



## Kąt odchylenia promienia w pryzmacie: wzór ścisły i jego przybliżenia

Jacek Ciborowski\*, Maria Sobol\*\*

\*Uniwersytet Warszawski, Wydział Fizyki

\*\*Warszawski Uniwersytet Medyczny, Zakład Biofizyki i Fizjologii Człowieka

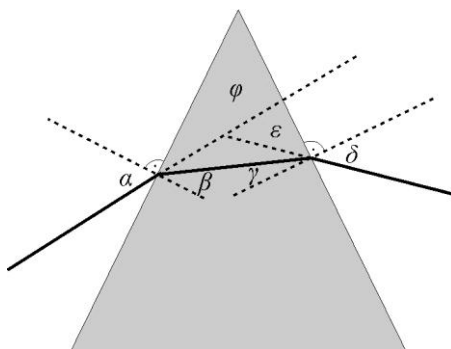
W szkole wyprowadzano następujący, przybliżony wzór na kąt odchylenia  $\varepsilon$ , promienia padającego na pryzmat:  $\varepsilon = (n - 1)\varphi$ , gdzie  $\varphi$  to tzw. kąt łamiący pryzmatu, a  $n$  – względny współczynnik załamania światła dla ośrodka, z którego wykonany jest pryzmat. We wzorze tym nie występuje zależność od kąta padania promienia na ściankę pryzmatu  $\alpha$ , więc narzuca się pytanie o zakres stosowalności tego wzoru. Wyprowadźmy więc ścisły wzór na kąt odchylenia oraz przedyskutujmy jego przybliżenia w funkcji zmiennych  $\alpha$  i  $\varphi$ . Sprawdźmy również, jak dobre jest przybliżenie szkolne. W rachunkach przyjmijmy, że pryzmat wykonany jest z lodu o współczynniku załamania światła  $n = 1,31$ .

Bieg promienia światła w pryzmacie przedstawiony jest na rys. 1, z którego wynikają następujące związki dla kątów i ich funkcji (dalej przyjmujemy  $n = n_2/n_1$ ):  $\varphi = \beta + \gamma$  oraz  $\varepsilon = \alpha + \delta - (\beta + \gamma)$  oraz  $\sin \alpha / \sin \beta = n$  oraz  $\sin \delta / \sin \gamma = n$ . Z tych związków otrzymujemy:  $\varepsilon = \alpha + \delta - \varphi$  oraz  $\sin \delta = n \sin \gamma = n \sin(\varphi - \beta)$ . Eliminując kąt  $\beta$  otrzymujemy:

$$\sin \delta = \sin \varphi \cdot \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \sin \alpha \cdot \cos \varphi, \quad (1)$$

i stąd następujący ścisły wzór na kąt odchylenia promienia w pryzmacie:

$$\varepsilon = \alpha + \arcsin\left(\sin \varphi \cdot \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \sin \alpha \cos \varphi\right) - \varphi. \quad (2)$$

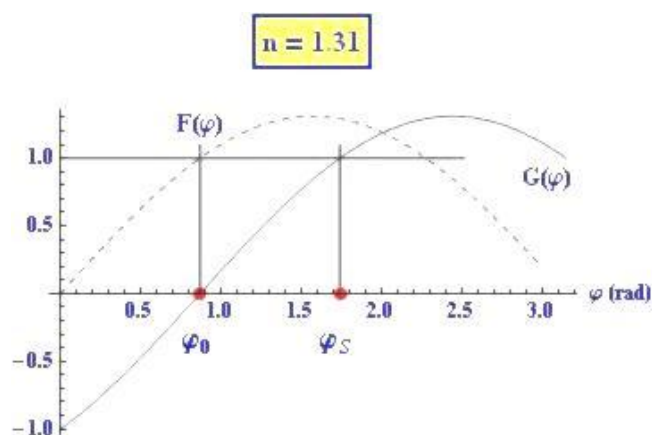


Rys. 1. Bieg promienia światła w pryzmacie:  $\alpha$  – kąt padania,  $\varepsilon$  – kąt odchylenia,  $\varphi$  – kąt łamiący pryzmatu. Liniami kropkowanymi oznaczono normalne do ścianek bocznych pryzmatu a przerywanymi przedłużenia promieni

