



## Muzyka kwantów (II)

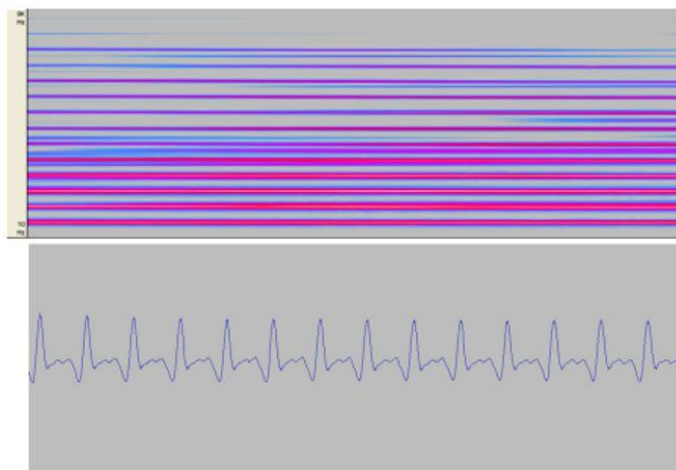
*Piotr Zieliński*

*Instytut Fizyki Politechniki Krakowskiej  
Instytut Fizyki Jądrowej PAN w Krakowie*

### Spektroskopia w czasie rzeczywistym

Rysunek 5 przedstawia przebieg ciśnienia akustycznego w dźwięku trąbki i widmo tego dźwięku. Widać okresowość przebiegu ciśnienia akustycznego i wyraźną drabinkę częstotliwości alikwotów, co wskazuje, że mamy tu do czynienia z wielotonem harmonicznym: wszystkie częstotliwości składowych harmonicznym są z dobrym przybliżeniem całkowitymi wielokrotnościami jednej częstotliwości podstawowej. W poprzedniej części przekonaliśmy się, że odtworzenie tego sygnału wstecz praktycznie nie zmienia barwy dźwięku, choć wykres ciśnienia akustycznego wyraźnie się zmienia, gdy zwrot osi czasu staje się przeciwny.

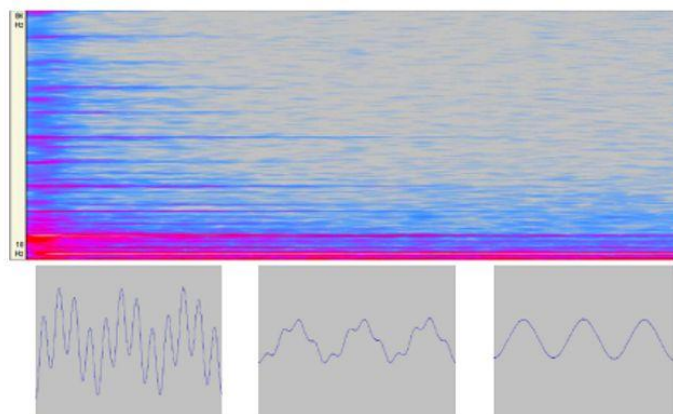
Proponuję teraz kolejne przykłady z odtwarzaniem fragmentów utworów wykonywanych przez różne instrumenty muzyczne z odwróceniem kierunku biegu czasu. Nagrania zebrane są w przykładach 7 [A\\_Instr1\\_wstecz.mp3](#) i [A\\_Instr1\\_w\\_przod.mp3](#) itd. Jak poprzednio, różnicę najłatwiej ocenić słuchając najpierw fragmentu odtworzonego wstecz i próbując rozpoznać instrument, a dopiero potem wysłuchać oryginału w przód.



Rys. 5. Spektrogram i przebieg czasowy ciśnienia akustycznego w dźwięku trąbki

Tutaj różnica jest wyraźna, może nawet szokująca. Skąd się ona bierze? Otóż w instrumentach [A\\_Instr1\\_wstecz.mp3](#) i [A\\_Instr1\\_w\\_przod.mp3](#) sygnał

nie jest stacjonarny. Jego widmo ewoluje w czasie, co łatwo zobaczyć na rys. 6, gdzie przedstawiono widmo i przebieg ciśnienia akustycznego podczas trwania jednego dźwięku wydawanego przez harfę. Sygnał ma ciągle ten sam okres, zatem i wysokość dźwięku jest stała. Jednak wyższe alikwoty stopniowo zanikają, wskutek czego sygnał coraz bardziej upodabnia się do pojedynczej sinusoidy. Kiedy odwrócimy strzałkę czasu, dźwięk będzie ewoluował przeciwnie: wyższe tony harmoniczne będą się stopniowo wzmacniać. Nasze organy słuchu postrzegają tę ewolucję i dlatego odwrócenie czasu zmienia odbierane wrażenie. Oczywiście jest kwestią nazewnictwa czy określić dźwięk harfy lub gitary osobną barwą, czy też raczej mówić o barwie zmiennej w czasie. W nauce o muzyce stosuje się często pierwsze podejście [9], fizyk zaś zauważy analogię z eksperymentami spektroskopowymi w czasie rzeczywistym. W eksperymentach tych obserwuje się zmiany widm, najczęściej optycznych, zachodzące, gdy obiekt wysyłający lub pochłaniający promieniowanie poddany jest zmiennym warunkom. Na przykład substancja ulegająca pod wpływem temperatury przemianie fazowej wykazuje zmiany widma absorpcji promieniowania podczerwonego. Podobnie można śledzić zmiany stanu cząsteczek chemicznych biorących udział w reakcjach związanych z funkcjami biologicznymi organizmów. Sztuka polega tu na zbudowaniu przyrządu zdolnego zarejestrować zmiany widma z dostateczną szybkością, aby nadążyć za zmianami stanu fizycznego [10]. W życiu codziennym także możemy obserwować zmiany widma elektromagnetycznego w czasie, np. patrząc na rozgrzewające się od ciemnej czerwieni aż do białości węgle w piecu.

