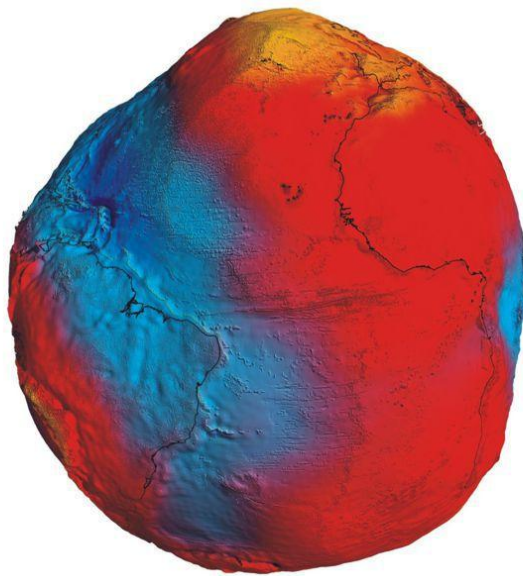


# Foton

114  
Jesień  
2011

Pismo dla nauczycieli i studentów fizyki oraz uczniów

INSTYTUT FIZYKI  UNIWERSYTET JAGIELLOŃSKI  
SEKCJA NAUCZYCIELSKA POLSKIEGO TOWARZYSTWA FIZYCZNEGO

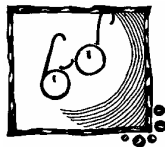


Historia energii  
Komputery i los  
Kształt Ziemi  
Koła rowerowe kreślą fraktale



Fot. Maciej Malinowski

Noblista Kenneth Wilson podczas dyskusji z uczniami w IFUJ,  
Kraków, lipiec 2011



## Przyroda – nowy przedmiot – wyzwanie dla nauczycieli

Przyroda w liceum w miejsce fizyki i innych przedmiotów przyrodniczych stała się faktem. Szkoda by było pozostawić ją w rękach nauczycieli innych przedmiotów. Przyroda w szkole to odpowiedź na niezadowolenie absolwentów ze sposobu nauczania przedmiotów przyrodniczych i z zasobu wiedzy wynoszonej ze szkoły.

Reforma ta nie powinna być zaskoczeniem, już paręnaście lat temu była wiceminister edukacji Anna Radziwiłł głosiła, że otacza nas nie fizyka i chemia, lecz przyroda. Wiemy jednak, że postęp w nauce następował, gdy kolejne dziedziny wyodrębniały się z obszaru wiedzy. W rezultacie nie przypadkiem nauczano osobno matematyki, osobno fizyki i chemii. Uczeń zdobywał najpierw trudne, często abstrakcyjne podstawy. Unifikacja odbywała się na podstawie wiedzy szczegółowej.

Obecnie do szkół ponadpodstawowych uczęszcza nie 20–30% młodzieży, jak jeszcze 20 lat temu, lecz prawie wszyscy. Nie każdy ma ochotę, potrzebę i, choć to brzmi bardzo niepoprawnie politycznie, nie każdy ma potencjał intelektualny, by poznawać abstrakcyjne pojęcia z fizyki, chemii i biologii, a chcemy, by ci uczniowie nie stanowili w przyszłości nieoświeconej „ciemnej masy”. Można większość uczniów rzetelnie poinformować o osiągnięciach nauki, można ich na przykładach wprowadzić w sposoby rozumowania naukowego. To, co najważniejsze i należy uznać za priorytet w nauczaniu przyrody, to wpojenie uczniom szacunku do nauk ścisłych. Największe niebezpieczeństwo niewłaściwego nauczania przyrody będzie tkwiło w produkcji ignorantów i arogantów, którym będzie się wydawało, że wszystko lepiej wiedzą, którzy będą nieumiejętnie wysnuwać wnioski. Z praktycznych umiejętności do takiej ignorancji przyczynia się brak znajomości i oswojenia się ze skalami wielkości, z jednostkami. Nauczanie przyrody to wielkie wyzwanie dla nauczycieli, wręcz przygoda, to otwarte pole do stosowania rozmaitych aktywnych metod nauczania, które oferują współczesne środki i media. *Foton* w swych zasobach posiada ciekawe materiały do lekcji przyrody. Będziemy dalej takie publikować.

W tym zeszycie znajdują państwo artykuł profesora Staruszkiewicza o historii pojęcia energii. Uświadamia on, iż pojęcie, którym się potocznie posługujemy, ma długą historię i zrozumienie go jest trudne. Artykuł o geoidzie doskonale wpisuje się w nurt nauczania przyrody, a „Komputery i los” to artykuł szkoleniowy na temat liczb losowych. Czytelników zainteresowanych fraktalami zachęcamy do lektury artykułu „Koła rowerowe kreślą fraktale”. Adam Smólski natomiast w „Odgłosach z jaskini” demaskuje mistrza Piekare, który błędnie opisał klasyczne doświadczenie i który to opis jest zapewne powtarzany w podręcznikach. Zapraszamy do lektury.

Z.G-M



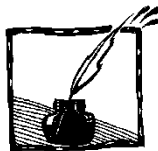
## Contents

Science – a new subject in high school – a challenge for teachers <i>Zofia Gołqb-Meyer</i> .....	1
A short history of energy <i>Andrzej Staruszkiewicz</i> .....	4
Polish-Ukrainian Contest – Young Lion Competition 2012 .....	8
Computers and randomness (I) <i>Jerzy Karczmarczyk</i> .....	9
Bicycle wheels draw fractals <i>Marek Berezowski</i> .....	26
The geoids <i>Justyna Chojnacka, Grzegorz Karwasz</i> .....	33
Deflection of light in a prism – the exact formula and its approximations <i>Jacek Ciborowski, Maria Sobol</i> .....	47
Problems. Noises from the cave (20). Even a master can be wrong <i>Adam Smólski</i> .....	51
Problems. Equipotential surfaces <i>Witold Zawadzki</i> .....	53
Problems for the Tournament of Young Physicists 2012 <i>Andrzej Nadolny</i> .....	55
24 <sup>th</sup> Tournament of Young Physicists 2011 <i>Andrzej Nadolny</i> .....	58
Meeting of Kenneth Wilson with high-school students – changes in education <i>Zofia Gołqb-Meyer</i> .....	61
Physical track festival <i>Stanisław Bednarek</i> .....	63
The Conference of Physics Didactics, Łódź 2011 <i>Stanisław Bednarek</i> .....	65
Do neutrinos beat the speed of light? <i>Paweł Góra</i> .....	67
Erroneous article about collisions with asteroids ( <i>Fizyka w Szkole</i> , 2011, Nr 3) <i>Grzegorz Sęk</i> .....	69
„Science on Stage” Europe <i>Zenona Stojęcka</i> .....	72
18 <sup>th</sup> International Conference of Youth Scientists <i>Urszula Woźnikowska-Bezak</i> .....	73
Awards of Polish Physical Society for distinguished physicist teachers.....	77
„Physics and Photography” IX Competition <i>Zenona Stojęcka</i> .....	78
Work for physics. Coherently prepared media – novel properties and applications <i>Wojciech Gawlik</i> .....	79



## Spis treści

Przyroda – nowy przedmiot – wyzwanie dla nauczycieli <i>Zofia Gołąb-Meyer</i> .....	1
Krótką historią pojęcia energii <i>Andrzej Staruszkiewicz</i> .....	4
Polsko-Ukraiński Konkurs Fizyczny „Lwiątko 2012” .....	8
Komputery i los (I) <i>Jerzy Karczmarczuk</i> .....	9
Koła rowerowe kreślą fraktale <i>Marek Berezowski</i> .....	26
Elipsoida ziemiska <i>Justyna Chojnacka, Grzegorz Karwasz</i> .....	33
Kąt odchylenia promienia w pryzmacie: wzór ścisły i jego przybliżenia <i>Jacek Ciborowski, Maria Sobol</i> .....	47
Odgłosy z jaskini (20) Mistrz jest nagi <i>Adam Smólski</i> .....	51
Kącik zadań. Powierzchnie ekwipotencjalne <i>Witold Zawadzki</i> .....	53
Turniej Młodych Fizyków 2012 <i>Andrzej Nadolny</i> .....	55
XXIV Międzynarodowy Turniej Młodych Fizyków 2011 <i>Andrzej Nadolny</i> .....	58
O spotkaniu noblisty Wilsona z uczniami i nadchodzących zmianach w edukacji <i>Zofia Gołąb-Meyer</i> .....	61
Festiwal kół fizycznych <i>Stanisław Bednarek</i> .....	63
Konferencja dydaktyków, Łódź 2011 <i>Stanisław Bednarek</i> .....	65
Nadświetlne neutrina <i>Paweł Góra</i> .....	67
Jaka brzydka katastrofa! <i>Grzegorz Sęk</i> .....	69
Europejski Festiwal Nauki „Science on Stage” <i>Zenona Stojecka</i> .....	72
XVIII Międzynarodowa Konferencja Młodych Naukowców <i>Urszula Woźnikowska-Bezak</i> .....	73
Nagrody dydaktyczne PTF 2011 .....	77
Ogólnopolski konkurs fizyczno-fotograficzny „Zjawiska fizyczne wokół nas” <i>Zenona Stojecka</i> .....	78
Praca dla fizyka. Ośrodki z koherencją kwantową – nowe właściwości i zastosowania <i>Wojciech Gawlik</i> .....	79



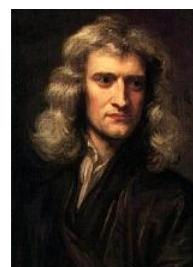
## Krótką historia pojęcia energii\*

Andrzej Staruszkiewicz  
Instytut Fizyki UJ

Przedstawię krótko historię pojęcia energii i powody, dla których to niezwykle użyteczne pojęcie tracimy bezpowrotnie w Ogólnej Teorii Względności, która musi być stosowana do opisu Wszechświata jako całości.

Zarówno słowo „energia” jak i nazwane tym słowem pojęcie pojawiają się stosunkowo późno w ponad trzechsetletniej historii fizyki. O ile pojęcia masy i siły występują w *Principiach* Newtona w całkowicie poprawnym znaczeniu, znaczeniu tożsamym ze znaczeniem współczesnym, o tyle słowa „energia” nie ma w *Principiach*, mimo że twórcy mechaniki, np. Huygens, zdawali sobie sprawę z zachowania całkowitej energii w procesach mechanicznych. W szczególności teoria zegara wahadłowego Huygensa jest *implicite* oparta na całej energii.

