,1$ .

Wciąż za mało!!! Co tu zrobić? Są jeszcze dwie odpowiedzi na to pytanie. Po pierwsze, pomiędzy stykającymi się powierzchniami zachodzi efekt umocnienia (ang. *work hardening*) [3, 7]. Najbardziej narażona na odkształcenia jest warstwa powierzchniowa metalu i dość szybko wyczerpuje ona możliwości korzystania z ułatwień w poślizgu płaszczyzn materiału. Takimi ułatwieniami są dyslokacje, zanieczyszczenia powodujące wewnętrzne naprężenia materiału. Po ich usunięciu, pozostaje samodzielnie włożyć ciężką pracę w wywołanie pełnych naprężeń ścinających.

Można powiedzieć: co z tego? Materiał jest twardszy, ale maleje powierzchnia kontaktu i efekt się kasuje, dając znów uniwersalną wartość współczynnika tarcia. Ale nie do końca! Powierzchnia kontaktu wciąż może się powiększać przez płynięcie głębszych warstw materiału. Natomiast odporność na ścinanie złącz adhezyjnych jest silnie zależna od właściwości powierzchniowych. Tak więc czynnik  $0,5Y$  z równania (1) zastępujemy nowym,  $0,5Y_1$ ,  $Y_1 > Y$ . To generuje wzrost siły tarcia.

Nie jest to jedyna możliwość zwiększania dostępnego tarcia. Kolejną taką możliwością jest wzrost powierzchni złącza na skutek przyłożenia naprężenia ścinającego (np. podczas ślizgania czy prób rozpoczęcia ruchu w tarciu statycznym). W takim przypadku, początkowe naprężenie jest na granicy plastyczności  $\sigma_y = P_0$ . Po przyłożeniu naprężenia ścinającego, warunek granicy plastyczności się zmienia i wyraża za pomocą:

$$\sqrt{\sigma_y^2 + 4\tau_{xy}^2} = P_0 \quad (3)$$

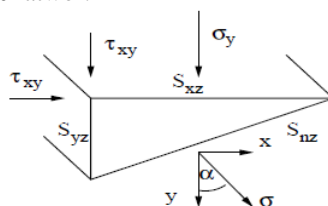
(wyprowadzenie wzoru – ramka 3). Naprężenie ścinające działa na tej samej powierzchni  $A$  co naprężenie  $\sigma_y$ , więc możemy wyciągnąć  $A$  przed pierwiastek i obliczyć powierzchnię:

$$A = \frac{\sqrt{L^2 + 4F_t^2}}{P_0} \quad (4)$$

gdzie  $L$  to siła nacisku, a  $F_t$  to siła ścinająca. Widzimy znaczne możliwości wzrostu powierzchni kontaktu, a przez to i siły tarcia.

### Ramka 3

Skąd bierze się wzór na naprężenie główne<sup>a</sup> (wzór (4)) w obecności naprężenia ścinającego? Uzasadnimy ten wzór w przybliżeniu dla małych kątów odkształcenia, kiedy można to zrobić dość łatwo<sup>b</sup>.



Na rysunku przedstawione są dwie powierzchnie w układzie kartezjańskim, poddane działaniu naprężeń  $\sigma_y$  i  $\tau_{xy}$ <sup>c</sup>. Interesuje nas, jakie naprężenie normalne  $\sigma$  powstanie na płaszczyźnie ukośnej. W tym celu musimy najpierw obliczyć składowe  $x$  i  $y$  naprężenia  $\sigma$  działającego na powierzchni ukośnej. Z trygonometrii widać, że zachodzą relacje między polami:  $S_{yz} = S_{nz} \sin \alpha$ ,  $S_{xz} = S_{nz} \cos \alpha$ . Zapiszmy warunek równowagi sił na trójkącie:

$$xS_{nz} = \tau_{xy}S_{xz} \quad (3.1)$$

$$yS_{nz} = \sigma_y S_{xz} + \tau_{xy}S_{yz} \quad (3.2)$$

(zwracamy uwagę, że naprężenie ścinające działa na stycznej powierzchni, nie prostopadłej!). W powyższym wzorze po podstawieniu relacji trygonometrycznych można skrócić  $S_{nz}$  i dostać wzory na naprężenia  $x$  i  $y$ . Dysponując nimi, można następnie obliczyć naprężenie normalne na płaszczyźnie ukośnej:

$$\sigma_n = x \sin \alpha + y \cos \alpha \quad (3.3)$$

$$\sigma_n = \sigma_y \cos \alpha + 2\tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha \quad (3.4)$$

Aby znaleźć układ, w którym nie ma naprężeń ścinających, szukamy tego, w którym  $\sigma_n \rightarrow \max$ . A więc liczymy pochodną i przyrównujemy do zera:

$$-2\sigma_y \cos \alpha \sin \alpha + 2\tau_{xy}[\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha] = 0 \quad (3.5)$$

Dwa ostatnie równania przybliżamy dla małych kątów,  $\sin \alpha \approx \alpha$ ,  $\cos \alpha \approx 1$ :

$$\sigma_n = \sigma_y + 2\tau_{xy}\alpha \quad (3.6)$$

$$0 = -2\sigma_y\alpha - 2\tau_{xy}\alpha^2 + 2\tau_{xy} \quad (3.7)$$

Rozwiązując trójmian kwadratowy i wstawiając obliczone  $\alpha$  do wzoru na  $\sigma_n$ , uzyskujemy ostatecznie:

$$\sigma = \sqrt{\sigma_y^2 + 4\tau^2} \quad (3.8)$$

<sup>a</sup> Naprężenie główne, to naprężenie znajdujące się w układzie odniesienia, w którym brak naprężeń ścinających.

