Odgłosy z jaskini

Piotr Goldstein
Zakład Fizyki, Narodowe Centrum Badań Jądrowych
Warszawa

W tegorocznym Polsko-Ukraińskim Konkursie Fizycznym „Lwiątko" pojawiło się następujące zadanie dla klasy III licealnej, za pięć punktów (a więc trudne):

21. Ciężarek o masie 100 g, zawieszony na praktycznie nieważkiej nici, porusza się tak, że nić odchyla się od pionu maksymalnie o 60°. Ile co najmniej jest równa wytrzymałość nici? Przyjmij wartość przyspieszenia ziemskiego g = 10 m/s^2.
A. 0,5 N, B. 1 N, C. 1,5 N, D. 2 N,
E. Wynik zależy od tego, czy są to wahania w jednej płaszczyźnie.

To zadanie jest wpadką autorów i recenzentów „Lwiątka". I to pomimo, że zarówno zadanie, jak i podana później odpowiedź E są poprawne.

Intencją autora było sprawdzenie, czy uczestnicy czytają zadania ze zrozumieniem i czy umieją połączyć wiedzę o ruchu wahadła z wiedzą o ruchu jednostajnym po okręgu. Jednym słowem, autor liczył na to, że uczestnik (1) zauważy zawartą w odpowiedzi E sugestię, że ruch nie musi polegać na wahaniach w jednej płaszczyźnie; (2) że potem porówna naprężenie nici dla wahań w płaszczyźnie pionowej z jej naprężeniem, gdy ciężarek zatacza poziome okręgi. W rezultacie przekona się, że te wytrzymałości są różne i wybierze w związku z tym odpowiedź E. Zadanie było pomyślane dla kąta 45°. Niestety autor w ostatniej chwili zdecydował zmienić kąt na – jak się wydawało – łatwiejszy, czyli 60° (jego cosinus nie zawiera pierwiastka). Jak to często bywa, gdy poprawia się coś w ostatniej chwili, autor przeoczył bardzo ważny szczegół: dla kąta 60° (i tylko dla niego!) w obu wymienionych przypadkach naprężenia są jednakowe, równe 2 *N*. Tego faktu nie zauważył ani autor, ani żaden z recenzentów! Zwrócił na to uwagę dopiero wieloletni uczestnik „Lwiątka" Marek Mystkowski z Białegostoku.

Odpowiedź E pozostała poprawna, ale uzyskanie jej stało się bardzo trudne, praktycznie niemożliwe w czasie dostępnym podczas konkursu. Dlatego organizatorzy postanowili – wyjątkowo – uznać uczestnikom dwie odpowiedzi, E i D, nie uznając pozostałych. To pierwsza taka decyzja w dwunastoletniej historii „Lwiątka", ale też pierwszy przypadek, gdy zadanie wymaga nadzwyczajnej akcji ze strony organizatorów, mimo że jest poprawne.

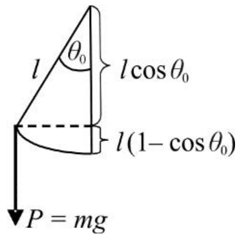
Rozwiążmy najpierw zadanie dla dowolnego kąta, tak jak miało wyglądać w zamyśle autora. Użyjemy typowych oznaczeń – m to masa ciężarka, v – jego prędkość chwilowa, l – długość nici, g – przyspieszenie ziemskie, N – siła naprężająca nić, zwana dalej w skrócie „naprężeniem".

Gdy ciężarek waha się w płaszczyźnie pionowej, to największe naprężenie jest w najniższym punkcie, bo wtedy nić musi zrównoważyć całą siłę ciążenia i nadać ciężarkowi przyspieszenie dośrodkowe (w dodatku przyspieszenie dośrodkowe jest wtedy największe, bo największa jest prędkość ciężarka). II zasada dynamiki ma wtedy postać

$$N - mg = m\frac{v^2}{l} \tag{1}$$

(tę równość można też interpretować w układzie poruszającego się ciężarka jako warunek równowagi trzech sił: naprężenia nici, ciążenia i siły odśrodkowej).