Kartezjusz wypowiedział myśl, że w procesach przyrodniczych pewna wielkość powinna być stała w czasie. Za taką uznał iloczyn masy i prędkości, który nazwał „ilością ruchu”. Leibniz wypowiedział taką samą myśl, ale za wielkość stałą w czasie uznał iloczyn masy i kwadratu prędkości, który nazwał „siłą żywą” (*vis viva*). (Czynnik  $1/2$  dodano później.) Dało to początek sławetnej debacie o tym, co jest prawdziwą miarą „ilości ruchu”. Kant swoją pierwszą pracę naukową poświęcił właśnie temu problemowi, czym zasłużył sobie na zabawny epigramat niemieckiego poety Lessinga, którego treść jest mniej więcej taka: *Wziąwszy się za problem, który go przerasta, Kant uczy świat jak mierzyć siły żywe, a nie potrafi zmierzyć swoich własnych.*



Isaac Newton  
(1643–1727)



Gottfried W. Leibniz  
(1646–1716)

\* Komentarz do artykułu Tamary M. Davis „Czy Wszechświat gubi energię?” (*Świat Nauki*, sierpień 2010, s. 31–37) wygłoszony na posiedzeniu Komisji Astrofizyki PAU w dniu 17.12.2010 i opublikowany w Pracach Komisji Astrofizyki PAU, Kraków 2011, t. 13, s. 33. Autor [AS] uważa, że opublikowanie tego artykułu jest smutnym świadectwem niskiego poziomu umysłowego ludzi, którzy redagują *Scientific American* i *Świat Nauki*. W całym artykule Tamary M. Davis autor [AS] znalazł tylko jedno zdanie prawdziwe, które brzmi tak: *całkowita energia Wszechświata nie jest ani zachowywana, ani tracona – po prostu nie można jej zdefiniować!*

Redakcja dziękuje profesorowi Kazimierzowi Grotowskiemu za udzielenie pozwolenia na przedruk artykułu.

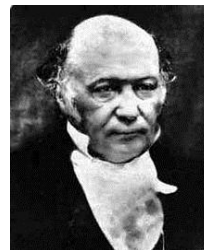
Problem ten rozstrzygnął w połowie XVIII wieku d'Alembert, który uznał, że jest to spór o słowa: obie wielkości są miarami „ilości ruchu” tylko różnymi, tak jak np. wzrost i waga są różnymi miarami wielkości człowieka lub zwierzęcia.

Równoległe do idei stałości w czasie pewnej wielkości kształtowała się idea, że procesy fizyczne odbywają się zgodnie z pewną zasadą najmniejszego oporu. Idea ta też pochodzi od Leibniza, znalazła m.in. wyraz w jego często ośmieszanej tezie, że żyjemy w świecie najlepszym z możliwych. Obecnie wielkość, która jest najmniejsza w ruchu rzeczywistym nazywamy działaniem Hamiltona. Pierwsze matematycznie poprawne sformułowanie zasady najmniejszego działania pochodzi od Eulera, który zresztą wielkodusznie odstąpił część swojej zasługi Prezydentowi Królewskiej Pruskiej Akademii Nauk o nazwisku Maupertuis. Działania Eulera i Maupertuis nie należy mylić z działaniem Hamiltona.

Za twórców współczesnego rozumienia prawa zachowania energii uważa się dość powszechnie Mayera, Helmholtza i Joule'a. Charakterystyczne, że Mayer i Helmholtz byli z wykształcenia lekarzami. Być może to właśnie zwróciło ich uwagę na fakt, że człowiek jest maszyną, która może wykonać pracę mechaniczną, np. wnieść walizkę na IV piętro. Zatem w realnym świecie energia mechaniczna może być zmieniona przez wysiłek mięśni, a więc stała w czasie może być co najwyżej sumą energii mechanicznej i wszystkich pozostałych form energii, np. cieplnej, chemicznej etc. Joule wyznaczył mechaniczny równoważnik ciepła tzn. ilość ciepła, którą można uzyskać z danej ilości energii mechanicznej. Podstawowa praca Helmholtza nosi tytuł *Über die Erhaltung der Kraft*; Helmholtz nazywa energię siłą, mimo że już Newton używał słowa siła we współczesnym znaczeniu. Termin „energia” we współczesnym znaczeniu wprowadzili w drugiej połowie XIX wieku brytyjscy fizycy Rankine, Thomson i Tait.

Maxwell wniósł bardzo ważny wkład określając energię, która jest zawarta w przestrzeni, w której istnieje pole elektromagnetyczne. W ten sposób do poprzednio znanych rodzajów energii doszła niezwykle ważna energia pola.

Na przełomie XIX i XX wieku prawo zachowania energii zaczęło być postrzegane jako najważniejsze prawo całej



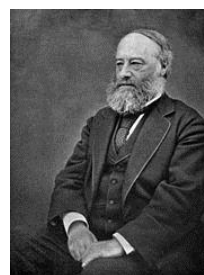
William R. Hamilton  
(1805–1865)



Julius R. von Mayer  
(1814–1878)



Hermann von  
Helmholtz  
(1821–1894)



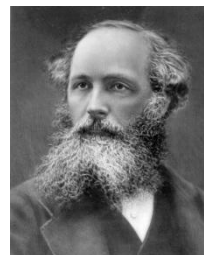
James Prescott Joule  
(1818–1889)

fizyki i podstawa naukowego poglądu na świat. Wpływowi uczeni, np. Laureat Nagrody Nobla Wilhelm Ostwald głosili pogląd zwany energetyzmem, według którego celem nauki jest badanie wzajemnych przemian różnych rodzajów energii.

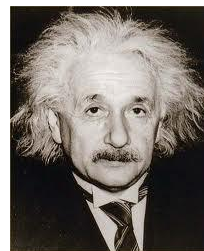
Po tej, z konieczności bardzo krótkiej prehistorii omówię trochę dokładniej trzy wydarzenia kluczowe dla współczesnego rozumienia pojęcia energii.

W roku 1905 powstała Szczególna Teoria Względności Einsteina. Teoria ta jest przykładem „konserwatywnej rewolucji”. Przy całej swojej doniosłości tworzy obraz świata, który tylko nieznacznie różni się od obrazu, który stworzył Newton. Jej znaczenie dla omawianego przez nas pojęcia energii bierze się z dwu okoliczności. Po pierwsze, Szczególna Teoria Względności jest koniecznym wstępem do Ogólnej Teorii Względności, która jest też rewolucją ale nie konserwatywną. Po drugie, energia w mechanice Newtona jest całą pierwszą równań ruchu, a więc z definicji wielkością określoną z dokładnością do dowolnej stałej. Szczególna Teoria Względności znosi tę dowolność; energia jest wielkością absolutną a nie odniesioną do umownie wybranego poziomu. Nie będę komentować znanego wszystkim równania  $E = mc^2$ , bo równanie to obrosło tak obszerną literaturą pisaną w stylu pani Davis, że wyprostowanie wszystkich głupstw przerasta moje siły i ramy tego wykładu.

Ogólna Teoria Względności ukończona przez Einsteina w roku 1916 zakłada, że przestrzeń i czas zwane razem czasoprzestrzenią stanowią rozmaitość różniczkową o strukturze Riemanna z nieznikającym tensorem Riemanna. To od razu unieważnia znane z mechaniki Newtona i Szczególnej Teorii Względności pojęcie energii całkowitej danego układu fizycznego. Ażeby to zrozumieć, rozpatrzmy zderzenie dwu kul bilardowych, zderzenie na tyle silne, że kule te rozpryskują się na części. Jest to oczywisty klasyczny odpowiednik eksperymentów robionych w Genewie przy użyciu urządzenia zwanego Large Hadron Collider. Podstawowa analiza tego procesu polega na ułożeniu bilansu całkowitego czteropędu. Przed zderzeniem całkowity czteropęd jest sumą wektorową czteropędów obu kul. Kule te są odległe od siebie, a więc musimy dodać do siebie czterowektory zaczepione w różnych punktach czasoprzestrzeni. W Szczególnej Teorii Względności jest to dobrze określona operacja, bo czasoprzestrzeń Szczególnej Teorii Względności jest wyposażona w teleparalelizm tzn. możliwość orzekania równoległości wektorów odległych od siebie. Możemy te wektory sprowadzić równoległe do wspólnego punktu i dodać stosując regułę równoległoboku opisaną jeszcze w *Principiach* Newtona. Tymczasem w czasoprzestrzeni Ogólnej Teorii Względ-



James Clerk Maxwell  
(1831–1879)



Albert Einstein  
(1879–1955)



ności nie ma teleparalelizmu, co znaczy, że cała procedura układania bilansu czteropędu jest od początku niewykonalna.

Człowiekiem, który chyba pierwszy dostrzegł głębokie konsekwencje odrzucenia teleparalelizmu był wielki matematyk Hilbert. Hilbert zaprosił do siebie do Getyngi matematyczkę Emmy Noether w określonym celu przyjrzenia się pojęciowym konsekwencjom nowej teorii grawitacji. Emmy Noether udowodniła w 1918 r. dwa niezwykle ważne twierdzenia, z których pierwsze stanowi ukoronowanie opisanego wcześniej doskonalenia w ciągu ponad dwu stuleci pojęcia energii. Sformułuję pierwsze twierdzenie Emmy Noether ze wszystkimi koniecznymi szczegółami, żeby nie popadać w pisaninę podobną do tej, która jest demonstrowana w omawianym artykule.

**Pierwsze Twierdzenie Emmy Noether:** Jeżeli działanie Hamiltona układu fizycznego nie zmienia się, jeżeli układ ten poddać aktywnie rozumianym transformacjom tworzącym jednoparametrową grupę transformacji ciągłych, to istnieje całka pierwsza równań ruchu charakterystyczna dla tej grupy.

Przez transformację ciągłą rozumie się transformację, która może być utworzona w sposób ciągły z jedynek. Przypominam o tym, bo pani Davis uważa za transformacje ciągle także odbicia lustrzane. Pierwsze twierdzenie Emmy Noether pozwala *określić* pojęcie energii: energia w mechanice Newtona i Szczególnej Teorii Względności jest to całka pierwsza równań ruchu, która istnieje dlatego, że układ fizyczny można przesunąć w czasie nie zmieniając jego działania Hamiltona. Otóż tego przesunięcia nie można dokonać w Ogólnej Teorii Względności, bo nie pozwala na to krzywizna czasoprzestrzeni. Łatwo to zrozumieć na następującym przykładzie: jedną książkę można przesunąć po drugiej, bo okładki obu książek są płaskie. Natomiast rękawiczki nie można przesunąć po ręce, bo nie pozwala na to krzywizna obu tych przystających do siebie powierzchni.