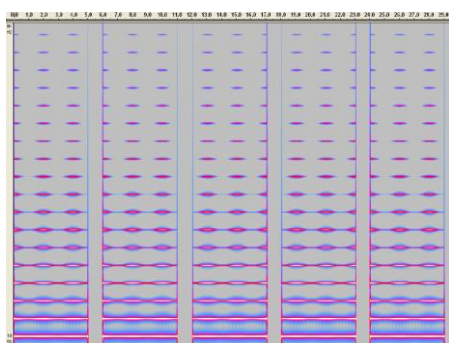


Rys. 6. Spektrogram i fragmenty przebiegu czasowego ciśnienia akustycznego w kolejnych stadiach dźwięku powstającego w wyniku szarpnięcia struny harfy

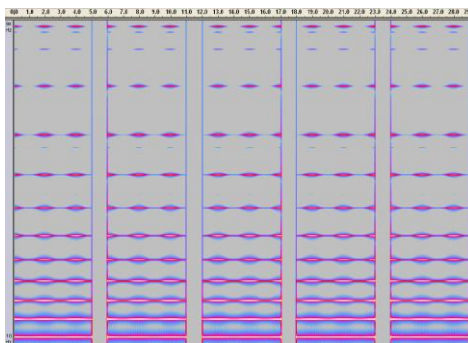
Oczywiście zmiana kierunku czasu, jak to zrobiliśmy w przykładach z instrumentami muzycznymi, zawsze da się sprowadzić do przesunięć faz tonów

składowych. Zatem twierdzenie Helmholtza o niezależności barwy dźwięku od faz składowych harmoniczných w zasadzie nie obowiązuje dla przebiegów, w których chwilowe widmo zmienia się w czasie, o ile barwę dźwięku określimy jako całościową cechę dźwięku wyróżniającą instrumenty muzyczne.

Przykład 8. Osc\_Kwant\_Harmon\_Zmienna\_Temperatura.mp3 (rys. 7) pozwala posłuchać tego zjawiska na znanym „instrumencie”, jakim jest kwantowy oscylator harmoniczný w różnych temperaturach. Tutaj temperatura zmienia się w sposób sinusoidalny z częstotliwością 0,5 Hz, czyli z okresem równym 2 s. Słyszymy dwukrotnie pewien fragment w przód, potem dwukrotnie ten sam fragment w tył, a potem jeszcze raz ten sam fragment w przód. Czy odcinki narastania i opadania temperatury różnią się barwą dźwięku? Wydaje się, że nie. Ucho dobrze rejestruje chwilowe widmo dźwięku, a więc i chwilową barwę, o ile tylko widmo nie zmienia się zbyt gwałtownie. Warto jednak zwrócić uwagę na efekt początku i końca sygnału. Nagłe rozpoczęcie dźwięku powoduje wrażenie szarpniętej struny, którego to wrażenia nie mamy, gdy maksimum temperatury (patrz rys. 7) jest osiąganе stopniowo. Istotna różnica barwy występuje zatem wtedy, gdy mamy do czynienia z gwałtownymi zmianami przebiegu czasowego. Zwróćmy uwagę, że na rys. 7 nagłe rozpoczęcie i zakończenie uwidacznia się wąskimi obszarami w postaci pasm, zawierających wszystkie częstotliwości. Jeszcze bardziej wyraźnie efekt ten słychać, gdy oscylator staje się anharmoniczny. W przykładzie 9 Osc\_Kwant\_Anharmon\_Zmienna\_Temperatura.mp3, rys. 8, potencjał oscylatora jest już dany parabolą, lecz posiada wyrazy powodujące, że wyższe poziomy są bardziej rozsunięte niż te położone niżej. Gdy te rozsunięte alikwoty są bogato reprezentowane w widmie, dźwięk staje się metaliczny, a gwałtowny początek zbliża nasz oscylator do brzmienia dzwonu. Znowu gwałtowny początek dźwięku, sprawiający wrażenie uderzenia w dzwon, powoduje na spektrogramie pasmo o widmie ciągłym. Można zapytać skąd w sygnale złożonym z samych sinusoid obszary widma ciągłego.