Wzór ten nie jest w szkole wyprowadzany prawdopodobnie z powodu konieczności skorzystania z funkcji arcus sinus, której nie ma w programie nauczania. Ta funkcja również pojawiłaby się w rachunku prowadzącym do warunku dla kąta padania, aby promień załamany wyszedł z pryzmatu przez drugą ściankę, tzn. nie uległ na niej wewnętrznemu odbiciu. Oczywiście musi w tym celu zachodzić  $\sin \delta < 1$ , co odpowiada warunkowi:

$$\sin \alpha > \sqrt{n^2 - 1} \sin \varphi - \cos \varphi \equiv G(\varphi), \quad (3)$$

gdzie prawą stronę nierówności zdefiniowano jako funkcję  $G(\varphi)$  i przedstawiono na rys. 2 dla pryzmatu wykonanego z lodu ( $n = 1,31$ ). Funkcja ta przecina oś odciętych w punkcie  $\varphi_0 = \arcsin(1/n)$ ; dla lodu  $\varphi_0 = 0,8685$  ( $49,76^\circ$ ). Tak więc dla pryzmatów o kątach łamiących mniejszych niż  $\varphi_0$  nie ma możliwości aby promień uległ całkowitemu wewnętrznemu odbiciu na drugiej ścianie. Jeśli kąt łamiący jest większy niż  $\varphi_0$  wówczas całkowite wewnętrzne odbicie zajdzie dla kątów padania spełniających warunek:  $0 \leq \sin \alpha \leq G(\varphi)$ . W szczególności, gdy kąt łamiący spełnia warunek:  $G(\varphi) > 1$  wówczas całkowite wewnętrzne odbicie na drugiej ścianie zachodzi dla dowolnych wartości kąta padania  $\alpha$ . Odpowiada to kątom łamiącym  $\varphi > \varphi_S$  gdzie, jak łatwo można sprawdzić,  $\sin(\varphi_S/2) = 1/n$ , a więc  $\varphi_S = 2\varphi_0$ . Dla pryzmatu z lodu,  $\varphi_S = 1,7370 \approx 99,52^\circ$ .



Rys. 2. Funkcje  $F(\varphi) = n \sin \varphi$  oraz  $G(\varphi) = \sqrt{n^2 - 1} \sin \varphi - \cos \varphi$  dla lodu ( $n = 1,31$ ). Na osi odciętych oznaczono kąty  $\varphi_0 = 0,8685$  i  $\varphi_S = 2\varphi_0 = 1,7370$  (objaśnienie w tekście)

Szkolne przybliżenia wzoru (2) polegały na ograniczeniu się do małych kątów  $\alpha \approx 0$  ( $\alpha \ll n$ ),  $\varphi \approx 0$  i w konsekwencji do przyjęcia przybliżeń:  $\alpha/\beta \approx n$  oraz  $\delta/\gamma \approx n$ , których zastosowanie prowadzi do wzoru szkolnego:

$$\varepsilon \approx (n - 1) \varphi. \quad (4)$$

Zależność od zmiennej  $\alpha$  „zgubiła się” wskutek tego, że w powyższych przybliżeniach ograniczyliśmy się do pierwszego wyrazu rozwinięcia funkcji sinus,  $\sin x \approx x$ . Jak widać z wcześniejszego rachunku, całkowite wewnętrzne odbicie nie jest możliwe w przybliżeniu małych kątów, gdyż warunek ten oznacza również, że rozważamy pryzmaty o kątach łamiących znacznie mniejszych niż  $\varphi_0$  oraz kąty padania promieni również spełniających ten warunek.

Wprowadźmy teraz wyrazy wyższych rzędów w przybliżeniach funkcji występujących we wzorze ściśłym (2) tak, aby pojawiła się zależność od  $\alpha$ . Nadal oczywiście przyjmujemy, że  $\varphi \ll 1$ . W tym celu wykorzystamy pierwsze dwa wyrazy rozwinięć występujących w tym wzorze funkcji. Przyjmujemy zatem:  $\sin x \approx x - x^3/6$ ,  $\cos x \approx 1 - x^2/2$ ,  $\sqrt{1 \pm x} \approx 1 \pm x/2$ .

Zdefiniujmy funkcję  $\Omega$ :

$$\Omega = \arcsin\left(\sin \varphi \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \sin \alpha \cos \varphi\right). \quad (5)$$

Rozwijając pierwiastek oraz funkcje trygonometryczne, zachowując wyrazy do trzeciego rzędu iloczynów zmiennych  $\alpha$  i  $\varphi$ , otrzymujemy:

$$\Omega \approx \arcsin(n\varphi - \alpha + \zeta) \quad \text{gdzie} \quad \zeta = \frac{\alpha^3}{6} - \frac{\alpha^2 \varphi}{2n} + \frac{\alpha \varphi^2}{2} - \frac{n\varphi^3}{6}.$$