Czy utrata pojęcia energii jest czymś bardzo dotkliwym? Odpowiedź na to pytanie zależy od tego, do czego chcemy stosować całkę energii. W prostych problemach mechanicznych takich jak wahadło matematyczne całka energii jest niezwykle użyteczna, bo pozwala sprowadzić rozwiązanie równań ruchu do kwadratury. Jednakże w Ogólnej Teorii Względności mamy do czynienia z układem o nieskończenie wielu stopniach swobody i posiadanie jednej całki pierwszej w żaden sposób nie posuwa naprzód problemu całkowania. Z tego punktu widzenia strata jest niewielka. Z drugiej jednak strony całka energii, ze względu na swe unikalne własności, pozwala często przewidywać jakościowo zachowanie się układów fizycznych. Posiadanie jakiegoś ekwiwalentu w Ogólnej Teorii Względności byłoby bardzo cenne. Co więcej, wydaje się, że taki ekwiwalent powinien istnieć. Powinien istnieć dlatego, że w Przyrodzie zawsze



Amalie Emmy Noether  
(1882–1935)

sprawdza się pewna ogólna zasada równowagi, którą wyrażają nawet znane porzekadła takie jak „z pustego i Salomon nie naleje” lub „nie ma nic za darmo”, lub „nie istnieje darmowy obiad, istnieją tylko obiady, za które ktoś zapłacił” (powiedzenie Winstona Churchilla). Nie może być możliwe wyciągnięcie ze zmiennego pola grawitacyjnego, np. fali grawitacyjnej, dowolnie dużej ilości energii dającej się zużytkować w danym miejscu, np. na Ziemi. Matematyczne sformułowanie tych prostych i z całą pewnością trafnych intuicji byłoby niezwykle cenne.

Chciałbym te dość smutne rozważania zakończyć jakimś weselszym akcentem. Dlatego pozwolę sobie zwrócić uwagę, że od napisania *Principiów* (rok 1687) do udowodnienia Pierwszego Twierdzenia Emmy Noether (rok 1918) minęło  $1918 - 1687 = 231$  lat. To określa skalę czasu potrzebnego dla doskonalenia pojęciowego poważnej nauki jaką jest mechanika Newtona. (Gdyby zamiast Pierwszego Twierdzenia Emmy Noether użyć twierdzenia Kołmogorowa, Arnolda i Mosera, skala ta jeszcze by się wydłużyła.) Jeżeli dodać 231 lat do roku 1916 (rok ukończenia Ogólnej Teorii Względności) to otrzymamy  $1916 + 231 = 2147$ . Stąd wynika, że mamy jeszcze trochę czasu, ażeby nie okazać się ludźmi mniej kreatywnymi niż nasi wielcy poprzednicy.



## **Polsko-Ukraiński Konkurs Fizyczny „Lwiątko 2012”**

*Stowarzyszenie Absolwentów i Przyjaciół V LO  
im. Augusta Witkowskiego w Krakowie*

Zapraszamy gimnazja, licea, licea profilowane i technika do udziału w X edycji **Polsko-Ukraińskiego Konkursu Fizycznego „Lwiątko 2012”**. Konkurs zostanie przeprowadzony **26 marca 2012 roku**.

Szkoły mogą zgłosić uczestników w terminie **do 31 stycznia 2012 roku** wyłącznie za pośrednictwem formularza zamieszczonego na stronie internetowej Konkursu.

Więcej informacji dotyczących harmonogramu oraz zasad Konkursu można uzyskać na stronie internetowej Konkursu **www.lwiatko.org**. Tu również można znaleźć zadania konkursowe z lat ubiegłych.



## Komputery i los (I)

*Jerzy Karczmarczuk*

*Zakład Informatyki, Uniwersytet w Caen, Francja*

*Bóg nie gra w kości.*

(Albert Einstein)

*Każdy, kto sądzi, że można generować liczby losowe za pomocą algorytmów arytmetycznych, jest, oczywiście, w stanie grzechu.*

(John von Neumann)

### 1. Wstęp

Niniejsze opracowanie jest poświęcone generowaniu obiektów losowych na komputerze. „Obiekt” oznacza tutaj liczby (całkowite albo rzeczywiste), ale także wektory i inne konstrukcje wielowymiarowe, funkcje losowe, permutacje lub inne obiekty kombinatoryczne, kolory, przedziały czasowe itp. Jest to bardzo ważna dziedzina, o olbrzymiej liczbie zastosowań, więc mimo iż temat nie dotyczy bezpośrednio fizyki tylko jej metod rachunkowych, może się przydać niektórym czytelnikom.



Rys. 1. Fresk z Pompei: gracze w kości

Nas oczywiście interesują zastosowania związane z fizyką, np. symulacja zjawisk fizycznych lub obliczenia statystyczne, ale nie należy zapominać, że zakres zastosowań liczb losowych jest szerszy i obejmuje kryptografię, szereg metod algorytmicznych (całkowanie Monte-Carlo, optymalizację itp.), symulację systemów komunikacyjnych, syntezę obrazów i gry komputerowe, oraz przetwarzanie i analizę tekstów w językach naturalnych.

Świat rzeczywisty, a także świat gier symulacyjnych, jest „nieokreślony”, nieregularny i nieprzewidywalny i programy komputerowe należy móc dostosować do zagadnień z tym związanych. Problem jest jednak skomplikowany, gdyż tak „naprawdę”, to nie wiemy, co to znaczy: „losowy” [1]. Słowo *los* w naszym języku posiada kilka kompletnie sprzecznych ze sobą znaczeń, a jedno z nich oznacza całkowite przeciwieństwo nieokreśloności, a mianowicie: przeznaczenie... Jednak zarówno filozoficzne *Fatum*, które (jeśli ktoś chce...) determinuje, co się z nami stanie, jak i kompletny bałagan, mają jedną

cechę wspólną: nie jesteśmy w stanie przewidzieć, co będzie za chwilę, jaką drogę wybierze elektron albo człowiek, przyszłość jest przed nami ukryta, mimo iż w prostych przypadkach równania ruchu sprawdzają się dobrze<sup>1</sup>.

Tak więc, możemy chwilowo zastąpić słowo „losowy” przez „nieprzewidywalny”. Nie odpowiada to na pytanie, dlaczego czegoś nie da się przewidzieć, i co można racjonalnie wywnioskować z danych „losowych”. Pozwala jednak zauważyć, że „losowość” danych uwidacznia się, gdy dysponujemy całym ciągiem oraz pozwala stwierdzić, że analiza statystyczna jest potężnym narzędziem, które określa ściśle i dokładne parametry tych ciągów: średnie, dyspersje, rozkłady spektralne, korelacje statystyczne itp., co pozwoliło np. określić związki pomiędzy termodynamiką a mechaniką statystyczną. Dzięki niej stworzyliśmy skuteczne narzędzia obliczeniowe takie jak metody Monte-Carlo, bez których uprawianie fizyki byłoby trudne.

Dziedzina „losowości świata” pozostaje fascynująca i przyprawia o ból głowy zarówno filozofów jak i matematyków. Można spotkać się z twierdzeniem, że losowość wynika z niemożliwości ustalenia przyczyn jakiegoś zdarzenia. Jest to raczej nieściśle, typowe zachowania nieregularne w fizyce wynikają głównie z dwóch powodów: niestabilność równań opisujących procesy oraz z jednoczesnego wpływu wielu konkurujących przyczyn. (Dodajmy do siebie wiele różnie wyglądających funkcji, prawdopodobnie otrzymamy okropny bałagan, funkcję wyglądającą na losowy szum...) Obie kategorie: niestabilność i mieszanie pozwalają symulować bardzo dobrze procesy losowe na komputerze, z pełną świadomością, że jest to tylko modelowanie. Nie będziemy zajmować się prawdziwymi liczbami losowymi, generowanymi przez procesy fizyczne.

Artykuł jest przeznaczony dla Czytelnika niebojącego się prostych wzorów z analizy i mającego pewne pojęcie o własnościach prawdopodobieństw; probabilistyka jest podstawową teorią pozwalającą mówić o zmiennych losowych. Nie podajemy programów komputerowych, są one proste i krótkie.

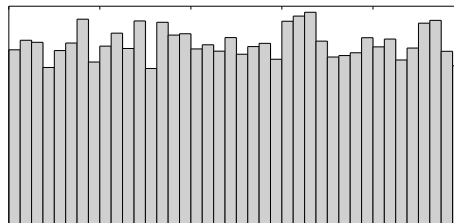
## 2. Co to jest liczba losowa?

Liczba  $0,75000 = 3/4$  intuicyjnie „nie zasługuje” na miano liczby losowej. Ale czy  $0,415926535897932384626\dots$  można nazwać liczbą losową (powiedzmy, w zakresie  $0-1$ )? Wygląda ona „byle jak”, bez widocznych na pierwszy rzut oka regularności. Można jednak wypowiedzieć tezę, że pytanie o losowość jednej liczby nie ma sensu. Jak stwierdziliśmy, losowość uwidacznia się, gdy możemy mówić o rozkładzie prawdopodobieństwa, gdy mamy do czynienia z całym ciągiem, np. że ciąg (skończony, np. 100 000) liczb:  $\dots, 0,53951, 0,80829, 0,28072, 0,41163, 0,43648, 0,48126, 0,01840, 0,67538, \dots$  itd. spełnia pewne

---

<sup>1</sup> Nie twierdzimy, że równania w skomplikowanych przypadkach się nie sprawdzają, ale dla skomplikowanych równań dla wielu ciał trajektorie są niestabilne, nawet najmniejsze błędy narastają lawinowo i *dokładne* sprawdzenie czegokolwiek jest niezwykle trudne...

kryteria statystyczne. Sprawdzamy, że średnia  $\langle x \rangle = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k$  jest bliska 0,5, że wariancja  $\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$  wynosi ok. 1/12, co odpowiada rozkładowi równomiernemu na odcinku 0–1, że rozrzut tych liczb wygląda na losowy (co pokazuje histogram na rys. 2), i to fizykowi na ogół wystarczy. Może użyć tego ciągu do symulacji lub do



Rys. 2. Histogram rozkładu równomiernego



Stanisław Ulam (1909–1984), wybitny amerykański matematyk polskiego pochodzenia, wprowadził do fizyki metody Monte-Carlo

Monte-Carlo. (Niektóre zastosowania liczb, wektorów i funkcji losowych zostaną omówione później). To, czy ciąg jest „rzeczywiście” nieprzewidywalny, utworzony dzięki jakiemuś mechanizmowi fizycznemu opartemu, np. o szum termiczny, czy jest stabilizowany, czy jest wynikiem prostego algorytmu, nie ma w zasadzie znaczenia. Testy odróżniające dobre generatory od złych są zwykle oparte o zdrowy rozsądek. Ba, o ile w kryptografii zależy nam, aby ukryć mechanizm generacji i maksymalnie utrudnić przewidzenie następnego elementu ciągu, w technikach obliczeniowych fizyki korzystnym jest, aby móc dokładnie powtórzyć daną sekwencję losową na innym komputerze, w innym języku itp., co pozwoli mieć więcej zaufania do stabilności i rzetelności użytych metod numerycznych.