Rys. 7. Spektrogram przykładu  
Osc\_Kwant\_Harmon\_Zmienna\_Temperatura.mp3



Rys. 8. Spektrogram przykładu  
Osc\_Kwant\_Anharmon\_Zmienna\_Temperatura.mp3

### **Naturalna granica czasowej rozdzielczości spektroskopii w czasie rzeczywistym: zasada nieokreśloności Heisenberga**

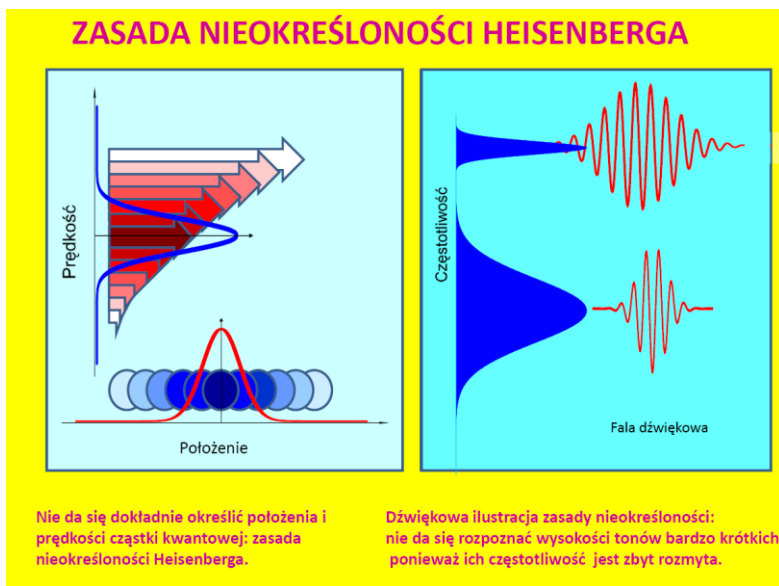
Odpowiedź na to pytanie należy zacząć od tego, że samo określenie „widmo chwilowe”, tak podstawowe dla spektroskopii w czasie rzeczywistym, zawiera w sobie pewną sprzeczność. Widmem wszak nazywamy zbiór amplitud poszczególnych sinusoid, na jakie rozkłada się dany sygnał. Sinusoidy są funkcjami ściśle okresowymi w przedziale od minus do plus nieskończoności, a rozkład każdego sygnału na takie składowe można zrobić zawsze w tylko jeden sposób. Jak zatem amplitudy funkcji okresowych od minus do plus nieskończoności składające się na raz zadaną funkcję mogą się zmieniać w czasie? Oczywiście nie mogą. Tylko że żaden eksperyment nie trwa od minus do plus nieskończoności: kiedyś zaczynamy rejestrować sygnał i kiedyś kończymy. Zatem jesteśmy zmuszeni określić okresowość funkcji na podstawie tylko skończonego jej fragmentu – próbki. Jesteśmy na to skazani zawsze z wyjątkiem przypadków, gdy sygnał podany jest w postaci matematycznego wzoru, który pozwala wyznaczyć składowe sinusoidy analitycznie. W przeciwnym razie musimy zdecydować sami, lub dostosować się do zdanej długości sygnału, jak długo będziemy zbierać dane. Ten zabieg nazywamy „oknowaniem”, lub „okienkowaniem” – odcinek czasu, w którym rejestrujemy sygnał jest bowiem jak otwarte okno w nieprzezroczystej ścianie [11]. Postęp spektroskopii w czasie rzeczywistym polegający na technice wyznaczania widm przy użyciu coraz to krótszych próbek ma zatem swój naturalny kres: gdy dostępny sygnał trwa zbyt krótko, jego widmo nie tyle nie da się technicznie WYZNACZYĆ, co staje się w ogóle NIEOKREŚLONE. Czegoś z-zasady-nieokreślonego nie da się wyznaczyć!

Żeby zrozumieć istotę tej zasady powrócimy do definicji częstotliwości. Jest to liczba okresów drgania w jednostce czasu. Ale żeby liczbę okresów można było wyznaczyć, trzeba dysponować odcinkiem czasu dostatecznie długim, aby w nim proces liczenia okresów w ogóle dało się przeprowadzić. Na przykład jeżeli okres trwa minutę, a my mamy do dyspozycji próbkę o długości 10 sekund, to nie możemy powiedzieć ile okresów przypada na godzinę – w tej sytuacji dość naturalną jednostką czasu. Na zbyt krótkim odcinku okresowość funkcji po prostu się nie objawia. Oczywiście podobne zjawisko występuje w mechanice kwantowej. Nie jest ono bowiem zależne od tego czy częstotliwość dotyczy ciśnienia akustycznego, czy amplitudy prawdopodobieństwa. Wystąpi zawsze wtedy, gdy chcemy wyznaczyć częstotliwość mając określony odcinek czasu. Jednakże odkrycie tego faktu w mechanice kwantowej przez Wernera Heisenberga (1927) [12] zdumiało, zarówno jego samego, jak cały świat naukowy. Oznacza ono bowiem – po pomnożeniu częstotliwości przez stałą Plancka – że jeżeli nie dysponujemy dostatecznie długim czasem pomiaru, to nie możemy dokładnie wyznaczyć energii badanego układu. Używając niepewności