<sup>b</sup> Uproszczenie wykonane przez autora.

<sup>c</sup>  $\tau_{xy}$ , co widać na rysunku, zawsze działa parami: inaczej badany element zaczął by wirować.

#### 4. Nierówności sprężyste

Do tej pory rozpatrywaliśmy nierówności, które pod obciążeniem płyną plastycznie. Nie zawsze tak się zdarza, istnieją bowiem materiały, w których zamiast odkształceń plastycznych mamy do czynienia z odkształceniami sprężystymi. Guma jest tu najbardziej znanym przykładem takiego materiału [30], a siła tarcia gumy skaluje się jak  $F \sim N^{2/3}$  (czyli niezgodnie z prawami Amontonsa).

Co ciekawe, z czasem odkryto wiele materiałów *spełniających* prawa Amontonsa, które pracują w zakresie odkształceń elastycznych (zmierzona powierzchnia rzeczywistego kontaktu jest zbyt duża by wywołać odkształcenie plastyczne) [31]. Tę sytuację wyjaśnili Greenwood i Williamson dopiero w 1966 roku [7]. Nim jednak zajmiemy się takimi szczegółami, warto zapoznać się z teorią odkształceń sprężystych, występujących między stykającymi się powierzchniami sferycznymi, o wypadkowym promieniu krzywizny  $R$ , zaproponowaną przez Hertza [7, 28, 32].

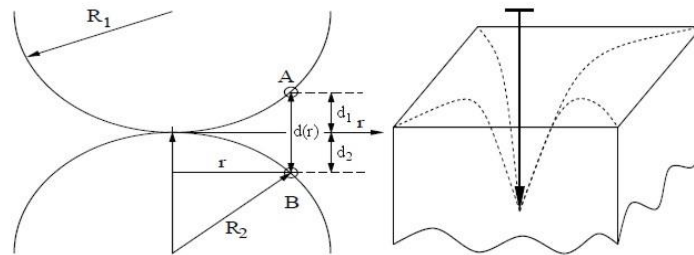
Teoria Hertza wyprowadzana została przez niego w wieku 22 lat „z nudów” podczas przerwy świątecznej w 1882 roku<sup>12</sup> [28]. Szczegóły tego wyprowadzenia są dość złożone (szkic w ramce 4), ale najważniejszy wniosek teorii jest następujący:

$$a = \left( \frac{3}{4} \frac{RL}{E} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (5)$$

gdzie:  $a$  – promień kontaktu między powierzchniami,  $L$  – nacisk na powierzchnię,  $E$  – moduł Younga. Z równania płynie niezwykle ważny wniosek: dla odkształceń sprężystych, powierzchnia styku skaluje się z obciążeniem jak  $A = \pi a^2 \sim L^{\frac{2}{3}}$ ! To zupełnie inaczej niż w teorii plastycznej, gdzie  $A \sim L$ .

#### Ramka 4

Aby wyprowadzić relację Hertza, potrzebujemy informacji o deformacji dwóch stykających się powierzchni sferycznych. Ilustracji tego problemu służy rys. poniżej z lewej strony.



Jeśli dwie elastyczne kule, spoczywające początkowo na sobie, zostaną ściśnięte to utworzy się kontakt. Jak mocno trzeba odgiąć wierzchołek kuli, aby utworzyć kontakt o promieniu  $r$ ? Jaka jest spoczynkowa odległość punktów A i B z rysunku? Odległość można wyznaczyć z tw. Pitagorasa (trójkąt zaznaczony na dolnej półkuli):

$$R_2^2 = r^2 + (R_2 - d_2)^2 = r^2 + R_2^2 - 2R_2d_2 + d_2^2 \approx r^2 + R_2^2 - 2R_2d_2 \quad (4.1)$$

ostatnie przybliżenie można zrobić gdyż  $d_2 \ll R_2$ . Stąd,  $d_2 \approx \frac{r^2}{2R_2}$ . Podobnie, dla

górnjej półkuli,  $d_1 \approx \frac{r^2}{2R_1}$ , a  $d(r) = d_1 + d_2 = \frac{r^2}{2R}$ , gdzie promień zastępczy

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

<sup>12</sup> Warto zwrócić uwagę, że Coulomb nie mógł mieć o niej pojęcia formułując swój model sprężysty.

Interesuje nas następnie, jaki rozkład odkształcenia sprężystego powierzchni jest konieczny aby zbliżyć półkule do siebie o  $\delta$ ? Odpowiedź to  $w(r) = \delta - d(r) = \delta - \frac{r^2}{2R}$ .