Prędkość w najniższym położeniu możemy znaleźć z prawa zachowania energii. Ponieważ siła naprężająca nić jest prostopadła do kierunku ruchu ciężarka, nie wykonuje ona pracy, więc cała energia potencjalna, jaką wahadło ma przy największym wychyleniu θ_0, zmienia się w energię kinetyczną. Stąd (rys. 1)



Rys. 1

$$mgl(1-\cos\theta_0) = m\frac{v^2}{2}, \tag{2}$$

czyli

$$m\frac{v^2}{l} = 2mg(1-\cos\theta_0). \tag{3}$$

Wstawiając tę wartość do wzoru (1), otrzymujemy w przypadku ruchu płaskiego

$$N = mg + 2mg(1-\cos\theta_0) = mg(3-2\cos\theta_0) \tag{4}$$

Gdy ciężarek zatacza poziome okręgi, najłatwiej obliczyć naprężenie w układzie obracającym się wraz z nim, z warunku równowagi naprężenia nici N, siły ciążenia $P = mg$ i siły odśrodkowej $F_{od} = mv^2/l$ (rys. 2a). Można też zsumować siły w układzie inercjalnym (rys. 2b), żądając, by wypadkowa F_{wyp} sił P i N była skierowana poziomo do środka okręgu.

Rys. 2

W obu przypadkach mamy $\cos\theta = \frac{P}{N}$, skąd

$$N = \frac{mg}{\cos\theta} \tag{5}$$

przy czym przez cały czas $\theta = \theta_0$.

Jak widać, wzory na naprężenie są inne dla ruchu po okręgu niż dla wahań płaskich. Dla kąta 45° mielibyśmy z wzoru (4) $N = (3-\sqrt{2})mg \approx 1{,}59mg$, a z wzoru (5) byłoby $N = \sqrt{2}mg \approx 1{,}41mg$. Tyle powinna wtedy w przybliżeniu wynosić wytrzymałość nici. Ponieważ te dwie wartości są różne, poprawna byłaby odpowiedź E.

Niestety, dla kąta 60° w obu przypadkach dostajemy $N = 2mg$, co przy $m = 100$ g i $g = 10$ m/s^2 daje $N = 2$ N, czyli wskazuje na odpowiedź D. Przyrównując prawe strony dwóch wzorów na naprężenie (4) i (5) i rozwiązując otrzymane równanie trygonometryczne, możemy przekonać się, że w przedziale (0, 90°) te dwa naprężenia są sobie równe tylko dla kąta 60°. Pech!

Jednak nawet dla kąta 60° istnieją ruchy ciężarka, dla których maksymalne naprężenie jest mniejsze od $2mg$. Dzieje się tak zawsze, gdy maksymalnie wychylonemu ciężarkowi nadamy pewną prędkość poziomą, większą od zera, ale mniejszą od prędkości potrzebnej do zataczania poziomych okręgów. Dowód tego jest jednak trudny, na pewno niemożliwy do przeprowadzenia w ciągu paru minut, jakie uczestnik miał przeznaczone na to zadanie podczas konkursu. Dlatego postanowiliśmy uznać również odpowiedź D.

A oto dowód:
W związku z dodatkową prędkością poziomą, oprócz prawa zachowania energii, do wyznaczenia prędkości i naprężenia ciężarka w jego najniższym położeniu (teraz nie będzie to punkt równowagi!) będziemy potrzebowali jeszcze jednego prawa zachowania – jednej ze składowych momentu pędu.

Rozpoczynamy od równania dynamiki Newtona

$$m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a} \tag{6}$$

Dla składowych sił w kierunku nici odchylonej od pionu o kąt θ, wynika równanie

$$N - mg\cos\theta = m\frac{v^2}{l}, \tag{7}$$

ponieważ przyspieszenie ciężarka w kierunku nici jest przyspieszeniem prostopadłym do kierunku ruchu, a więc dośrodkowym (tor ruchu naszego ciężarka jest krzywą na powierzchni sfery l = const).