$\Delta t$  i  $\Delta f$ , czyli odchyłeń standardowych dla czasu i częstotliwości, możemy zapisać tę relację w następujący sposób

$$\Delta t \Delta f \geq 1/2\pi .$$

Jest ona znana jako relacja nieokreśloności Heisenberga [13]. Równość, czyli minimalny iloczyn niepewności występuje, gdy kształt próbki ma postać funkcji Gaussa znanej ze statystyki jako rozkład normalny. Znane twierdzenie o transformatkach Fouriera – wyrażające w istocie zasadę nieokreśloności Heisenberga – mówi, że widmo pojedynczej sinusoidy pomnożonej przez funkcję Gaussa jest także funkcją Gaussa w dziedzinie częstotliwości. Maksimum tej funkcji Gaussa odpowiada częstotliwości sinusoidy, a szerokość jest równa odwrotności szerokości obwiedni oryginalnego sygnału. Przedstawia to poglądowo rysunek 9. Widać z niego, że niemożność określenia częstotliwości polega na tym, że dla zbyt krótkich odcinków czasu nie można zliczyć maksimum sinusoidy, nie mówiąc o tym, że maksima wcale nie są sobie równe, więc samo pojęcie okresowości staje się problematyczne. Wysokość dźwięku staje się możliwa do określenia, gdy widmo częstotliwości staje się dostatecznie wąskie, aby można je było traktować jak pojedynczą częstotliwość.

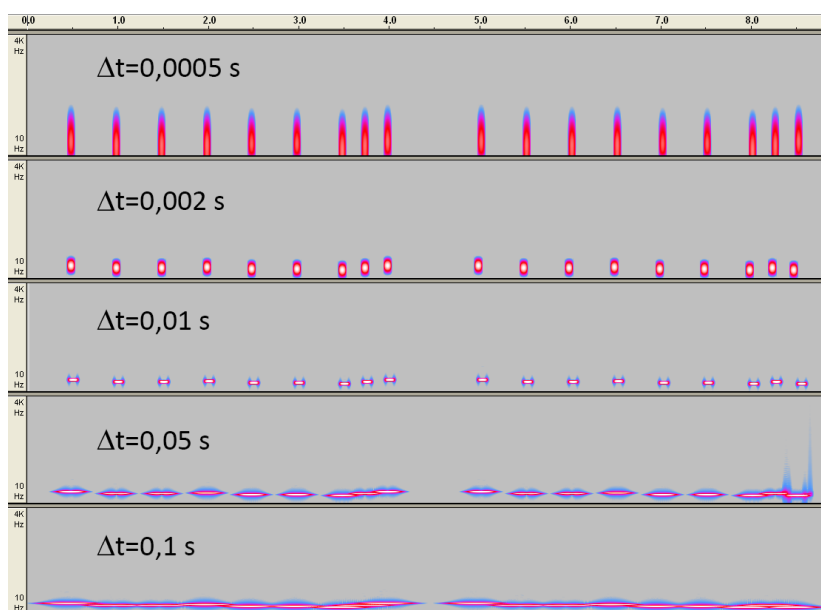


Rys. 9. Ilustracja zasady nieokreśloności Heisenberga

Opisana zasada nieokreśloności jest więc bardzo łatwa do zilustrowania: oznacza ona, że **pojedynczy ton prosty, który trwa zbyt krótko, nie ma określonej wysokości dźwięku**. Przykład 10. [Melodia1DT0\\_mlk. mp3](#) prezentuje znaną(?) melodię wykonaną tonami prostymi z obwiednią w postaci funkcji

Gausa (tak jak na rysunku 9), szerokość tej funkcji  $\Delta t$  (średnie kwadratowe odchylenie standardowe rozkładu normalnego) podana jest w sekundach, DT0\_mlk oznacza  $\Delta t = 0.mlk$ . Czytelnik może sprawdzić jak długo musi trwać dźwięk, aby można było określić jego wysokość. Inny przykład tego rodzaju przedstawia 11. Melodia2DT0\_mlk.mp3. Podobny przykład z utworem dwugłosowym (12. Dwa\_GlosyDT0\_mlk. mp3), ilustruje fakt, że wysokość niskich dźwięków pozostaje niekreślona przy dłuższych czasach trwania  $\Delta t$ , gdy wysokość wyższych dźwięków jest już rozpoznawalna. Jest to dość oczywiste: liczy się niepewność względna, dla niższych tonów trzeba więcej czasu, aby określić choćby w przybliżeniu ich okresowość, skoro okres trwa dłużej. Przykład 13. GamaDT0\_mlk.mp3 przedstawia dźwięki gamy majorowej grane tonami prostymi o gaussowskich obwiedniach z różnymi parametrami szerokości poczynając od  $\Delta t = 0,0005$  s.