To ważny rezultat, gdyż w teorii sprężystości możemy powiązać rozkład odkształcenia z rozkładem ciśnienia na powierzchni kontaktu. Z kolei dysponując ciśnieniem, możemy wyznaczyć relację Hertza między powierzchnią kontaktu a obciążeniem.

Aby znaleźć związek ciśnienia z odkształceniem, musimy spojrzeć na rys. po prawej. Pokazany tam jest schematycznie gwóźdź wbity w sprężystą powierzchnię. Widać, że odkształcenie pojawia się również poza obszarem oddziaływania ciśnienia (naciśku gwóźdźa) i ma kształt, na oko, hiperboliczny!

Teoretycznie można wykazać (teoria Boussinesq), że istotnie, rozkład odkształcenia przyjmuje postać:

$$w(r) = \frac{1}{\pi E} \frac{L}{r} \quad (4.2)$$

gdzie  $E$  – moduł Younga,  $L$  – obciążenie w punkcie. Jeśli obciążenie  $L$  wyrazić za pomocą ciśnienia na powierzchni  $dxdy$ , uzyskamy  $w(r) = \frac{1}{\pi E} \frac{p(x, y)dxdy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ .

Można zatem odgadnąć, że gdy mamy do czynienia z ciągłym rozkładem ciśnienia na danej powierzchni, to odkształcenie w punkcie  $(x, y)$  będzie sumą odkształceń, generowanych przez ciśnienia każdego punktu powierzchni. Napiszemy:

$$w(r) = \frac{1}{\pi E} \iint_S \frac{p(x', y')dxdy}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} \quad (4.3)$$

„można łatwo pokazać”, że dla naszego  $w(r)$ <sup>a</sup>, że rozwiązaniem tego równania jest

$$p(r) = p_0 \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}} \quad (4.4)$$

gdzie  $a$  to *promień kontaktu*, a  $p_0 = \frac{2Ea}{\pi R}$ . Jeśli scałkować to ciśnienie po całym kontakcie, to dostaniemy obciążenie normalne,

$$L = \int_0^a p(r)2\pi r dr = \frac{2}{3}p_0\pi a^2 = \frac{4}{3} \frac{Ea^3}{R} \quad (4.5)$$

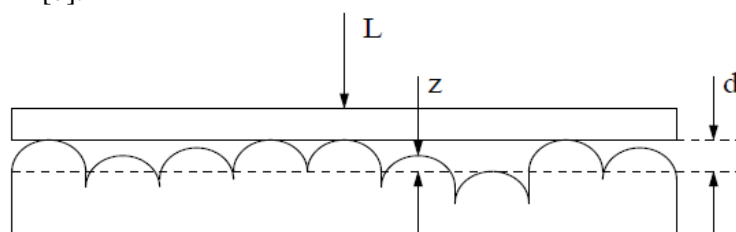
skąd już prosta droga do relacji Hertza. Omówienie teorii Hertza wypada jeszcze zakończyć typowym pytaniem: a co wy porabiacie w święta?

<sup>a</sup> Koszmarne rachunki (wersja skrócona, bez szczegółów obliczania całek) dostępne online przez Google Books w monografii Johnsona, s. 59.

Jest to duży kłopot, gdyż w modelu adhezyjnym siła tarcia jest proporcjonalna do powierzchni. Znaczyłoby to, że w kontakcie sprężystym, siła tarcia nie

spełnia praw Amontonsa i zamiast do  $L$  jest proporcjonalna do  $L^{\frac{2}{3}}$ . O ile jest to prawda w przypadku materiałów takich jak guma, to istnieje wiele materiałów, które odkształcają się sprężyste, a mimo to spełniają prawa Amontonsa [31].

Rozwiązaniem tego problemu jest model Greenwooda-Williamsona, w którym zakłada się, że nierówności mają pewien rozkład wysokości swojego położenia (rys. 8). W takim przypadku, w miarę zwiększania nacisku  $L$ , nie zachodzi jedynie sprężyste odkształcenie wierzchołków  $A \sim L^{2/3}$ . W miarę postępowania odkształcenia, górna powierzchnia zaczyna być podpierana *nowymi* nierównościami dolnej powierzchni. To zaburza skalowanie, a przy odpowiednim rozkładzie wysokości nierówności – prowadzi do amontonsowskiej zależności  $A \sim L$  [7].



Rys. 8. Model Greenwooda-Williamsona.  $L$  – obciążenie,  $d$  – odległość między powierzchniami,  $z$  – wysokość nierówności

Greenwood i Williamson założyli rozkład wysokości nierówności  $z$  (rys. 8) w postaci funkcji wykładniczej,  $\psi(z) = M \exp(-z/\sigma)$ , gdzie  $M$  to stała normująca,  $\sigma$  to współczynnik chropowatości (odchylenie standardowe rozkładu).