Stąd $$N = mg\cos\theta + m\frac{v^2}{l}. \tag{8}$$

Drugie równanie dostajemy z prawa zachowania energii (0 w dolnym indeksie odnosi się do maksymalnego wychylenia):

$$mgl(1-\cos\theta_0) + m\frac{v_0^2}{2} = mgl(1-\cos\theta) + m\frac{v^2}{2}, \tag{9}$$

jeśli energię potencjalną mierzymy względem punktu równowagi wahadła (rys. 1). Po odjęciu mgl od obu stron równania (9) dostaniemy prostsze prawo zachowania energii. Można je było otrzymać od razu, gdybyśmy energię potencjalną mierzyli względem punktu zawieszenia (jest ona ujemna)

$$-mgl\cos\theta_0 + m\frac{v_0^2}{2} = -mgl\cos\theta + m\frac{v^2}{2}. \tag{10}$$

Korzystając z tego prawa, możemy wyrazić naprężenie nici odchylonej o kąt θ albo tylko przez kąt odchylenia θ, albo tylko przez prędkość v. Wybieramy to pierwsze. Dzieląc równanie (10) przez l i mnożąc je przez 2, dostajemy wzór na siłę dośrodkową $m\frac{v^2}{l}$. Wynika z niego, po podstawieniu do wzoru (3)

$$N = 3mg\cos\theta - 2mg\cos\theta_0 + m\frac{v_0^2}{l} \tag{11}$$

Jak widać, naprężenie jest największe w punkcie o najmniejszym wychyleniu θ.

Oprócz prawa zachowania energii, skorzystamy z prawa zachowania momentu pędu. Tylko jedna jego składowa jest zachowana, bo w tym kierunku nie działa na ciężarek moment siły. Jest to składowa momentu pędu opisująca obrót wokół osi pionowej przechodzącej przez punkt zawieszenia wahadła. Momenty sił wokół tej osi są równe zeru, bo siła ciążenia jest do niej równoległa, a naprężenie nici działa wzdłuż prostej przechodzącej przez punkt zawieszenia. Oznaczając tę składową momentu pędu przez L_z, dostajemy

$$L_z = mr^2\omega = ml^2 \sin^2\theta\, \omega = ml^2 \sin^2\theta_0\, \omega_0, \tag{12}$$

gdzie r jest promieniem okręgu zataczanego przez ciężarek, czyli odległością ciężarka od osi obrotu, a ω – prędkością kątową tego obrotu.

Aby wykorzystać wzór (12), w prawie zachowania energii rozłożymy prędkość na składową poziomą i pionową. Pierwsza z nich opisuje właśnie obrót wokół osi pionowej i jest równa $r\omega = l\omega \sin\theta$. Druga składowa prędkości, zmienia kąt odchylenia θ (jeśli kropką nad symbolem wielkości fizycznej oznaczamy jej pochodną czasową, to można tę składową zapisać jako $l\dot{\theta}$, ale nie będzie nam to potrzebne). Zauważmy, że zarówno przy maksymalnym, jak i przy minimalnym wychyleniu wahadła, ta składowa prędkości jest równa zero, bo wtedy ciężarek „zawraca". Wyjątkiem jest sytuacja, gdy minimum wychylenia jest przejściem wahadła przez punkt równowagi, przejście to odbywa się z niezerową prędkością. Tak jest dla wahań w płaszczyźnie pionowej.

Rozpatrzmy tę sytuację oddzielnie. Mamy wówczas $L_z = 0$, a przy maksymalnym wychyleniu prędkość chwilowa, $v_0 = 0$. Wzór (11) na naprężenie przybiera wtedy postać

$$N = 3mg\cos\theta - 2mg\cos\theta_0$$

Dla $\theta_0 = 60°$ i $\theta = 0$ (wtedy naprężenie jest największe), mamy

$$N = 3mg - mg = 2mg, \tag{13}$$

Dla ciężarka 100 g, $N = 2$ N, co zgadza się z przewidywaniami.