Precyzyjne metody algorytmiczne, pozwalające generować długie ciągi liczb losowych umożliwiają zwykle przerwanie generacji i jej wznowienie od punktu przerwania, co jest też ważnym elementem statystycznej jakości ciągu, gdy program musi być wykonywany na raty. Tak więc, **w większości przypadków, w ciągach liczb losowych używanych przez fizyków nie ma nic „naprawdę” losowego!** Wyglądają one na losowe, i to wszystko. Zwykle nazywa się je pseudolosowymi, i tylko nimi będziemy się dalej zajmować.

Zanim jednak przejdziemy do prostych algorytmów generacji tych ciągów, uczciwość nakazuje przeanalizowanie pewnego paradoksu: stwierdziliśmy, że mówienie o losowości pojedynczych liczb ma mało sensu. Jednak 0,75 i 0,4159265358979... wyglądają bardzo różnie, ta druga „może wyglądać” na losową. Pierwsza nie, w dwójkowym układzie pozycyjnym ten ułamek ma kształt 0,1100000000... co na zdrowy rozsądek z losowością nie ma nic wspólnego. Jednak wyrażenie  $\sin 0,75 = 0,68163876002333412...$  jest bardziej nieregularne, cyfry są rozrzucone bezładnie. Nasza poprzednia przykładowa liczba losowa nie została wymyślona, jest to  $10(\pi - 3,1)$ . Możemy więc rozważać losowość pojedynczych liczb rzeczywistych, traktowanych jako *ciągi cyfr*,

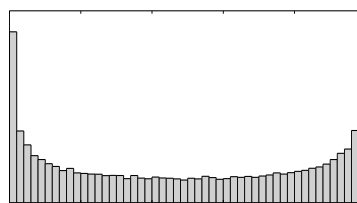
w dowolnym układzie pozycyjnym. O ile liczby wymierne w dowolnym systemie pozycyjnym są ułamekami okresowymi, liczby przestępne (np.  $\pi$ ), są „losowymi” ciągami cyfr, spełniającymi szereg testów statystycznych. Okazuje się, że praktycznie wszystkie wielkości pomiarowe (oraz wynikające z obliczeń) w fizyce, mają taki charakter. Świat liczb w przyrodzie wygląda na „losowy”.

W teorii liczb losowych spotyka się „definicję” (nieścisłą) ciągów losowych jako takich, których nie da się skompresować. Żadna transformacja, żaden algorytm *odwracalny* (bezstratny!) nie skróci ciągu losowego. O ile metody kompresji tekstów czy obrazów dają bardzo dobre wyniki, pozwalające na kilkukrotne zmniejszenie długości dokumentów na dysku lub w sieci, po kompresji dokument wygląda jak szum i skrócić go powtórnie już się nie da. Algorytmy kompresji funkcjonują tylko dla ciągów charakteryzujących się dużą regularnością. Tym niemniej, ciągi otrzymywane przez proste algorytmy są statystycznie akceptowalne, mimo że sam algorytm, zwykle krótki, może być traktowany jako „kompresja” generowanego ciągu. Tak więc należy odróżnić stosowalność liczb losowych do symulacji, optymalizacji itp., od pewnych własności teoretycznych generowanych ciągów. Fizyk chcący posługiwać się generatorami algorytmicznymi musi wykazać pewną nonszalancję i oderwanie od faktu, że jego generatory dają wyniki w pełni przewidywalne.

Niektórzy filozofowie nauki zastanawiają się czy wartości bezwymiarowych stałych przyrody, np. ładunku elektronu, są wynikiem „przypadku” (a jeśli tak, to *jakiego?*) czy są dane przez wzór matematyczny. Jednak jakakolwiek byłaby odpowiedź na to pytanie, liczba ta prawdopodobnie przejdzie przez testy losowości (czego nie zrobiono, gdyż znamy ją niezbyt dokładnie).

### 3. Metody kongruencyjne generowania liczb losowych

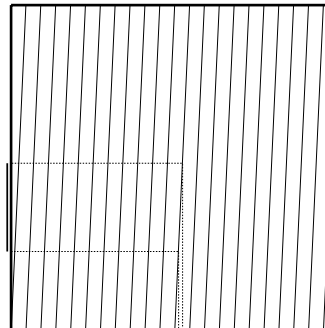
W rachunkach także spotykamy liczby o charakterze losowym! Wiele ciągów  $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$  zadanych wzorami typu  $x_n = f(x_{n-1})$ , zachowuje się w ten sposób. Niektóre równania ewolucji z dyskretnym czasem, np. tzw. odwzorowanie logistyczne:  $x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n)$  dla  $\lambda = 4$  generują chaos, kolejne wartości  $x$  są rozrzucone bezładnie między 0 a 1. Ten model był już dyskutowany w *Fotonie*. Nie służy on jako (typowy) generator liczb losowych, gdyż rozkład częstości liczb przezeń generowanych nie jest równomierny (lub jednorodny). (Dobrym, ambitnym ćwiczeniem jest wykazanie, że proces logistyczny dla  $\lambda = 4$  daje rozkład  $p(x) = 1/(\pi\sqrt{x(1-x)})$  dla  $x$  między 0 a 1).



Rys. 3. Rozkład wyników równania logistycznego

Jednak od dawna wiadomo, a w latach 50. XX wieku Lehmer opracował to dokładnie, że prosta arytmetyka operacji na skończonym przedziale (reszt):

$x_{n+1} = R \cdot x_n \bmod M$ , generuje zupełnie niezależne ciągi losowe, i ta metoda, zwana kongruencyjną, stanowi podstawę większości używanych generatorów na świecie, gdyż jest bardzo szybka. (Metody dające lepsze generatory są powolniejsze). Wystarczy wziąć dużą liczbę  $R$ , np. 987171,1679, wartość początkową  $x$  między 0 a 1, pomnożyć  $R$  przez  $x$ , a następnie przez wyniki operacji i odrzucać za każdym razem część całkowitą wyniku. Tak otrzymaliśmy nasz pierwszy ciąg losowy w rozdziale 2. Dlaczego to działa?



Rys. 4. Funkcja  $y = R \cdot x \bmod 1$

Jak widzimy na wykresie tej funkcji na rys. 4, (ze znacznie mniejszym  $R$ , w przeciwnym wypadku linie byłyby praktycznie pionowe i kwadrat byłby wypełniony do nieczytelności), kwadrat 0–1 jest dość gęsto wypełniony bardzo stromymi liniami. Bardzo wąski przedział  $x$  jest odwzorowany w znacznie szerszy, funkcja jest *niestabilna*. Nawet maleńkie odchylenie od jakiejś wartości (także błędy zaokrąglenia itp.) narastają lawinowo, a ponieważ obrazem funkcji jest zawsze skończony przedział 0–1, przedział ten jest iteracyjnie „zwijany” do odcinka 0–1 i szatkowany na mnóstwo fragmentów. W wyniku wielu iteracji dostajemy rozrzut wyglądający na chaotyczny. Jest to nienajgorszy generator, bardzo prosty do zaprogramowania.

Nie jest on jednak wykorzystywany „zawodowo”, gdyż arytmetyka na liczbach rzeczywistych (zmiennoprzecinkowych) nie jest łatwa do porównywania na różnych komputerach. Liczba miejsc znaczących i algorytmy zaokrąglania mogą się różnić, więc taki generator nie byłby przenośny i trudniejszy do analizy. Możemy źle wybrać czynnik mnożący i dostać generator nie nadający się do niczego. (Historycznie operacje rzeczywiste były także o wiele powolniejsze niż całkowite). Standardem więc stały się metody kongruencyjne oparte na liczbach całkowitych. Należy wybrać (w miarę możliwości dużą) liczbę całkowitą  $M$  zwaną modułem generatora, jakąś wartość początkową  $X_0$  z przedziału  $0 : M - 1$ , a następnie iterować  $X_{m+1} = A \cdot X_m + C$ . Aby uzyskać liczbę rzeczywistą z przedziału 0–1, wystarczy wyniki dzielić przez  $M$ . Zero będzie należeć do generowanego przedziału, a dokładnie 1 – nie.

Algorytm ten może oczywiście wygenerować tylko  $M$  różnych liczb, potem będą się one powtarzać.

Stałe  $A$  i  $C$  muszą spełniać pewne kryteria oparte na teorii liczb, w przeciwnym wypadku generator będzie powtarzał krótkie, nieużyteczne serie. Weźmy  $M = 100$ ,  $A = 27$ ,  $C = 17$ ,  $X_0 = 0$ . Ciąg liczb dla tego generatora to 17, 76, 69, 80, 77, 96, 9, 60, 37, 16, 49, 40, 97, 36, 89, 20, 57, 56, 29, 0, po czym seria się powtarza. Ciąg zawiera tylko 20 różnych wartości, a można było trafić jeszcze gorzej. Dla  $A = 30$ , ciąg wynikowy to 17, 27, po czym liczba 27 powtarza się w nieskończoność. Nie można bez zastanowienia wybrać byle jakich para-

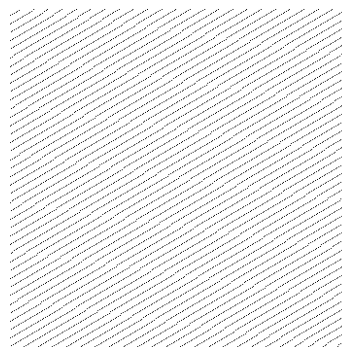
metrów. Dla prostego generatora kongruencyjnego parametry powinny spełniać następujące kryteria (patrz książka Knutha):

- $M$  i  $C$  winny być względnie pierwsze (nie posiadać wspólnego dzielnika), wyjątkiem jest  $C = 0$  omówione poniżej.
- Definiujemy  $B = A - 1$ . Dla każdej liczby  $p$ , będącej podzielnikiem (pierwszym)  $M$ , musi ona być także podzielnikiem  $B$ .
- Jeżeli  $M$  dzieli się przez 4, także i  $B$  musi być wielokrotnością 4.