Typowa prezentacja modelu Greenwooda Williamsona [7] polega na zapisaniu (bez dowodu) formuł na średnie pole kontaktu, a następnie podzieleniu obciążenia  $L$  przez to pole by wykazać, że ciśnienie kontaktowe w tym modelu jest stałe. Ponieważ nie chcę, by czytelnik musiał w cokolwiek wierzyć na słowo, my postąpimy inaczej: nie wyprowadzimy ostatecznych wzorów, a zatrzymamy się na etapie, gdzie można pokazać niezależność ciśnienia od powierzchni<sup>13</sup>.

Aby rozpocząć obliczenia, trzeba wspomnieć wzór Hertza (5). Przekształcając go, uzyskujemy wzór na  $L$ ,

$$L = \frac{4}{3} \frac{Ea^3}{R} = \frac{4}{3} E \sqrt{R} 2^{3/2} d_2^{3/2} = C_1 d_2^{3/2} \quad (6)$$

gdzie  $a = \sqrt{2Rd_2}$  (ramka 4), a  $C_1 = \frac{4}{3} E \sqrt{R} 2^{3/2}$  jest stałą upraszczającą zapis.

Równanie to wiąże odkształcenie wierzchołka z jego obciążeniem. Całkowite

<sup>13</sup> Oryginalne uproszczenie wyprowadzeń wprowadzone przez autora.

obciążenie, niesione przez wszystkie  $N$  wierzchołków stykających się z górną powierzchnią ( $z > d$ ) wyrażamy średnią po rozkładzie  $\psi$ :

$$\begin{aligned} L &= NC_1 \int_d^\infty (z-d)^{3/2} \psi(z) dz = NC_1 \int_0^\infty t^{3/2} \psi(t+d) dt = \\ &= NC_1 \exp\left(-\frac{d}{\sigma}\right) \int_0^\infty t^{3/2} \psi(t) dt = NC_1 \exp\left(-\frac{d}{\sigma}\right) E[t^{3/2}] \end{aligned} \quad (7)$$

W drugiej linijce wykorzystaliśmy fakt, że  $\psi(t)$  jest funkcją wykładniczą i można rozbić  $\exp[-(t+d)/\sigma] = \exp(-t/\sigma) \exp(-d/\sigma)$ . W ten sprytny sposób powodujemy, że całka nie jest zależna od  $d$  (stopnia zbliżenia powierzchni, wyrażającego zależność od  $L$ , tym większego im większe  $L$ ). Zależność od  $d$  można wyjąć przed nawias. Sama całka natomiast, nie będąc zależną od żadnego parametru, staje się zwyczajną liczbą (pewną stałą, momentem  $E[\cdot]$ <sup>14</sup> rozkładu chropowatości).

W podobny sposób można policzyć sumaryczną powierzchnię kontaktu przy zadanym „ściśnięciu”  $d$ . Pole pojedynczego kontaktu to  $\pi a^2 = 2\pi R d_2 = C_2 d_2$  (znów,  $C_2$  to stała wprowadzona by nie pisać wciąż  $2\pi R$ ). Sumaryczny kontakt obliczamy jako:

$$\begin{aligned} A &= NC_2 \int_d^\infty (z-d) \psi(z) dz = NC_2 \int_0^\infty t \psi(t+d) dt = \\ &= NC_2 \exp\left(-\frac{d}{\sigma}\right) \int_0^\infty t \psi(t) dt = NC_2 \exp\left(-\frac{d}{\sigma}\right) E[t] \end{aligned} \quad (8)$$

Dzieląc  $L$  przez  $A$ , uzyskujemy średnie ciśnienie kontaktów

$$P = \frac{C_1 E[t^{3/2}]}{C_2 E[t]} = \text{const} \quad (9)$$

A więc dostajemy proporcjonalną do obciążenia zależność powierzchni styku. Uratowaliśmy teorię adhezyjną! Siła tarcia adhezyjnego jest przecież proporcjonalna do tej powierzchni i wobec tego jest proporcjonalna do obciążenia, zgodnie z prawami Amontonsa.

## 5. Tarcie gumy

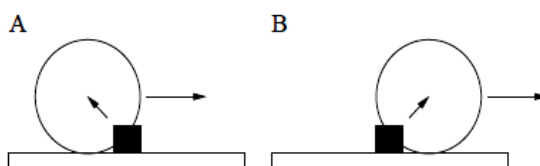
Guma jest materiałem, który łączy w sobie przewidywania modelu Hertza i Bowdena Tabora [30]. Siła tarcia w przypadku tego materiału zależy bowiem od nacisku jak  $F \sim N^{2/3}$ . Jeśli zapisać równanie na siłę tarcia z użyciem współczynnika  $\mu$ , dostaniemy  $F = \mu N$ ,  $\mu = \mu_0 N^{-1/3}$ , tj. współczynnik tarcia dla gumy maleje ze wzrostem obciążenia. Dlatego samochody wyścigowe używają szerokich opon.

<sup>14</sup>  $n$ -tym momentem rozkładu nazywamy całkę  $\int_{-\infty}^{\infty} x^n \psi(x) dx$ .



Tarcie adhezyjne w przypadku gumy nie wyczerpuje jednak wszystkich możliwości. Drugim istotnym wkładem do siły tarcia, szczególnie w przypadku opon, jest mechanizm deformacyjny. Guma, napotykając na drodze na nierówności, odkształca się na nich sprężyście, lecz z uwagi na duże tarcie wewnętrzne<sup>15</sup> [2], powrót ze stanu odkształcenia nie jest natychmiastowy.