Z wyjątkiem przypadku przechodzenia przez położenie równowagi, zarówno dla maksymalnego, jak i minimalnego wychylenia pionowa składowa prędkości jest równa zeru, tak że z prędkości v pozostaje tylko składowa pozioma $l\omega\sin\theta$. Prawo zachowania energii ma wtedy postać

$$-mgl\cos\theta_0 + m\frac{l^2\omega_0^2\sin^2\theta_0}{2} = -mgl\cos\theta + m\frac{l^2\omega^2\sin^2\theta}{2}. \tag{14}$$

Z prawa zachowania momentu pędu (12) dostajemy ω jako funkcję kąta θ $\omega = \omega_0 \dfrac{\sin^2\theta_0}{\sin^2\theta}$. Podstawiając tę wartość do prawa zachowania energii (9), dostajemy równanie na kąt θ

$$-mgl\cos\theta_0 + m\frac{l^2\omega_0^2\sin^2\theta_0}{2} = -mgl\cos\theta + m\frac{l^2\omega_0^2\sin^4\theta_0}{2\sin^2\theta}. \tag{15}$$

Oznaczając, dla uproszczenia zapisu, $s = \cos\theta$, $s_0 = \cos\theta_0$, i korzystając z jedynki trygonometrycznej, aby pozbyć się funkcji $\sin\theta$, otrzymujemy równanie

$$-2gs_0 + l\omega_0^2(1-s_0^2) = -2gs + \frac{l\omega_0^2(1-s_0^2)^2}{(1-s^2)}. \tag{16}$$

Mnożąc obie strony tego równania przez mianownik $(1 - s^2)$, przenosząc $-2gs$ na lewą stronę, a $l\omega_0^2\left(1-s_0^2\right)$ na prawą i wyciągając wspólne czynniki przed nawias, otrzymujemy

$$2g(s-s_0)(1-s^2) = l\omega_0^2(1-s_0^2)(s^2-s_0^2). \tag{17}$$

Jak widać, obie strony mają wspólny czynnik $(s-s_0)$, dzięki czemu, równanie trzeciego stopnia można sprowadzić do kwadratowego, dzieląc je przez ten wspólny czynnik, przy założeniu $s \neq s_0$. W związku z tym założeniem, trzeba rozpatrzyć oddzielnie przypadek $s=s_0$ (stałego kąta odchylenia), czyli przypadek zataczania przez ciężarek poziomego okręgu. Ale ten przypadek rozpatrzyliśmy już wcześniej, otrzymując wzór (5).

Jeśli kąt odchylenia nie jest stały, to dzieląc obie strony równania (17) przez $(s-s_0)$, dostajemy równanie kwadratowe na s

$$2g(1-s^2) = l\omega_0^2(1-s_0^2)(s+s_0). \tag{18}$$

Po uporządkowaniu według potęg s, otrzymujemy równanie

$$s^2 + \frac{p}{2}(1-s_0^2)s + \frac{p}{2}(1-s_0^2)s_0 - 1 = 0, \tag{19}$$

gdzie dla uproszczenia zapisu wprowadziliśmy dodatni parametr $p = \frac{\omega_0^2 l}{g}$. Aby prędkość pozioma była mniejsza od prędkości ruchu po okręgu, p powinno być mniejsze od $\frac{1}{\cos\theta_0}$ (sprawdzenie pozostawiamy Czytelnikom).

Wyróżnik

$$\Delta = \frac{p^2}{4}(1-s_0^2)^2 - 2p(1-s_0^2)s_0 + 4 = \left[\frac{p}{2}(1-s_0^2) - 2\right]^2 + 2p(1-s_0^2)(1-s_0)$$

jest zawsze dodatni, ponieważ $s_0 < 1$ jako cosinus kąta różnego od zera (przypadek $\cos\theta = 1$, odpowiadający przejściu przez położenie równowagi, rozpatrzyliśmy oddzielnie wcześniej, por. wzory (4) i (13)). Równanie ma więc dwa rozwiązania.

Fizycznie sensowne rozwiązanie odpowiada dodatniemu s (kąt mniejszy od 90°). Jest ono równe

$$s = -\frac{p}{4}(1-s_0^2) + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p^2}{4}(1-s_0^2)^2 - 2p(1-s_0^2)s_0 + 4} \tag{20}$$

Drugie rozwiązanie różni się znakiem przy wyrazie zawierającym pierwiastek kwadratowy, jest więc ujemne, a zatem niefizyczne: odpowiada odchyleniu nici o kąt większy od 90°, a przy takim odchyleniu nić przestałaby być napięta i nasz opis ruchu byłby nieprawdziwy.