Ponieważ  $100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$ , liczba  $B$  musi dzielić się przez 20.  $A = 61$  jest więc dobrym parametrem, dostaniemy 100 różnych liczb w ciągu. Ale jakość generatora zależy od tego co chcemy z nim zrobić! Po podzieleniu przez  $M$  dostaniemy  $M$  liczb rzeczywistych, które można wykorzystać do symulacji, gier, itp. W żadnym jednak wypadku nie można wykorzystać ciągu  $X$  do generacji losowych bitów przez wzięcie reszty z dzielenia przez 2. Dostaniemy zawsze 0, 1, 0, 1, 0,... i podobnie rzecz będzie się miała z parami bitów – resztami z dzielenia przez 4.

Często, ze względu na wygodę, przyjmuje się  $C = 0$ , co wymaga innych kryteriów spełnianych przez pozostałe parametry. Dla czytelnika nieobeznajmionego z teorią liczb, kryteria te będą niezrozumiałe, więc ich nie podamy. Chętni winni skorzystać ze stabilizowanych propozycji, dostępnych w książkach i Internecie. Jednym z typowych zestawów parametrów jest  $M = 2^{31} - 1 = 2147483647$ ,  $A = 7^5 = 16807$ .  $M$  jest tzw. liczbą pierwszą Mersenne'a. Ciąg generowany przez taki generator ma długość maksymalną  $M - 1$ . (Oczywiście nie można zaczynać od  $X_0 = 0$ ). Ogólnie, okres jest maksymalny jeśli  $M$  jest liczbą pierwszą. Często jednak wykorzystuje się  $M = 2^K$ , co nie gwarantuje najlepszej jakości statystycznej, ale jest szybkie, gdyż reszta z dzielenia przez  $M$  jest otrzymywana tanio (odrzuca się bity wyższych rzędów), a gdy  $K$  jest długością słowa maszynowego przechowującego liczby całkowite, np.  $K = 31$ , wtedy za darmo: ignoruje się bity nadmiaru przy operacjach arytmetycznych. Dla tej wartości  $M$ ,  $A$  musi spełniać warunek, że reszta z dzielenia przez 8 jest równa 3 lub 5. Okres generatora jest wtedy równy  $2^{K-2}$ .

Może także (lecz nie musi) wystąpić dodatkowy kłopot, a mianowicie *korelacje* między sąsiednimi liczbami trudniejsze do wykrycia na pierwszy rzut oka. Weźmy generator z  $M = 2^{16}$  i z rozsądnym  $A$ . Ciąg generowanych liczb wygląda rozsądnie, ale jeśli utworzymy pary kolejnych liczb i potraktujemy je jako współrzędne w kwadracie 0–1, powstały obraz jest regularny. Tworząc wektory 3- lub więcej wymiarowe,



Rys. 5. Dwuwymiarowy rozkład utworzony przez generator kongruencyjny



możemy otrzymać obrazy jeszcze regularniejsze, a ponieważ rozkłady wielowymiarowe w fizyce są bardzo potrzebne, proste generatory dostępne w standardowych bibliotekach różnych implementacji większości języków programowania są mało przydatne. Problemowi można zaradzić na kilka sposobów, np. przez użycie wielu generatorów z różnymi parametrami, albo nawet tylko dwóch generatorów: głównego, który wypełnia tablicę (kilkadziesiąt lub kilkaset elementów) i pomocniczego, który losuje jeden z elementów tej tablicy. Po dostarczeniu tego elementu jako wyniku, generator główny „zapełnia lukę”. W ten sposób sąsiednie wyniki generatora głównego są od siebie oddalone i pomieszane.

#### 4. Inne generatory jednorodne

W 1997 roku Makoto Matsumoto i Takuji Nishimura wymyślili dość szybki generator noszący nazwę *Mersenne Twister*, o okresie  $2^{19937} - 1$  (ponad  $10^{6000}$ ), losowo rozrzucony w przestrzeniach aż do 623 wymiarów. Stał się on profesjonalnym standardem [3], ale w typowych zastosowaniach (zwłaszcza dla prostych symulacji oraz gier) jest on ciężki w implementacji, wymaga wewnętrznej tablicy o ponad 600 elementach i kodu zajmującego pół strony. Jeżeli wyniki zostaną skonwertowane do postaci całkowitej, albo zmiennoprzecinkowej 32- lub 64-bitowej, przy tak olbrzymim okresie, liczby będą się powtarzać znacznie częściej, ale powtórzenie jednej liczby nie oznacza, że cała sekwencja się powtórzy – następne wyniki będą rozrzucone zupełnie inaczej. Algorytm Mersenne Twistera jest zbyt skomplikowany, aby go tu przytaczać, niech jednak czytelnik zda sobie sprawę, że tworzenie nowych wyrafinowanych generatorów nadal postępuje! Naukowiec, czy inżynier, lub twórca gier komputerowych, który powie sobie, że przecież jego ulubiony język programowania posiada bibliotekę zawierającą jakiś generator liczb losowych i nie ma sensu uczyć się metod generacji, ryzykuje miano partacza.

##### 4.1. Generatory oparte o uogólnienia ciągu Fibonacciego

Uogólnieniem metod kongruencyjnych są algorytmy kombinujące kilka członów wygenerowanego ciągu. Ponieważ znany jest ciąg Fibonacciego, zdefiniowany wzorem  $F_0 = 0, F_1 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ , ciągi oparte o regułę  $S_n = S_{n-j} + S_{n-k}$  są również zwane uogólnionymi ciągami Fibonacciego, i wzór

$$S_n = S_{n-j} + S_{n-k} \pmod{M}, 0 < j < k$$

bywa nazywany generatorem Fibonacciego. Zamiast dodawania można użyć innych działań, np. mnożenia. Ten generator wymaga dodatkowej pamięci na przechowanie poprzednich wyników, oraz inicjalizacji (innym generatorem), ale jest szybki i bywa używany w niektórych programach. Oto kilka wariantów par  $(j, k)$  podawanych w literaturze:

$$(j = 24, k = 55), (j = 31, k = 63), (j = 38, k = 89), (j = 83, k = 258),$$

Dla małych wartości parametrów okres generatora jest również niewielki.

Od Redakcji:

#### Ciąg Fibonacciego

Ciąg Fibonacciego jest spektakularnym dowodem na głębokie związki pomiędzy naturą i kulturą a matematyką. Ciąg Fibonacciego zaczyna się od liczb 1, 1 a każdy kolejny wyraz równa się sumie dwóch wyrazów poprzednich: **1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89,...** Liczby będące wyrazami ciągu noszą nazwę liczb Fibonacciego.

Liczby ciągu Fibonacciego mają zastosowanie do opisu notowań giełdowych, do opisu budowy roślin, np. słonecznika, ananasa, szyszki sosny, do opisu wzrostu liczby królików, pszczół. Liczby Fibonacciego odnajdujemy w architekturze, w poezji, a także w muzyce. Dla przykładu: liczba płatków wielu kwiatów jest jedną z liczb Fibonacciego: jaskry mają 5, kwiaty sangwinarii 8, a astry często 21.

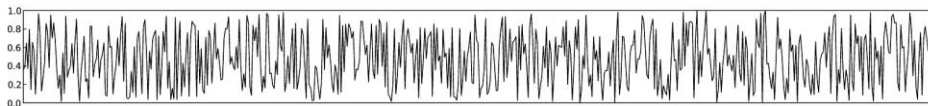
#### 4.2. Funkcje ergodyczne

Podstawową cechą algorytmu generatora jest jego „niestabilność”, następna liczba ma „mało wspólnego” z poprzednią. Możemy sobie więc wyobrazić funkcje, które nie wymagają procesu iteracyjnego (przykładania jej do poprzedniego wyniku), ale takie, które dla  $x = 1, 2, 3, \dots$  dostarczają  $f(x)$  chaotycznie. Takie funkcje znajdują zastosowania w informatyce, w bazach danych, w kodowaniu itp., i noszą nazwę funkcji mieszających. Pozwalają one przekształcić ciąg liter (np. tytuł książki) na stosunkowo krótką liczbę, służącą do indeksowania tablicy tytułów, co przyspieszy szukanie (potem trzeba sprawdzić zgodność, gdyż może zajść kolizja – ten sam wynik odpowiada różnym tytułom). Fizyk nazwie takie funkcje ergodycznymi, proces ergodyczny to taki, w którym zachowanie układu zależy bardzo słabo od warunków początkowych. Oto przykład takiej funkcji, która dla  $n = 1, 2, 3, \dots$  generuje ciąg pseudo-losowy liczb 32-bitowych z przedziału 0 – 1:

$$x = (n \cdot 2^{13})^n$$

$$f = 1 - ((15731 x^3 + 789221 x + 1376312589) \& (2^{31} - 1))/2^{31}$$

Operator (^) oznacza alternatywę wyłączającą (różnicę symetryczną) dla każdego bitu liczb całkowitych będących argumentami: 0 jeśli dwa bity są identyczne, 1 w przeciwnym wypadku. Operator (&) jest iloczynem logicznym bitów; tutaj służy do otrzymania reszty z dzielenia przez  $2^{31}$ . Na rys 6. widzimy wykres funkcji  $f(n)$  dla kilkuset sąsiednich wartości  $n$ :



Rys. 6. Funkcja „ergodyczna”

Oczywiście można posłużyć się innym zestawem parametrów liczbowych, ale taki generator należy wszechstronnie przetestować przed użyciem, gdyż nie ma prostych metod teoretycznych oceny ich jakości. Ich zaletą w porównaniu z generatorami „klasycznymi” jest brak wewnętrznej pamięci. Niczego nie potrzeba pamiętać, generator jest „czystą” funkcją matematyczną, wymaga tylko jakiegoś argumentu. (Nie jest to jednak rozwiązanie naturalne, gdyż ten argument funkcji ergodycznej jest fikcyjny, pozbawiony sensu).

### 5. Kilka testów jakości generatorów

Podstawowy test to sprawdzenie, czy rozkład się zgadza z teoretycznym, w przypadku rozkładu równomiernego – czy histogram jest płaski. Można to zrobić „ręcznie”, wizualnie, albo sprawdzić, że średnie wysokości kolumn i ich dyspersja nie odbiegają od norm. Tutaj zaczyna się problem, którego w tym artykule nie możemy poruszyć: co to jest „norma”, gdyż oczywiście będą odchylenia, a nie ma tu miejsca na omówienie testów  $\chi^2$  itp. Zainteresowani Czytelnicy winni sięgnąć do literatury dotyczącej testów. Książka Knutha [2] podaje wiele użytecznych, łatwych w zastosowaniu.