Z powodu tej bezwładności odkształceń, na gumę trzeba podziać siłą przy „nacieraniu” na nierówność, ale po jej minięciu, guma nie potrafi sprężyście od niej odskoczyć i „odzyskać” energii (rys. 9).



Rys. 9. Ilustracja tarcia deformacyjnego dla gumowej opony, mijającej nierówność. W przypadku A, pojawia się siła hamująca, a po minięciu nierówności (B) przeszkoda na drodze przyspiesza ruch pod warunkiem, że opona elastycznie powraca do stanu wyjściowego. Jeśli ten proces jest utrudniony, pojawia się tarcie

Warto zauważyć, że w przypadku obecności smaru między gumą a nawierzchnią, mechanizm deformacyjny tarcia daje główny wkład do siły tarcia gumy. Takim smarem w przypadku opon samochodowych może być np. wilgoć na drodze.

## 6. Ruch przerywany (*stick-slip*)

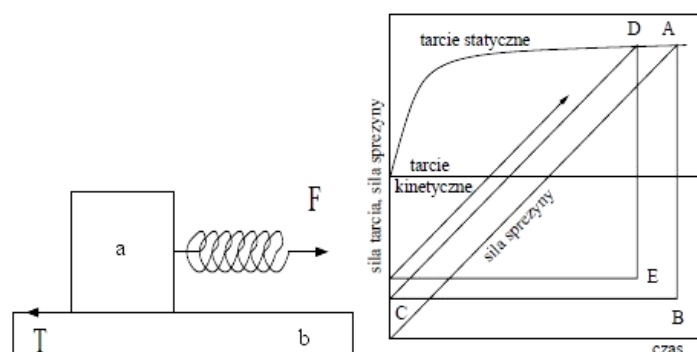
Jeżeli tarcie kinetyczne jest mniejsze od tarcia statycznego, w ruchu ciał można oczekiwać tzw. ruchu przerywanego (*stick-slip motion*) [2, 7]. Istnieje kilka wariantów tego ruchu [7], np. poślizg sterowany prędkością, czasem, przemieszczeniem. Różnią się one sposobem modelowania przejścia od tarcia przy prędkości zerowej do tarcia kinetycznego przy niezerowej prędkości  $v$ .

Podstawowy model ruchu przerywanego pokazuje rys.10 po lewej [2]. W tym modelu zakładamy, że ciało pociągane jest za pomocą sprężyny, przenoszącej z zewnątrz siłę  $F$ <sup>16</sup>. Do momentu osiągnięcia przez  $F$  wartości siły tarcia statycznego, ciało  $A$  pozostaje w bezruchu. Po przekroczeniu tej bariery, ciało  $A$  zaczyna gwałtownie przyspieszać. Jeśli przyspieszając ciało zmniejsza naprężenie sprężyny (np. gdy prawy koniec sprężyny porusza się ze stałą prędkością), to naprężenie może opaść poniżej wartości siły tarcia kinetycznego,

<sup>15</sup> Tarcie pomiędzy cząsteczkami polimeru tworzącego gumę.

<sup>16</sup> Ponieważ nie ma w rzeczywistości ciał doskonale sztywnych, model ten jest jak najbardziej realistyczny.

a wtedy ruch ustaje. Znow trzeba czekać, aż sprężyna się rozciągnie i da możliwość pokonania tarcia statycznego.



Rys. 10. Model ruchu przerywanego. Po lewej model pomiarowy, po prawej – ruch sterowany czasem

Powyższy model jest szczególnym przykładem ruchu sterowanego prędkością. Zależnie od wartości prędkości zmienia się siła tarcia. W ogólności, zależność siły tarcia od prędkości nie musi być bistabilna, jak powyżej, a może zmieniać się jak dowolna malejąca z prędkością funkcja ciągła (np. funkcja liniowa [7]).

Innym modelem ruchu przerywanego jest ruch sterowany czasem (rys. 10 po prawej [7]). W takim przypadku, po rozpoczęciu doświadczenia, tarcie statyczne narasta od wartości tarcia kinetycznego do punktu *A*. Z kolei siła sprężystości (przy stałej szybkości rozciągania) rośnie prostoliniowo od zera do punktu przecięcia z siłą tarcia statycznego (punktu *A*). W tym momencie następuje poślizg. Ciało zaczyna przyspieszać i zatrzymuje się przy rozciągnięciu sprężyny poniżej wartości tarcia kinetycznego<sup>17</sup>, w punkcie *B*. Od tego momentu rozpoczyna się kolejny cykl narastania wartości tarcia statycznego i siły sprężystości (z jedną różnicą: siła sprężystości nie narasta tym razem od zera). Po osiągnięciu przez siłę sprężystości wartości siły tarcia statycznego mamy kolejny poślizg itd., cykl się powtarza wielokrotnie w ciągu ruchu.