Wracając do pierwotnych oznaczeń (dla wygody zostawimy p)

$$\cos\theta = -\frac{p}{4}\sin^2\theta_0 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p^2}{4}\sin^4\theta_0 - 2p\sin^2\theta_0\cos\theta_0 + 4}. \tag{21}$$

Wstawiając tę wartość $\cos\theta$ do wzoru na naprężenie (11), do którego wstawimy $v_0 = l\omega\sin\theta$ otrzymujemy

$$N = 3mg\left[-\frac{p}{4}\sin^2\theta_0 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p^2}{4}\sin^4\theta_0 - 2p\sin^2\theta_0\cos\theta_0 + 4}\right] - 2mg\cos\theta_0 + mgp\sin^2\theta_0. \tag{22}$$

Dla $\theta_0 = 60°$, wzór (22) przybiera postać

$$N = 3mg\left[-\frac{3}{16}p + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{9}{64}p^2 - \frac{3}{4}p + 4}\right] - mg + \frac{3}{4}mgp. \tag{23}$$

Ciekawe, że gdy podstawimy za p zero (wahania w płaszczyźnie pionowej) lub 2 (ruch po okręgu poziomym), okazuje się, że wyrażenie (23) – wbrew wcześniejszym zastrzeżeniom – pozostanie poprawne również dla takich wahań a także dla ruchu po okręgu. Jak bowiem łatwo zauważyć, dla $p = 0$, mamy $N = 3mg - mg = 2mg$, a dla $p = 2$ dostajemy także $2mg$:

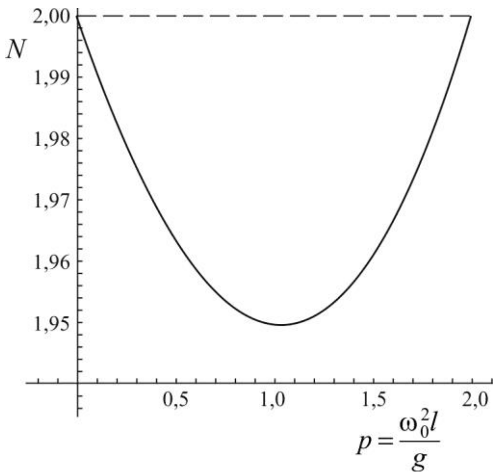
$$N = 3mg\left[-\frac{3}{8} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{9}{16} - \frac{3}{2} + 4}\right] - mg + \frac{3}{2}mg = 2mg.$$

Co więcej, właściwość tę ma rozwiązanie (22) dla dowolnych kątów odchylenia, nie tylko dla 60°, gdy za parametr p podstawimy odpowiednio 0 lub $1/\cos\theta$ (sprawdzenie pozostawiamy Czytelnikom). Można to wytłumaczyć ciągłością N jako funkcji kąta i początkowej prędkości poziomej: gdy nieznacznie zmieniamy parametry ruchu, przechodząc od małych kątów do kąta zero, a także gdy przechodzimy od prędkości poziomych bliskich prędkości ruchu po okręgu do prędkości zapewniającej taki ruch, nie ma skokowej zmiany naprężenia.

Nietrudno obliczyć naprężenie dla wartości pośrednich, $p \in (0; 2)$. Na przykład dla $p = 1$ otrzymujemy

$$N = mg\left(-\frac{13}{16} + \frac{3}{16}\sqrt{217}\right) \approx 1{,}94955.$$

Dokładniejsze zbadanie wyrażenia (23) jako funkcji p (wykres)



wskazuje, że osiąga ona minimum dla $p = \frac{2}{3}\left(4 - \sqrt{6}\right) \approx 1{,}03367$ i że minimum to odpowiada naprężeniu $N = mg\left(-\frac{1}{2} + \sqrt{6}\right) \approx 1{,}4949\,mg$. Dowód pozostawiamy Czytelnikom. Jak widać, nawet gdy najlepiej wybierzemy prędkość początkową i tor ruchu ciężarka, wytrzymałość nici może być tylko niewiele mniejsza od 2 N. Niemniej, różnica istnieje, więc poprawna jest odpowiedź E.

Tak oto, przez nieodpowiedni dobór kąta, proste zadanie zmieniło się w skomplikowane i przestało nadawać się na konkurs „Lwiątko", mimo że pod względem poprawności niczego nie można mu zarzucić.