Można sprawdzić najpierw numerycznie podstawowe momenty, średnią, dyspersję, czy asymetrię rozkładu, co nie wymaga tworzenia wykresów.

To nie wystarczy, sekwencja  $x_n = n \cdot \alpha \bmod 1$  dla „byle jakiego”  $\alpha$  rzeczywistego, „nieregularnego” (tj. nie będącego prostą liczbą wymierną), przejdzie ten test. (Ten generator jest równoważny kongruencyjnemu, z  $A = 1$ ,  $C = 0$ ). Liczby będą równomiernie rozłożone w przedziale 0–1, ale będą silnie skorelowane.

Następnym testem będzie więc sprawdzenie, czy nie ma ewidentnych korelacji między kolejnymi liczbami. Dwuwymiarowy wykres tej liniowej sekwencji dostarczy nam kresek, jak na rys. 5. Nie możemy omówić tutaj bardziej skomplikowanych testów, np. spektralnych, korelacji w wielu wymiarach itp., ale zagadnienie jest ważne!

### 6. Rozkłady nierównomierne

Mimo, iż generatory jednorodnie stanowią punkt wyjścia, bezpośrednio ich użycie do zagadnień fizycznych jest niewielkie. W fizyce takie rozkłady prawdopodobieństwa występują dość rzadko. Oto kilka innych rozkładów, które mogą nas interesować:

1. Rozkład „równomierny” w nieskończonym przedziale, np. nieograniczony ciąg zdarzeń, np. emisji cząstek przez substancję promieniotwórczą, albo przez osłabiony laser, itp. Zadana jest stała gęstość tych wydarzeń w czasie, ale nie da się tego sprowadzić do jednorodnego rozkładu w skończonym przedziale, przedział czasowy jest od zera do nieskończoności. Zwykle ten mechanizm probabilistyczny nazywa się procesem Poissona. Problem gene-

racji należy sformułować przy użyciu wielkości skończonych, np. generujemy czas oczekiwania na następne wydarzenie.

2. Fluktuacje wielkości fizycznych wokół średniej. To jest jeden z najbardziej rozpowszechnionych rozkładów, w którym małe odchylenia od średniej są znacznie prawdopodobniejsze od dużych, ale dowolne są możliwe, przedział jest nieskończony. Ten rozkład jest zadany funkcją Gaussa,  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp(-(x - \langle x \rangle)^2 / 2\sigma^2)$ ,

gdzie  $\sigma$  jest dyspersją. Dla średniej równej zero i dyspersji równej jeden,

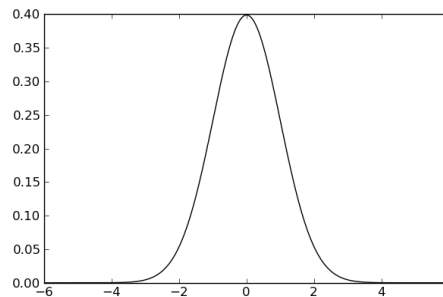
ten rozkład nazywamy normalnym. Pakiety do obliczeń naukowych zwykle zawierają wbudowany generator tego rozkładu. Bywa on punktem wyjścia do generowania typowych funkcji losowych (szumów).

3. Wiele rozkładów o charakterze geometrycznym, zwykle wielowymiarowych. Np. jednorodny rozkład kierunków w przestrzeni (lub: jednorodny rozkład punktów na powierzchni sfery, ewentualnie wewnątrz kuli), co może służyć do symulacji i wizualizacji wybuchów, fajerwerków itp. Mimo „jednorodności”, te rozkłady są odmienne od jednorodnych rozkładów w przedziale.

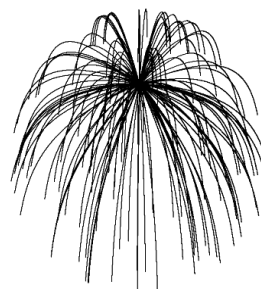
Czasami mamy do czynienia z rozkładem prawdopodobieństwa określonym doświadczalnie, z mierzonych częstości jakiegoś zjawiska. Używamy wtedy rozkładu stabilizowanego, albo przybliżonego jakąś funkcją (wielomianem, wymierną, kombinacją funkcji wykładniczych itp.). Wtedy pojawia się konieczność stworzenia algorytmu bardzo uniwersalnego, zdolnego do generowania dowolnych rozkładów. Metody generacji rozkładów dyskretnych:  $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$  dla  $k$  całkowitego, z rozkładem prawdopodobieństwa  $p_k$ , różnią się od algorytmów ciągłych, gdy gęstość rozkładu prawdopodobieństwa  $p(x)$  jest funkcją, mimo iż w informatyce wszystko jest dyskretne. Rozważymy więc różne metody algorytmizacji dla tych generatorów.

### 6.1. Metoda eliminacji (lub odrzutu)

Przypuśćmy, że gęstość prawdopodobieństwa  $p(x)$  jest zadana pewną funkcją w skończonym przedziale i bez osobliwości, tak, że można ją zamknąć w prostokącie.

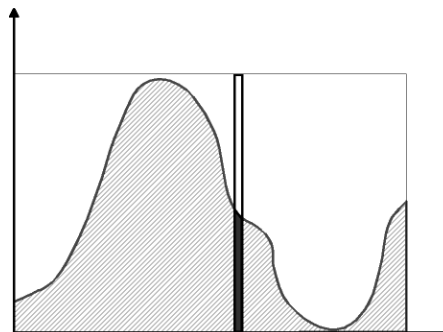


Rys. 7. Krzywa normalna Gaussa



Rys. 8. „Sztuczne ognie”

Algorytm generacji wymaga dwóch liczb losowych o rozkładzie jednorodnym. Pierwsza wybiera  $x$  między zadanymi granicami. To nie wystarczy, gdyż – jak widać na rys. 9 – liczby nieco na lewo od połowy przedziału winny pojawiać się częściej niż wartości na prawo. Teraz losujemy drugą liczbę, „pionową”  $r$ , z przedziału od dolnej do górnej granicy prostokąta zawierającego wykres. Spójrzmy na kolumnę, odpowiadającą wylosowanemu  $x$ -owi. Jeżeli  $r$  jest mniejsze od  $p(x)$  dla tej wartości  $x$ , wartość ta zostaje zaakceptowana, generator zwraca ją jako wynik. Jeżeli  $r$  jest większe – wartość  $x$  zostaje odrzucona i generator powtarza całą operację.



Rys. 9. Metoda odrzutu

Widać wyraźnie, że w pobliżu maksimum funkcji,  $r$  prawie zawsze będzie mniejsze od  $p(x)$ , więc prawie wszystkie wartości  $x$  zostaną zaakceptowane. W pobliżu minimum, losowane wartości „pionowe” będą na ogół większe od wartości gęstości prawdopodobieństwa i zaakceptowanych wartości  $x$  będzie znacznie mniej.

Metoda jest łatwa w zastosowaniu i często wystarczająco efektywna, mimo „strat” odrzuconych punktów. Jednak te straty mogą też być zbyt poważne. Jeśli rozkład  $p(x)$  ma ostre piki, a większość powierzchni prostokąta leży nad wykresem funkcji, większość wygenerowanych punktów zostanie odrzucona.

Omówiona technika w naturalny sposób uogólnia się na rozkłady wielowymiarowe, ale tutaj straty mogą być bardzo znaczne. Nie każdy zdaje sobie sprawę, że w większej liczbie wymiarów więcej przestrzeni się „marnuje”. Na przykład, jeśli chcemy wygenerować punkty losowe w kole o średnicy 1, możemy generować punkty  $(x, y)$  z kwadratu 0–1, a następnie odrzucać wszystkie punkty na zewnątrz koła. Stracimy ok. 21 procent punktów, powierzchnia koła zajmuje 0,785 powierzchni kwadratu. Ale trójwymiarowa kula zajmuje tylko 0,52 objętości kostki jednostkowej, a w czterech wymiarach ok. 0,31, i to się pogarsza, funkcje o wykresach „jakichkolwiek”, nieregularnych, również zajmują mały procent przestrzeni. Można zadać sobie pytanie po co rozkłady w przestrzeniach o dużej, „niefizycznej” liczbie wymiarów. Jest to bardzo potrzebne fizykowi i zostanie omówione później.

## 6.2. Metoda odwracania dystrybuanty

Zadajmy pytanie: czy w oparciu o daną funkcję rozkładu  $p(x)$  można utworzyć taką funkcję  $h(r)$ , że dla  $r$  losowanego z rozkładu równomiernego, którego generację mamy opanowaną, jej wynik jest rozłożony z gęstością  $p(x)$ . Jest to

możliwe, tylko dosyć skomplikowane, więc ta metoda daje generatory powolniejsze od jednorodnych.

Zacznijmy od przypadku dyskretnego, od generacji liczb całkowitych  $k$  z jakiegoś przedziału. Jest to ważny przykład także dla przypadku ciągłego – pozwoli lepiej zrozumieć algorytm. Rysunek 10 przedstawia dowolny rozkład prawdopodobieństwa liczb  $k$  od 0 do 15. (Puste kolumny dla  $k = 5, 6$  oznaczają prawdopodobieństwo zero). Algorytm losowania jest intuicyjnie bardzo prosty: „rzucamy” losowo punkt na ten wykres i jako wynik traktujemy współrzędną poziomą trafionej kolumny. Liczy się trafienie wnętrza prostokąta, więc liczby 0, 5 oraz 6 nie mają szans, a największe szanse ma kolumna 11. Praktyczna realizacja tego algorytmu wymaga przygotowania. W oparciu o ciąg

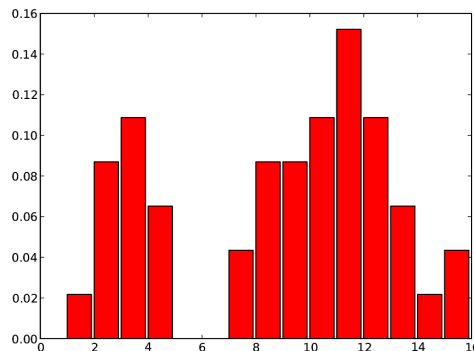
$$p_k = 0, 0,022, 0,087, 0,109, \dots$$

tworzymy tzw. *dystrybuantę* tego rozkładu, albo *rozkład kumulacyjny*:

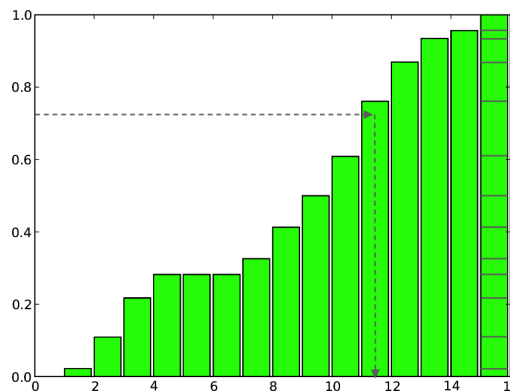
$$d_k = \sum_{j=0}^k p_j .$$

Wykres tego rozkładu przedstawia rys. 11. Jest to funkcja niemalejąca, gdyż wszystkie  $p_k$  są nieujemne.