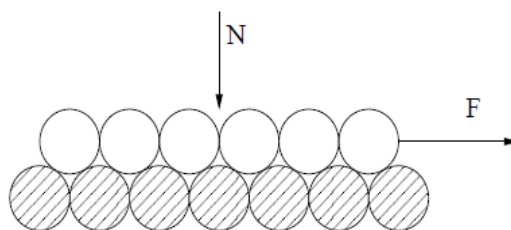
Najbardziej znanym „codziennym” przykładem ruchu przerywanego jest ruch kiepskich piór wycieraczek po szybie samochodu. Często też taki rodzaj ruchu można zaobserwować u rowerzystów ze źle wyregulowanymi hamulcami („głośne” hamulce).

<sup>17</sup> Poniżej, bo tarcie kinetyczne musi zrównoważyć nie tylko siłę sprężystości, ale i bezwładność.

### 7. Atomowe modele tarcia – wprowadzenie

Rozważania prowadzone do tej pory uwzględniały wiele różnych aspektów tarcia, ale były to raczej teorie ciągłe, nie zakładające atomowej struktury materii. W takiej ciągłej teorii możliwe jest wyobrażenie sobie sytuacji, w której mamy do czynienia z dwiema idealnie wypolerowanymi powierzchniami. Jeśli przemieścimy je względem siebie, ich stan energetyczny nie ulega żadnym chwilowym zmianom i nie potrzeba wykonać pracy przeciw żadnym siłom [7]. Tymczasem jeśli uwzględnić atomową strukturę materii okazuje się, że powierzchnie muszą poruszać się w periodycznym potencjale sił związanym z siecią atomową. Potrzeba więc włożyć pewną pracę, by wspiąć się na zbocze potencjału, a następnie przy zejściu z takiego zbocza część uzyskanej energii tracimy. Z tej przyczyny obecnie postuluje się, że ciągłe modele tarcia załamują się w skali atomowej [20, 33].

W skali atomowej koncepcja odkształcania nierówności traci swój zasadniczy sens i, co już sygnalizowaliśmy we wstępie historycznym, bardziej adekwatne stają się modele wyjaśniające tarcie na gruncie teorii chropowatości. Jednym z pierwszych takich modeli jest model kostki brukowej (ang. *cobblestone model* [7]), będący ukłonem w kierunku pracy Belidora z 1737. Deriagin [22] zaproponował w ramach tego podejścia model tarcia pokazany na rys. 11.



Rys. 11. Atomowy model tarcia Deriagina

Siła tarcia równa jest tu  $F = f_0(N + N_0)$ .  $N$  to nacisk wynikający z obciążenia, a  $N_0$  to dodatkowa siła wynikająca z oddziaływania molekularnego.  $f_0$  wyraża tangens największego kąta znajdującego się na trajektorii środka ciężkości poruszającej się powierzchni.

Co ciekawe widać stąd, że amontonsowski współczynnik tarcia  $\mu = \frac{F}{N}$  nie jest stały, ale rośnie<sup>18</sup> gdy  $N \rightarrow 0$ .

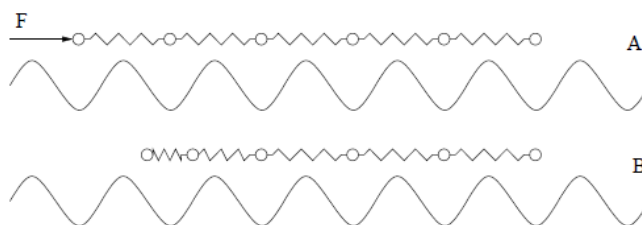
Rozważając model Deriagina, nietrudno przypomnieć sobie argumentację Lesliego [2] odnośnie konieczności wytracania energii podczas ruchu po nierównościach. Skoro w skali atomowej trudno niekiedy mówić o plastycznym

<sup>18</sup> Do nieskończoności!

odkształcaniu (np. w ruchu po gładkiej w skali atomowej powierzchni rozłupanej miki), to czym wyjaśnić straty energii? Odpowiedzią są *fonony* [23, 33]. Powierzchnie opadając w doliny nierówności wzbudzają atomy do drgań mechanicznych, generujących fale dźwiękowe, zamieniane ostatecznie na ciepło.

### 8. Model Frenkel-Kontorova-Tomlinsona

W 1929 roku G.A. Tomlinson w Wielkiej Brytanii, a w 1930 Y. Frenkel w Rosji, prowadzili badania nad ruchem atomów jednej powierzchni w potencjale generowanym przez drugą powierzchnię. Stworzyli oni dwa modele, operujące w podobnym formalizmie. Prezentowany tutaj – skonstruowany został przez Frenkela<sup>19</sup> (rys. 12A) [7].



Rys. 12. Atomowy model tarcia Frenkela-Kontorova

Na rysunku w dolnej części pokazano potencjał dolnej powierzchni, natomiast u góry znajdują się atomy górnej powierzchni. Atomy górnej powierzchni połączone są między sobą sprężynkami, które odzwierciedlają siły przyciągania-odpychania<sup>20</sup> występujące pomiędzy nimi.