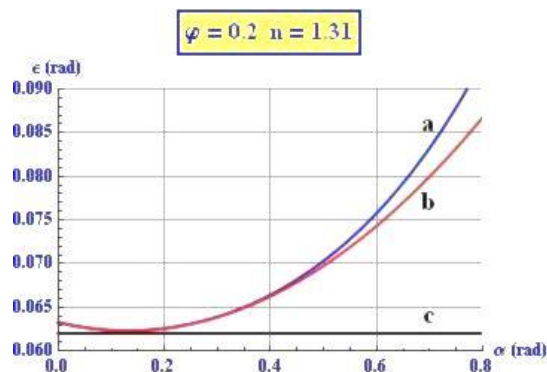
Pozostaje nam jeszcze rozwinięcie funkcji arcus sinus. Korzystamy z pierwszych dwóch wyrazów rozwinięcia:  $\arcsin x \approx x + x^3/6$ . Po wykonaniu nietrudnych, aczkolwiek żmudnych rachunków, zachowując wyrazy do trzeciego rzędu iloczynów zmiennych  $\alpha$  i  $\varphi$ , otrzymujemy następujący wzór dla kąta odchylenia promienia w pryzmacie:

$$\varepsilon \approx (n-1)\varphi \left[ 1 + \underbrace{\frac{(n+1)}{2} \left( \frac{\alpha^2}{n} - \alpha\varphi + \frac{n\varphi^2}{3} \right)}_{\text{poprawka } C(\alpha, \varphi)} \right], \quad (6)$$

gdzie  $C(\alpha, \varphi)$  jest poprawką najniższego rzędu do wzoru szkolnego. Powyższa poprawka, będąca kwadratową funkcją kątów  $\alpha$  i  $\varphi$ , jest zawsze dodatnia ponieważ wyróżnik  $\Delta$  równania kwadratowego:  $\alpha^2/n - \alpha\varphi + n\varphi^2/3 = 0$  jest ujemny, zarówno gdy traktujemy je jako równanie dla zmiennej  $\alpha$  jak i zmiennej  $\varphi$ . Wartość kąta  $\alpha$ , przy którym funkcja ta osiąga minimum dla ustalonego kąta  $\varphi$ , wynosi:

$$\alpha_{min} = n\varphi/2, \quad (7)$$

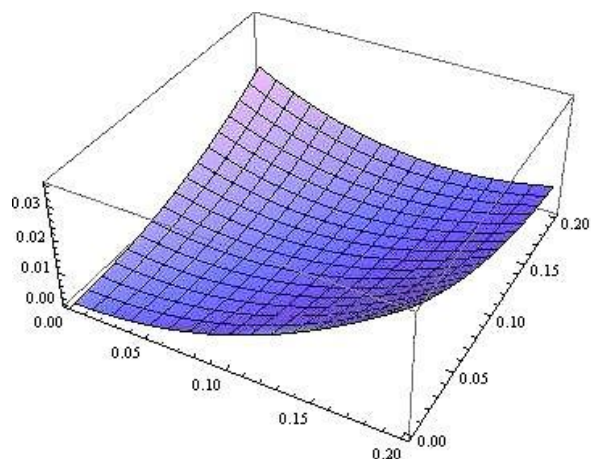
a wartość poprawki w minimum wynosi:  $C(\alpha_{min}, \varphi) = (n+1)n\varphi^2/24$ . Łatwo pokazać, że dla tej szczególnej wartości kąta  $\alpha$  zachodzi również:  $\delta = \alpha_{min}$ , tak więc minimum poprawki odpowiada symetrycznemu biegowi promienia w pryzmacie.



Rys. 3. Porównanie zależności kąta odchylenia  $\epsilon$ , od kąta padania  $\alpha$ , w pryzmacie z lodu o kącie łamiącym  $\varphi = 0,2$ . Oznaczenia: (a) – wzór ścisły (2); (b) – wzór przybliżony (6); (c) – wzór szkolny (4)

Porównanie ścisłej i przybliżonej zależności kąta odchylenia od zmiennych  $\alpha$  dla wartości kąta łamiącego  $\varphi = 0,2$  przedstawione jest na rys. 3. Widzimy, że zależność przybliżona (6) bardzo dobrze zgodna jest ze ścisłą (2) w dość dużym zakresie wartości kąta  $\alpha$  (do około 0,4 rad) dla pryzmatu o małym kącie łamiącym,  $\varphi = 0,2$ .

Poprawka do wzoru szkolnego  $C(\alpha, \varphi)$  jako funkcja dwóch zmiennych przedstawiona jest na rys. 4 i widać, że nie przekracza ona 3% w zakresie małych kątów,  $0 < \alpha, \varphi < 0,2$ . Taka jest więc (nie)dokładność wzoru szkolnego w wyniku: (a) rezygnacji z wprowadzania funkcji arcus sinus; (b) przybliżania funkcji, występujących w ścisłym wzorze, tylko pierwszym wyrazem rozwinięcia w szereg Taylora.



Rys. 4. Poprawka do wzoru szkolnego  $C(\alpha, \varphi)$  dla pryzmatu z lodu ( $n = 1,31$ )