Rysunek 10 ilustruje widma kilku przykładów z pliku 10. Melodia1DT0\_mlk.mp3. Widać tam, jak dźwięki krótkie nie mają jednej określonej częstotliwości, lecz cały jej obszar – pasmo. Są to więc impulsy szerokopasmowe. W dziedzinie fal elektromagnetycznych szerokopasmowe impulsy mają czas trwania rzędu femtosekund. Ich wytwarzanie i zastosowanie stało się możliwe dopiero całkiem niedawno.



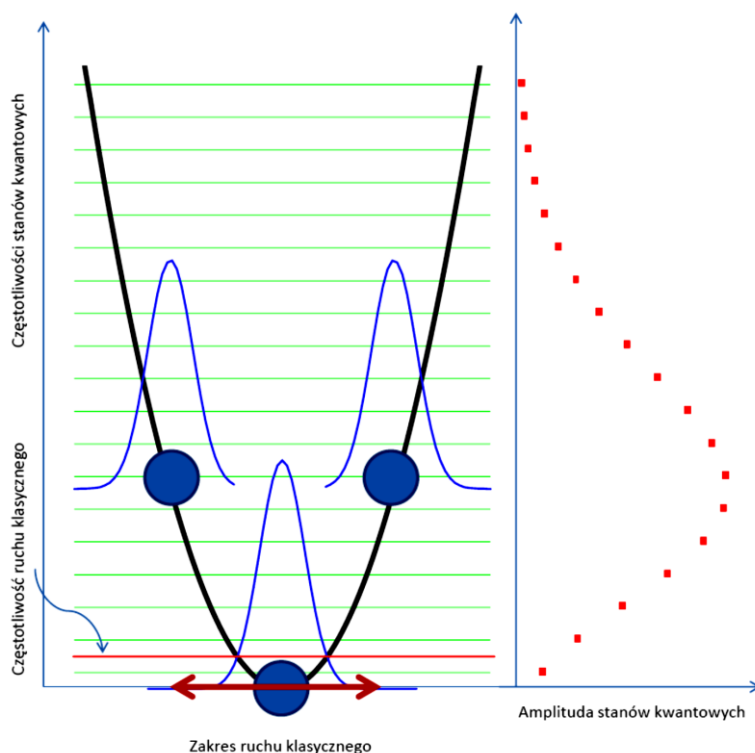
Rys. 10. Spektrogramy wybranych przebiegów z przykładu Melodia1DT0\_mlk. Melodia wykonywana jest przez tony proste o obwiedniach w postaci funkcji Gaussa  $g(t) = \exp(-(t - t_0)^2 / (2\Delta t^2))$  przy różnych wartościach parametru szerokości  $\Delta t$ . Dźwięki o krótkim czasie trwania wykazują szerokie pasmo częstotliwości

Ta sama zasada nieokreśloności, która uniemożliwia rozpoznanie wysokości tonów prostych, uniemożliwia też rozpoznanie barwy dźwięków zbyt krótkich. Jak wiadomo barwą dźwięku różnią się od siebie samogłoski. Przykład 14. [Samogloskan.mp3](#) przedstawia nagrania samogłosek z nałożoną na nie obwiednią gaussowską o rosnącej szerokości. Sprawdźmy, ile czasu potrzebujemy, aby rozpoznać samogłoskę.

### Granica klasyczna

Problemem, który niepokoił twórców mechaniki kwantowej było uzgodnienie świata rządzonego przez zjawiska falowe występujące w skali mikroskopowej, ze zjawiskami makroskopowymi znanymi z życia codziennego. Nikt przecież nie widział nieokreśloności energii ciężarka drgającego na sprężynie, albo stanów kwantowych widełek stroikowych. Wiąże się to z wielkością stałej Plancka, która jest tak mała, że pojedyncze kwanty dają się, przynajmniej pośrednio, obserwować dopiero w zakresie częstotliwości terahercowych (por. zjawisko fotoelektryczne dla światła widzialnego, tj. z zakresu  $5 \cdot 10^{14} - 10^{15}$  Hz). Ciężarek wykonuje swój ruch opisany sinusoidą, którą łatwo można śledzić, gdyż z powodu małej wartości stałej Plancka nieokreśloność położenia ciężarka jest mniejsza niż rozmiar nukleonu. Zatem w ruchu ciężarka mamy do czynienia z ogromną liczbą niezwykle małych porcji energii. Rozwiązanie zaproponował już E. Schrödinger. Ruch makroskopowy, to taka superpozycja fal, czyli kwantowych stanów własnych energii, że maksimum prawdopodobieństwa, wynikające ze składania amplitud w tej superpozycji spełnia newtonowskie równania ruchu. Gdy ciężarek ma dostatecznie dużą masę i amplituda jego ruchu jest dostatecznie duża, to prawdopodobieństwo położenia musi być dane przez tzw. paczkę falową. Taka paczka falowa jest różna od zera tylko w bardzo bliskim otoczeniu miejsca, gdzie ciężarek powinien się znajdować według reguł klasycznych. Schrödinger zdołał skonstruować taką paczkę falową, z funkcji falowych oscylatora harmonicznego [14]. Te składowe funkcje falowe muszą mieć bardzo precyzyjnie określone amplitudy i fazy, dlatego taki stan został nazwany stanem koherentnym. Warto przypomnieć, że za rozwinięcie koncepcji stanów koherentnych Roy L. Glauber otrzymał w 2005 r. Nagrodę Nobla. W stanie koherentnym oscylatora harmonicznego funkcja falowa ma postać rozkładu Gaussa o stałej szerokości. Ten rozkład wędruje w sposób sinusoidalny pomiędzy punktami, gdzie ciężarek się zatrzymuje i zawraca. Na rysunku 11 przedstawiono tę funkcję Gaussa w punktach zwrotu i w minimum potencjału. Amplitudy poszczególnych kwantowych funkcji falowych składających się na tę wędrującą paczkę falową zilustrowano czerwonymi kropkami po prawej stronie. Rysunek ten odpowiada bardzo niskiej amplitudzie ruchu klasycznego, porównywalnej z nieokreślonością położenia cząstki. Dźwięku o tak niskiej amplitudzie nie da się usłyszeć. Osiągnięcie progu słyszalności wymaga ampli-