Aby górną powierzchnię wprowadzić w ruch, należy przyłożyć do niej siłę  $\vec{F}$ . Spowoduje ona kompresję pierwszej sprężynki i przeskok atomu do drugiej studni potencjału. Teraz dwa atomy będą rozpychać się w obrębie jednej studni potencjału (rys. 12B). Efektywnie obniża to barierę potencjału, którą musi pokonać atom-sąsiad by z niej wyskoczyć. W ten sposób następuje szybka propagacja zaburzenia na drugi koniec styku i znów każdy atom leży w jednej studni potencjału.

Co dzieje się, jeśli stykają się materiały o niejednakowej sieci krystalicznej? Wówczas może się zdarzyć, że na skutek niedopasowania wymiarów przestrzennych sieci krystalicznej, w niektórych studniach z konieczności będą znajdowały się po dwa atomy (jak na rys. 12B, lecz bez przyłożenia zewnętrznej siły). W takim przypadku, wewnątrz podwójnie obsadzonych studni poten-

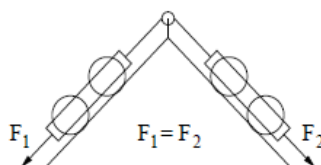
<sup>19</sup> Model Tomlinsona jest podobny, jednak atomy nie są połączone sprężynkami między sobą. Sprężynki atomowe są podłączone do sztywnej zewnętrznej prowadnicy [7]. Właśnie sposób połączenia sprężynek różnicuje te dwa modele.

<sup>20</sup> Np. potencjał typu Lennarda-Jonesa.

cjału pojawiają się naprężenia, obniżające efektywną wysokość bariery do pokonania. Tarcie maleje!

Co ciekawe, jeśli dobierzemy dwie powierzchnie w taki sposób, że ich sieci krystaliczne są zupełnie nieskorelowane ze sobą (ang. *incommensurate*), to możemy oczekiwać ciekawego zjawiska nadsmarowności (ang. *superlubricity*). Efekt ten bierze się stąd, że w takich materiałach nie ma możliwości ustawienia pojedynczych atomów górnej powierzchni nad środkami studni potencjałów powierzchni dolnej. W konsekwencji, sprężynki między atomami muszą być rozciągnięte lub ściśnięte by dopasować się do tej sieci.

Podczas próby poruszenia ciała górnego, należy przyłożyć siłę, która zrównoważy opory ściskania/rozciągania sprężynek międzyatomowych. Okazuje się jednak, że w przypadku nieskorelowanych sieci krystalicznych, dokładnie tyle samo atomów pokonuje drogę „pod górkę” w potencjale, ile opada w nim „na dół”. Wypadkowo, konieczna do zainicjowania ruchu siła okazuje się zerowa (analogicznie jak na poglądowym mechanicznym rys. 13) [7].



Rys. 13. Ilustracja schematu równoważenia sił w modelu FKT

## 9. Podsumowanie

Prezentowany artykuł ma w zamierzeniu przedstawić studentom fizyki (i uczniom szkół średnich, którym jednak zalecam nie zagłębiać się od razu w treść ramek i co bardziej zawiłych wzorów) złożoną tematykę procesów tarcia i pokazać pewien przegląd teorii. Jak widać z pracy, teoria nie jest jednolita i istnieje wiele rozmaitych poglądów na tarcie. Wiele modeli zostało pominiętych z braku miejsca (np. tarcie w obecności smarów, koncepcja tarcia elektronicznego, związana ze zrywaniem ładunków powierzchni, model szczotkowy tarcia), czy z braku informacji o ich istnieniu (nawet pomimo zbadania pokazanej literatury).

Wśród pominiętych problemów znalazł się jeden, do którego chciałbym się jeszcze krótko odnieść<sup>21</sup>: dlaczego w teorii adhezyjnej tarcie statyczne jest wyższe niż kinetyczne? Bowden i Tabor przedstawili wiele pomysłów, z których moim zdaniem najciekawszy polegał na dyfuzyjnym przebijaniu warstwy zanieczyszczeń między powierzchniami w miarę upływu czasu [2].

Na zakończenie warto wspomnieć o współczesnym podejściu do analizy teoretycznej tarcia. Otóż na chwilę obecną nie tworzy się już teorii kompleksowo

<sup>21</sup> Pytali mnie o to kiedyś studenci podczas laboratorium z fizyki.

wyjaśniających tarcie jako zależne od chropowatości, adhezji, itd. Zamiast tego zaprzęga się komputery do symulacji metodą dynamiki molekularnej [20], a następnie włączając/wyłączając potencjały krótko i długozasięgowe próbuje się wyciągać wnioski odnośnie charakteru procesów biorących udział w tarcu między badanymi powierzchniami.

Chcę też dodać uwagę odnośnie wstępu historycznego: jest to tematyka traktowana niezwykle pobieżnie w większości podręczników. Istnieje co prawda monografia Dowsona, jednak najbliższa biblioteka, która ją posiada znajduje się w Niemczech. Starłem się zaprezentować tu historię rozwoju poglądów na tarcie uzgodnioną pomiędzy wszystkimi dostępnymi mi pozycjami literaturowymi.