Zwróćmy uwagę na ostatnią kolumnę, możemy ją interpretować jako zbiór wszystkich kolumn z rys. 10, postawionych pionowo, jedna na drugiej, z zachowaniem unormowania: suma ich wysokości równa się 1. Teraz algorytm losowania staje się prawie oczywisty. Losujemy standardową liczbę  $r$  z rozkładu jednorodnego między 0 a 1. Wylosowany segment określa wynik otrzymany przez generator. Konkretnie, realizujemy następujące operacje:



Rys. 10. Dyskretny rozkład prawdopodobieństwa



Rys. 11. Rozkład kumulacyjny

1. Losujemy  $r$ .
2. Wybieramy  $k = 0$ .
3. Sprawdzamy, czy  $r < d_k$ . W przypadku odpowiedzi pozytywnej,  $k$  jest wynikiem.
4. W przeciwnym wypadku zwiększamy  $k$  o 1 i wracamy do punktu 3.

Ponieważ dla ostatniego  $k$  z przedziału  $d_k$  jest równe 1, algorytm na pewno się zakończy. Przerwane linie na rysunku obrazują geometrię postępowania. Po wylosowaniu  $r$  na osi pionowej, kreślimy linię poziomą, aż do przecięcia się z jakąś kolumną. Widać, że kolumny 5 i 6 nie mają szans.

Jeżeli prawdopodobieństwa można przybliżyć liczbami wymiernymi wybranymi z niezbyt długiego ciągu, procedurę można przyspieszyć. Np. 16 wartości z przykładu powyżej są znormalizowanymi częstościami: [0, 1, 4, 5, 3, 0, 0, 2, 4, 4, 5, 7, 5, 3, 1, 2]. Wystarczy więc utworzyć tablicę o 46 elementach, zawierającą raz liczbę 1, 4 razy liczbę 2, ..., 7 razy liczbę 11, itd., a następnie wylosować równomiernie jeden z elementów tej tablicy.

Zauważmy, że z matematycznego punktu widzenia wybranie argumentu na osi pionowej i otrzymanie wyniku na osi poziomej jest równoważne transpozycji: obróceniu wykresu wokół przekątnej i potraktowanie go jako zwykłej funkcji (tylko dyskretnej). Tak postępuje się w przypadku ciągłym. Dystrybuanta wyrazi się całką:  $d(x) = \int^x p(x') dx'$ . Dolna granica całkowania jest dolną granicą przedziału. Na przykład, jeśli  $p(x) = 2x$  w przedziale 0–1, wtedy  $d(x) = x^2$ . Algorytm generacji sprowadzi się do  $y = \sqrt{r}$ .

Dla odwzorowania logistycznego  $p(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}$ , dystrybuanta wyraża się funkcją  $d(x) = \frac{1}{\pi} \arcsin(2x - 1) + \frac{1}{2}$ . Funkcja generująca to  $y = \frac{\sin(\pi(r - \frac{1}{2})) + 1}{2}$ . Widać, że samo odwzorowanie logistyczne jest szybsze niż taki generator. Tak więc, dla niektórych rozkładów może się opłacać znalezienie nieliniowych odwzorowań, które je generują bezpośrednio, ale niewiele takich znamy.

### 6.3. Proces Poissona

Wspomnieliśmy, że pojęcie rozkładu równomiernego odnosi się do przedziałów skończonych. Jednak ważnym i ciekawym przypadkiem jest generowanie niezależnych wydarzeń w nieskończonym czasie, od zera do  $\infty$ . Może to być model emisji cząstek przez radioaktywną substancję (w mierzonym czasie nieporównywalnie krótszym niż półokres rozpadu, aby gęstość cząstek była stała w czasie), model ruchu pojazdów wjeżdżających losowo, co jakiś czas na autostradę, albo model odbiorów zleceń przez serwer obsługujący publiczne strony internetowe itp. Gęstość „wydarzeń” na jednostkę czasu jest stała, a wydarzenia są nieskorelowane. Teoretycznie można wybrać jakiś skończony czas końcowy i potraktować model jako przypadek rozkładu równomiernego, jest to jednak

wysoce nienaturalne! Kolejne wydarzenia są uporządkowane w czasie, zaś liczby losowe w przedziale – nie.

Pytanie, na które generator tego procesu winien odpowiedzieć, brzmi: kiedy nadejdzie następne zdarzenie. Podstawową i nieco paradoksalną własnością procesu jest fakt, że odpowiedź jest niezależna od momentu, w którym zaczynamy liczyć czas. Dlaczego paradoksalną? Często zadaję moim studentom następującą łamigłówkę. W pewnym mieście autobusy nie mają rozkładu jazdy, wiadomo, że przejeżdżają przez pewien przystanek ze stałą gęstością w czasie, powiedzmy średnio co 10 minut, 6 na godzinę. Średnia odległość w czasie między autobusami wynosi więc 10 minut. Przychodzimy na przystanek o losowej porze. Jaki jest nasz średni czas oczekiwania na następny autobus?

Typowo pada odpowiedź: 5 minut, a rozumowanie jest następujące: mamy tę samą szansę przyjść w pierwszej połowie interwału między autobusami, co w drugiej. Raz będziemy czekać dwie minuty, innym razem 8... Średnio wyjdzie połowa czasu między autobusami.

Rozumowanie to jest fałszywe, gdyż przybywając losowo na przystanek, będziemy mieli większą szansę trafić w interwał dłuższy niż średnie 10 minut! Typowo poczekamy więc dłużej. Okazuje się, że nasz czas oczekiwania jest również równy 10 minut. Możemy potraktować siebie jako „dodatkowy autobus”, nieskorelowany z innymi, ale należący do tego samego procesu (jedno nasze pojawienie się nie zmieni średniej odległości między zdarzeniami).

Wyprowadźmy wzór na prawdopodobieństwo czasu oczekiwania na następne zdarzenie. Wybierzmy mały odcinek czasowy  $\Delta t$  i zapytajmy, jaka jest szansa, że zdarzenie zajdzie właśnie podczas tego interwału. Odpowiedź jest:  $\lambda \Delta t$ , gdzie  $\lambda$  jest pewną stałą. Układ nie ma pamięci, jedynym parametrem jest gęstość statystyczna zdarzeń na jednostkę czasu, więc to wszystko. Szansa, że system „przeżyje” ten odcinek bez zdarzeń, wynosi więc  $1 - \lambda \Delta t$ .

Szansa, że przeżyje dłuższy czas, np.  $T$ , gdzie  $T = N\Delta t$ , wyniesie  $q = (1 - \lambda \Delta t)^N$ , gdyż prawdopodobieństwa zdarzeń niezależnych się mnożą, a prawdopodobieństwo przeżycia w każdym pod-interwale jest niezależne od pozostałych. Ponieważ  $\Delta t = T/N$ , dostaniemy  $q = \left(1 - \frac{\lambda T}{N}\right)^N$ . Granicą tego wyrażenia, gdy  $N \rightarrow \infty$ , jest  $e^{-\lambda T}$ .

Prawdopodobieństwo, że zdarzenie **zajdzie** po czasie  $T$  wynosi więc  $1 - e^{-\lambda T}$ . To jest rozkład kumulatywny, w przedziale czasowym od zera do nieskończoności. Po długim czasie zdarzenie zajdzie na pewno (o ile w ogóle może zajść). Gęstość prawdopodobieństwa na jednostkę czasu wynosi  $\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t}$ . Ten rozkład wykorzystamy w naszym generatorze procesu Poissona. Aby otrzymać jednorodny rozkład wydarzeń w czasie (nieograniczonym), użyjemy rozkładu wykładniczego, a zmienną będzie nie położenie wydarzenia na



osi czasowej, ale czas oczekiwania na następne. Wydarzenia będą generowane monotonicznie w czasie, co jest zgodne z intuicją.

Ponieważ dystrybuanta wynosi  $d(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ , algorytm generacji jest prosty – generujemy  $t = \frac{1}{\lambda} \ln(1 - r)$ . Czytelnik śledzący uważnie tekst mógłby zaproponować uproszczenie: ponieważ  $r$  jest rozłożone równomiernie między 0 a 1, więc  $1 - r$  także, i można sobie darować odejmowanie. Jednak typowe algorytmy generacji rozkładu równomiernego, oparte o liczby całkowite, zwykle dostarczają wyników *mniejszych* od 1. Zero może zostać wygenerowane, 1 – nigdy. Wyrażenie  $\ln r$  może więc zakończyć się błędem i zatrzymaniem programu,  $\ln(1 - r)$  jest bezpieczniejsze.

#### 6.4. *Specjalna metoda dla rozkładu Gaussa, oparta o Centralne Twierdzenie Graniczne*

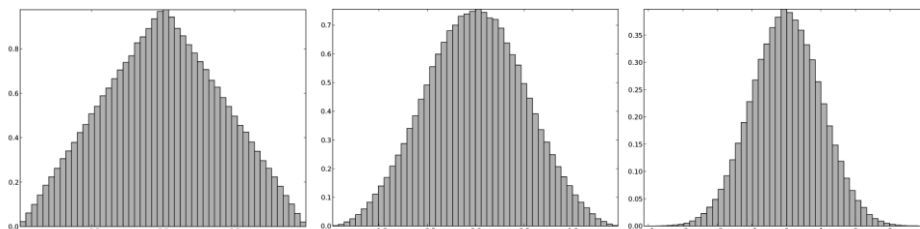
Dla rozkładu normalnego  $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2})$  (ogólne rozkłady Gaussa wymagają tylko zmiany skali i przesunięcia średniej). Całka tej funkcji nie jest elementarna, jest to tzw. funkcja błędu erf. Znamy oczywiście jej przybliżenia numeryczne, a także aproksymacje jej funkcji odwrotnej, można więc algorytm odwracania zastosować do tego przypadku, ale będzie on powolny i niewygodny, mimo iż się go używa. Można jednak postąpić inaczej, a algorytm jest bardzo pouczający...