tud wielokrotnie przewyższających nieokreśloność położenia. Z tego powodu kwantowych efektów w odbiorze muzyki nie słyszymy. Stosując naszą analogię grających amplitud prawdopodobieństwa możemy sprawdzić jak brzmi stan koherentny. Przykład 15 *Stany\_Koherentne.mp3* został wykonany następująco. Wyobraźmy sobie, że nasze widełki stroikowe zmniejszyły amplitudę swych drgań tak, że nie słyszymy już drgań klasycznych. Jednocześnie zakładamy, że stany własne oscylatora kwantowego też wykonują swoją muzykę. W miarę obniżania amplitudy ruchu klasycznego wyższe częstotliwości kwantowe stopniowo się wyciszają, aż zostaje tylko częstotliwość podstawowego stanu kwantowego. Jest ona o połowę niższa, niż częstotliwość oscylatora klasycznego. Pod koniec swego trwania, dźwięk staje się zatem o oktawę niższy. Duża liczba wysokich tonów daje wrażenie syku na początku każdego dźwięku w tym przykładzie, a „zjazd” o oktawę – pewnego „miauczenia”. Stąd charakterystyczne „cj-au”. Nasz stan koherentny znowu gra pierwsze dźwięki Bachowskiej *Kunst der Fuge*.



Rys. 11. Ilustracja stanu koherentnego kwantowego oscylatora harmonicznego przy amplitudzie ruchu klasycznego porównywalnej z kwantową nieokreślonością położenia



### Zamiast podsumowania

Proces tłumaczenia czegokolwiek jest zawsze tym, czym w fizyce model: metaforą odnoszącą nieznaną do czegoś, co już rozumiemy. Bez wątpienia zjawiska związane z wysokością i barwą dźwięku przemawiają do nas bardzo bezpośrednio i sugestywnie, choć mechanizmy tych zjawisk są tylko analogiczne, a nie tożsame z efektami kwantowymi. Metafora bywa też niejednoznaczna. W podanych przykładach stacjonarne stany kwantowe występujące w pewnych superpozycjach zostały zilustrowane poprzez tony proste o amplitudach proporcjonalnych do współczynników stanów własnych energii w tych superpozycjach. Nie jest to jedyny sposób ilustracji. Inny poziom metafory polegałby na przypisaniu tonów prostych częstotliwościom promieniowania wysyłanego przez układy kwantowe. Mielibyśmy więc akustyczny obraz przeskoków kwantowych. Oczywiście brzmienie tych samych układów zilustrowanych na te dwa sposoby byłoby inne.

Bywa, że metafora nie oddaje wiernie wszystkich szczegółów. W tym artykule nie usłyszeliśmy, czym się różni superpozycja stanów, tj. spójna (koherentna) ich kombinacja (tylko takie słyszymy w podanych przykładach) od stanu mieszanego, opisywanego macierzą gęstości. W tym ostatnim przypadku byłyby to dźwięki powstające przypadkowo, a ich obwiednie odpowiadałyby długości koherencji w danych warunkach. W tym kontekście warto podkreślić istotną różnicę między superpozycją alikwotów, a superpozycją stanów kwantowych. W pierwszym przypadku wszystkie tony proste stale składają się na kształt sygnału i przez to decydują o barwie dźwięku. Można powiedzieć, że jest to koherentna superpozycja stanów koherentnych. Superpozycja stanów kwantowych ma jednak, według powszechnie przyjętej interpretacji, znaczenie inne. Każdy pojedynczy pomiar wykaże mianowicie tylko jeden ze stanów własnych zawartych w superpozycji, a nie wszystkie naraz. Znow wypelza skądś półzywy kot Schrödingera... Znaczenie amplitudy prawdopodobieństwa polega na tym, że prawdopodobieństwo uzyskania konkretnego stanu własnego jest zadane przez moduł kwadratu amplitudy tego stanu w rozpatrywanej superpozycji. Ale prawdopodobieństwo to pojęcie albo z dziedziny nastrojów lub poglądów – oznacza ono wtedy przypuszczenie lub opinię, albo z dziedziny wielkich liczb. W tej ostatniej interpretacji możemy mieć wszystkie stany na raz, ale będą one pochodzić z różnych kopii takich samych obiektów, czyli z tzw. zespołu statystycznego tych obiektów. W przedstawionych tu przykładach zespół – chór takich samych obiektów został utożsamiony z jednym obiektem w odpowiedniej superpozycji stanów.