Mam dużą nadzieję, że ten artykuł stanie się ogólnodostępnym załącznikiem do rozwijania wiedzy o tarcu. Z tej przyczyny w jego przygotowanie włożone zostało wiele pracy. Z cytowanych pozycji literaturowych, najbardziej inspirujące były dla mnie [2, 7, 28, 32], a w dalszej kolejności warto przejrzeć [5, 14, 18, 20, 22, 33]. Proszę ostrożnie podchodzić do pozycji [3] – fragmenty historyczne są tu mało precyzyjne.

## Literatura

- [1] R. Resnick, D. Halliday, *Fizyka*, PWN 1997
- [2] F.P. Bowden, D. Tabor, *Wprowadzenie do trybologii*, WNT 1980
- [3] M. Hebda, A. Wachal, *Trybologia*, WNT 1980. Dostępna online: <http://www.tribologia.org/ptt/try/tr.htm>
- [4] *Słownik wyrazów obcych* online, PWN, <http://swo.pwn.pl>
- [5] J. Wisniak, *Guillaume Amontons*, Revista CENIC Ciencias Quimicas, 36, 187, 2005
- [6] Wikipedia: Isaac Newton
- [7] C.M. Mate, *Tribology on the small scale*, Oxford University Press, 2008
- [8] H.J. Guntherodt, H. Burkhart, M. Guggisberg, T. Gyalog, E. Meyer, *Friction Module*, <http://www.nano-world.org>
- [9] J. Lemaitre, *Handbook of Materials Behaviors Models*, Academic Press, 2001
- [10] R. Capuder, *Microscopic Description of Friction*, [http://mafija.fmf.uni-lj.si/seminar/files/2008\\_2009/microscopic\\_description\\_of\\_friction.pdf](http://mafija.fmf.uni-lj.si/seminar/files/2008_2009/microscopic_description_of_friction.pdf)
- [11] R. Overney, *Introduction to Tribology – Friction*, <http://depts.washington.edu/nanolab/ChemE554/Summaries ChemE 554/Introduction Tribology.htm>
- [12] P. Mascheretti, A. De Ambrosis, L. Borghi, U. Besson, *Breve storia delle ricerche e delle teorie sull'attrito*, <http://fisicavolta.unipv.it/didattica/SeqAttr/DocC.pdf>
- [13] K.C. Ludema, *Friction, Wear, Lubrication*, CRC Press, 1996
- [14] K. Hutchison, *Forces and facts*, Nuova Voltiana, 1, 2000
- [15] E. Meyer, T. Gyalog, R.M. Overney, K. Dransfeld, *Nanoscience: Friction and rheology on nanometer scale*, World Scientific, 1998

- [16] E. Bergli, *A simple model for the physics of surface contact and adhesion*, praca doktorska, Wydział Fizyki, Uniwersytet w Oslo, 2001
- [17] A.N. Schofield, *Behaviour of a soil paste continuum*, University of Cambridge Technical Report, 2000  
[http://www-civ.eng.cam.ac.uk/geotech\\_new](http://www-civ.eng.cam.ac.uk/geotech_new)
- [18] J. Renwick, *Elements of mechanics*, Carey & Lea, 1832  
<http://www.archive.org>
- [19] G. Bartels, *Mesoscopic aspects of friction*, praca doktorska uniwersytetu w Duisburg-Essen (dostępna on-line)
- [20] Y. Mo, K.T. Turner, I. Szulfarska, *Friction Laws at the nanoscale*, Nature, 457, 1116, 2009
- [21] J. Gao, W.D. Luedtke, D. Gourdon, M. Ruths, J.N. Israelachvili, U. Landman, *Frictional Forces and Amontons' Law: From the Molecular to the Macroscopic Scale*, J. Phys. Chem. B, 108, 3410, 2004
- [22] A. Vilde, G. Sevostjanovs, J. Nowak, *Theories of Friction and their Applicability to Soil*, TEKA Kom. Mot. Energ. Roln. – OL PAN, 7, 250, 2007
- [23] A. Berman, J. Israelachvili, *Amontons' law at the molecular level*, Tribology Letters 4, 95, 1998
- [24] E.R. Booser, *CRC Handbook of Lubrication: Theory and Design*, CRC Press, 1983
- [25] D.E. Packham, *Handbook of Adhesion*, Wiley, 2005
- [26] P.J. Blau, *Friction Science and Technology*, CRC Press, 2009
- [27] G.W. Stachowiak, A.W. Batchelor, *Engineering Tribology*, BH, 2001
- [28] S. Timoshenko, J.N. Goodier, *Theory of Elasticity*, McGraw-Hill, 1951
- [29] M.F. Ashby, H. Jones, *Engineering Materials 1*, Elsevier, 2005
- [30] R.H. Smith, *Analyzing friction in the design of rubber products and their paired surfaces*, CRC Press, 2008
- [31] I.L. Singer, H.M. Pollock, *Fundamentals of Friction*, Springer, 1992
- [32] K.L. Johnson, *Contact Mechanics*, Cambridge University Press, 1985
- [33] J. Krim, *Friction at the atomic scale*, Scientific American, październik 1996