Czasem model wprowadza zjawiska nowe w porównaniu z tymi, które ma tłumaczyć. W podanych przykładach ilustrowaliśmy zasadę nieokreśloności Heisenberga za pomocą gaussowskich paczek falowych, tj. takich, dla których iloczyn niepewności – rozumianych jako średnie kwadratowe odchylenia standardowe – czasu i częstotliwości przyjmuje wartość minimalną. Tymczasem

wybór średniego kwadratowego odchylenia standardowego jako miary niepewności nie jest podyktowany naturą zjawiska fizycznego, lecz raczej zastosowaniem statystyki matematycznej. Warto byłoby więc zbadać dla jakiegoś kształtu paczki falowej wysokość dźwięku staje się określona przy najkrótszym czasie trwania sygnału i jakie parametry tego kształtu są rzeczywiście istotne. Zapewne zależy to także od bezwzględnej wysokości dźwięku (rejestr). Może też być osobniczo zmienne. Ten problem nie jest bynajmniej wyłącznie sprawą adekwatności naszej metafory. Kształt pakietu falowego ma z pewnością wpływ na określenie energii w eksperymentach z cząstkami kwantowymi. Dodatkową komplikacją jest tu dyspersja pakietów falowych cząstek obdarzonych niezerową masą. Podobnie przedstawione tu przykłady wskazują, że czasowa szerokość pakietu gaussowskiego umożliwiające rozpoznanie samogłosek jest zbliżona do szerokości umożliwiającej rozpoznanie wysokości dźwięku. Ciekawe byłoby jednak ilościowe zbadanie szybkości rozpoznania wysokości dźwięku w zależności od jego barwy, oraz barwy od kształtu i czasu trwania impulsu [15]. Czy istnieją tu różnice między samogłoskami – wielotonami harmonicznymi i spółgłoskami – szumami?

Spośród układów kwantowych rozpatrywanych w klasycznych podręcznikach mechaniki kwantowej tutaj przedstawiono w zasadzie tylko oscylator harmoniczny z jednym rodzajem anharmonizmu. Podobne ilustracje dźwiękowe można łatwo wykonać np. dla cząstki w studni potencjału. Tu także otrzymamy wieloton harmoniczny w odróżnieniu od ilustracji atomu wodoru, gdzie poziomy energii nie są naturalnymi wielokrotnościami jakiegoś tonu podstawowego. W tym ostatnim przypadku usłyszymy dźwięk, którego wysokości nie sposób określić, różny jednak od szumu, z powodu dyskretnego charakteru widma. Chóry bozonów i fermionów będą znacznie się różnić. Zjawisko Zeemana dla układów z określoną wysokością dźwięku wyjaśni, co to jest „chorusing”, czyli dudnienia kwantowe. Dysponując rozpowszechnionymi programami do syntezy dźwięku, nauczyciele fizyki i muzyki łatwo znajdą jeszcze wiele innych przykładów, by ukazać swym uczniom, jak ciekawe są przedmioty przez nich nauwane i jak zastanawiająca jest jedność zjawisk przyrody.

### Przykłady dźwiękowe

7. [A\\_Instr1\\_wstecz.mp3](#), [A\\_Instr1\\_w\\_przod.mp3](#), [A\\_Instr2\\_wstecz.mp3...](#), [A\\_Instr4\\_w\\_przod.mp3...](#) nagrania fragmentów muzyki wykonywanej na różnych instrumentach analogicznie do przykładu 6. Najlepiej słuchać najpierw nagrania wstecz.
8. [Osc\\_Kwant\\_Harmon\\_Zmienna\\_Temperatura.mp3](#); ilustracja brzmienia kwantowego oscylatora harmonicznego w okresowo zmiennej temperaturze. Odcinek  $2\frac{1}{2}$  okresu tych zmian poczynając od maksymalnej temperatury

jest prezentowany dwukrotnie. Potem ten sam odcinek przy odwróceniu biegu czasu i jeszcze raz odcinek oryginalny. Czytelnik zachce zwrócić uwagę na różnię gwałtownego początku i łagodnego narastania oraz różnicę gwałtownego początku i końca przebiegu (rys. 7).

9. Osc\_Kwant\_Anharmon\_Zmienna\_Temperatura.mp3; przykład analogiczny do 8, lecz dla oscylatora anharmonicznego (rys. 8).
10. Melodia1DT0\_mlk.mp3; melodia złożona z tonów prostych o obwiedniach gaussowskich. Parametr „sigma” szerokości rozkładu Gaussa rozkładu podany w każdym przykładzie w postaci  $0.mlk = 0\_mlk$ .
11. Melodia2DT0\_mlk.mp3; inna melodia przedstawiona jak w przykładzie 10.
12. Dwa\_GlosyDT0\_mlk...mp3. Utwór dwugłosowy jak w przykładach 10 i 11.
13. GamaDT0\_mlk...mp3; dźwięki naturalnej gamy majorowej tony proste z obwiedniami gaussowskimi o szerokościach  $\Delta t$ : 0,0005 s, 0,001 s, 0,005 s i 0,02 s..
14. Samogloskan.mp3; samogłoski nagrane z różnych wykonań wokalnych. Obwiednie gaussowskie o rosnącej szerokości począwszy od 0,0005 s, według wzoru  $\Delta t(n) = 0,0005 \exp[(n-1) * 0,4]$  s.
15. Stany\_Koherentne.mp3; „muzyka amplitud prawdopodobieństwa” w stanach koherentnych kwantowych oscylatorów harmonicznym, których amplitudy klasyczne gasną do wartości zerowej.

### Rozwiązania zagadek

7. harfa, gitara, klawesyn, fortepian.
10. Melodia1: „Wlazi kotek na płotek”.
11. Melodia2: *Sztuka Fugi* J.S. Bacha.
12. Dwa\_Glosy: Inwencja dwugłosowa nr 8 F-dur J.S. Bacha.
14. Samogloska1 „o”, Samogloska2 „a”, Samogloska3 „e”, Samogloska4 „i”.

### Literatura i przypisy

- [9] <http://www.chopin.edu.pl/pl/wydzialy/vi/katedra-akustyki-muzycznej>
- [10] J. Chou, D.R. Solli i B. Jalali, *Real time spectroscopy, with subgigahertz resolution using amplified dispersive Fourier transformation*, Appl. Phys. Lettrs. 92, 111102 (2004), w tym jednym z bardzo licznych artykułów na temat spektroskopii w czasie rzeczywistym porusza się problem rozdzielczości.
- [11] Zob. np. W.H. Press, B.P. Flannery, S.A. Teukolsky i W.T. Vetterling, *Numerical Recipes, The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press, Cambridge, 1986, s. 381, 423.
- [12] W. Heisenberg, *Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik*, Z. Phys. 43, 172 (1927), autor pisze tu: „[...] dokładność pomiaru energii jest tym gorsza, im krótszy jest zakres czasu [...]”.

- [13] Niektórzy używają tu nazwy „zasada nieoznaczoności”. Profesor Średniawa przestrzegał przed tą nazwą, sugerującą jakąś techniczną trudność wyznaczenia pewnych wielkości, podczas gdy w istocie te wielkości w ogóle nie są określone. W oryginalnej relacji Heisenberga iloczyn niepewności wynosi  $\Delta t \Delta f \geq 1/4\pi$ , ponieważ w mechanice kwantowej „obwiednią” jest kwadrat obwiedni funkcji falowej, a nie sama obwiednia.
- [14] L.I. Schiff, *Mechanika kwantowa*, PWN, Warszawa 1977, s. 75.
- [15] Nie rozwiązaliśmy tu ilościowo problemu, jak szybkie muszą być zmiany widma, aby nie można było już mówić o zmiennej w czasie barwie dźwięku. Wskazówkę daje K. Zalewski ([2], s. 195) pisząc o „Zasadzie nieokreśloności dla energii i czasu II”. Z rozważań tam zawartych wynika, że istnieje związek między nieokreślonością częstotliwości a szybkością zmian średniej częstotliwości w widmie. Ta ostatnia wielkość nie ma znaczenia w percepcji dźwięku, ale można ją obliczyć, przynajmniej dla dźwięków syntezowanych sztucznie, tak jak w przykładach 8 i 9. Mając takie dane można by sprawdzić, czy nieokreśloność częstotliwości uniemożliwiająca rozpoznanie wysokości jest taka sama jak nieokreśloność chwilowej barwy dźwięku. Warto tu też przypomnieć „Zasadę nieokreśloności dla energii i czasu I” ([2], s. 174). Autor nawiązuje tam do zjawiska dudnień. Dwa tony proste o niewiele różniących się częstotliwościach  $f_1$  i  $f_2$  wywołują wrażenie pojedynczego tonu o częstotliwości równej średniej z obydwu częstotliwości  $\bar{f} = (f_1 + f_2)/2$ . Ton ten jednak zanika (i odradza się) po czasie  $\Delta t \sim \frac{1}{|f_1 - f_2|}$ . Gdy różnica częstotliwości staje się dostatecznie duża, czas trwania tonu średniego zmniejsza się na tyle, że ton ten nie jest on już postrzegany i słuchacz odbiera dwa różne tony. Przejście pomiędzy obydwoma sytuacjami wiąże się z zagadnieniem rozdzielczości częstotliwościowej narządu słuchu, tzw. wstęgi krytycznej i maskowania (por. np. B.C.J. Moore, *Wprowadzenie do psychologii słyszenia*, PWN, Warszawa–Poznań 1999, s. 197 i prace tam cytowane, zwłaszcza E. Zwickera). Ciekawe byłoby porównanie eksperymentów słuchowych z wnioskami płynącymi wprost z zasady nieokreśloności.