Skąd się bierze dzwonowy kształt tego rozkładu? Wiemy już, że ta funkcja opisuje typowe fluktuacje wielkości fizycznych, ich rozrzut wokół średniej. Zwykle jest to skutkiem wkładu licznych źródeł fluktuacji, częściowo się kompensujących. Np. proces technologiczny napełniania butelek obarczony jest błędami: zmienne ciśnienie płynu, bąbelki gazu zmieniające średnią lepkość przepływu, itp. Raz trochę więcej, raz trochę mniej, najprawdopodobniejsze będą małe fluktuacje, a bardzo duże pojawią się niezmiernie rzadko.

Teoretyczne ujęcie tego zjawiska wyraża się przez tzw. centralne twierdzenie graniczne, mówiące, że suma dużej liczby wielkości losowych o dowolnych rozkładach (ale ze skończoną wariancją), będzie miała rozkład gaussowski. Możemy to sprawdzić na prostym przykładzie rzutu kostkami.

Ponieważ prawdopodobieństwa zdarzeń niezależnych się mnożą, gdy rzucimy dwie kości, jedno elementarne zdarzenie  $(k_1, k_2)$  będzie miało prawdopodobieństwo  $1/36$ . Jeżeli interesuje nas tylko suma oczek, prawdopodobieństwo wyniku 2 będzie  $1/36$  – prawdopodobieństwo zdarzenia (1,1). Ale szansa otrzymania 3 będzie już  $2/36$ : (1,2) i (2,1). Szansa siódemki będzie 6 razy większa niż dwójki lub dwunastki. Rozkład prawdopodobieństwa dany jest krzywą trójkątną. Dla trzech kostek wzrost przy małej sumie nie jest liniowy, a kwadratowy, rozkład jest sklejeniem trzech odcinków parabol, i już wygląda jak „dzwon”. Dla większej liczby składników krzywa szybko zmierza do postaci

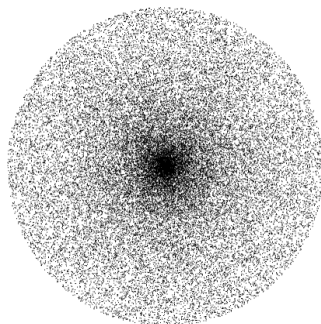
Gaussa. Jeśli zamiast kostek wziąć standardowy generator równomierny, otrzymamy wyniki jak na rys. 12.



Rys. 12. Rozkład sumy 2, 3 i 12 liczb losowych równomiernych

## 7. Rozkłady wielowymiarowe

Generowanie wektorów losowych bywa trudniejsze niż pojedynczych liczb losowych, gdyż składniki tych wektorów mogą być ze sobą związane skomplikowanymi zależnościami.



Rys. 13. Niejednorodny rozkład w kole.

Aby np. wygenerować losowe kierunki w dwóch wymiarach, albo – co na jedno wychodzi – punkty na okręgu, wystarczy wygenerować równomiernie kąt  $\alpha$  między zerem a  $2\pi$ , a następnie utworzyć  $(x, y) = R \cdot (\cos \alpha, \sin \alpha)$ . A co we wnętrzu koła? Można pomyśleć, że wystarczy wygenerować kąt, ale także promień i skorzystać ze wzorów powyżej. Jednak, jeśli promień jest losowany równomiernie, rozkład nie jest jednorodny, okolice środka koła są gęstsze. Powodem jest fakt, że tyle samo punktów będzie losowanych dla każdego promienia, ale w pobliżu środka te punkty rozłożą się na mniejszej powierzchni. Promień należy losować z rozkładem  $p(r) \approx r$  (już wiemy jak). Formalnie można to uzasadnić patrząc na przekształcenie współrzędnych Kartezjańskich na biegunowe pod całką:

$$\int dx \cdot dy = \int r \cdot dr \cdot d\varphi .$$

Ale nie będziemy się nad tym zatrzymywać. Jak wygenerować losowe kierunki w przestrzeni 3D (punkty na powierzchni sfery)?

Teraz mamy dwa kąty ( $\theta, \varphi$ ): szerokość i długość geograficzna. Ponieważ

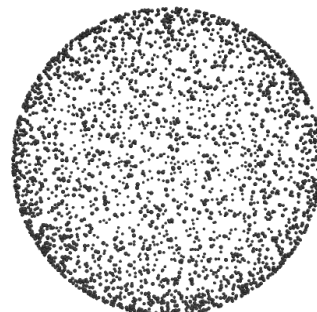
$$\int dx \cdot dy \cdot dz = \int r^2 dr \cdot \sin \theta d\theta \cdot d\varphi ,$$

należy wygenerować  $\varphi$  równomiernie między 0 a  $2\pi$ , oraz  $\theta$  z rozkładem sinusowym; jeśli  $u$  jest liczbą losową standardową,  $\theta = \arccos(2u - 1)$ . (Jeżeli chcemy generować punkty we wnętrzu kuli, widzimy z jakim rozkładem losować  $r$ ).

Inna metoda, mniej popularna, ale bardzo interesująca, polega na zauważeniu, że iloczyn trzech funkcji Gaussa się upraszcza:

$$e^{-x^2} \cdot e^{-y^2} \cdot e^{-z^2} = e^{-r^2}.$$

Wynik zależy tylko od promienia, a nie od kątów. Wystarczy więc wylosować trzy liczby  $(x, y, z)$  o rozkładzie normalnym, następnie znormalizować ten wektor, tj. podzielić składowe przez  $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , i to nam dostarczy punktu na powierzchni sfery jednostkowej.



Rys. 14. Losowe punkty na powierzchni sfery

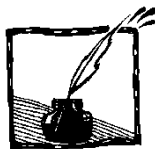
## 8. Zakończenie

Zagadnienie zostało omówione w sposób bardzo powierzchowny, zainteresowanych odsyłamy do literatury Internetowej, bardzo bogatej, z wieloma algorytmami gotowymi do użycia.

W drugiej części artykułu omówimy generowanie funkcji losowych (szumów), bardzo przydatnych np. w grafice, oraz przedyskutujemy kilka metod Monte-Carlo użytecznych w symulacji systemów fizycznych.

## Literatura

- [1] M. Kac, *Marginalia. What is random?*, American Scientist **71**(4) (1983), s. 405–406
- [2] D. Knuth, *Sztuka programowania*, Tom 2: *Algorytmy seminumeryczne*, WNT, Warszawa (2002)
- [3] M. Matsumoto, T. Nishimura, *Mersenne Twister: A 623-dimensionally equidistributed uniform pseudorandom number generator*, ACM Trans. on Modeling and Computer Simulation Vol. 8, No. 1, (1998), s. 3–30

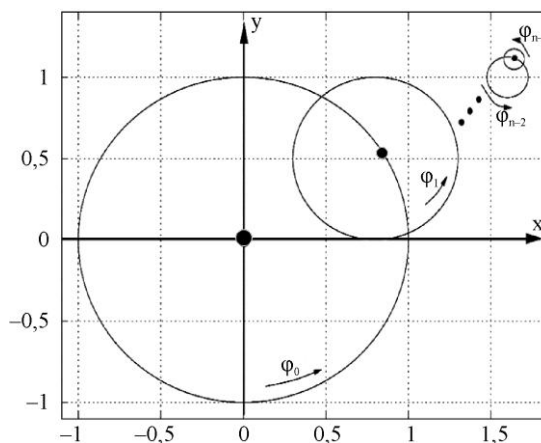


## Koła rowerowe kreślą fraktale

Marek Berezowski  
Politechnika Śląska

**Od Redakcji:** Fraktalom poświęcamy ostatnio dużo uwagi. W *Fotonach* 111 i 112 ukazały się na ten temat artykuły Marcina Figla i Tomasza Sabały. Najczęściej podkreślaną cechą fraktali jest ich samopodobieństwo. W poniższym artykule autor przedstawia, jak za pomocą prostego urządzenia mechanicznego, składającego się z połączonych ze sobą kół (np. rowerowych), można narysować fraktale.

Rozważmy urządzenie składające się z  $n$  kół o różnych rozmiarach, obracających się z różnymi szybkościami. Na obręczy danego koła, obracającego się z określoną szybkością, zamontowane jest koło od niego mniejsze, obracające się z szybkością większą (rys. 1).



Rys. 1. System kół ( $\varphi$  na tym rysunku oznacza kąt obrotu danego koła względem własnej osi)

W efekcie poszczególne koła obracają się nie tylko z szybkościami własnymi, ale „napędzane” są także ruchem wszystkich kół od nich większych.

Na obręczy ostatniego (najmniejszego) koła zamocowany jest rysik, który pozostawia ślad na płaszczyźnie. Okazuje się, że już przy stosunkowo niewielkiej liczbie kół ślad ten może być bardzo skomplikowany i tworzyć rysunek fraktalny. Pomimo iż prędkości obrotowe własne poszczególnych kół są stałe, nieustannie zmienia się prędkość rysika, i to zarówno jej wartość, jak i kierunek.

Założymy, że stosunek promieni oraz kątów obrotu poszczególnych kół jest stały i wynosi:

$$q = \frac{r_k}{r_{k+1}} = \frac{\phi_{k+1}}{\phi_k} > 1 \quad (1)$$

Pozycję rysika, zamocowanego na obwodzie ostatniego koła, określają wzory:

$$x' = \sum_{k=0}^{n-1} r_k \cos(\varphi_k) = r_0 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{q^k} \cos(q^k \varphi_0) \quad (2)$$

$$y' = \sum_{k=0}^{n-1} r_k \sin(\varphi_k) = r_0 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{q^k} \sin(q^k \varphi_0). \quad (3)$$

Przechodząc do zapisu zespolonego powyższe wzory przedstawić można jako:

$$R' = \sum_{k=0}^{n-1} r_k e^{i\varphi_k} = r_0 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{q^k} e^{iq^k \varphi_0} \quad (4)$$

gdzie  $R'$  jest promieniem wodzącym zespolonym, natomiast

$$|R'| = \sqrt{(x')^2 + (y')^2} \quad (5)$$

jest odległością rysika od osi największego koła, czyli rzeczywistą długością tego promienia.

Korzystając z tych zależności łatwo wykazać, że dla  $n = 2$  i  $q = 2$  rysik kreśli linię o długości  $L = 8r_0$ . Dla  $r_0 = 1/2$  linia ta ogranicza obszar o identycznych rozmiarach i kształcie jak największy obszar słynnego fraktala Mandelbrota, określanej w literaturze jako *kardioida*.

Wprowadzając do naszych rozważań znormalizowany promień wodzący oraz skrótowy zapis kąta obrotu największego koła jako:

$$R = \frac{R'}{r_0}; \quad t = \varphi_0 \quad (6)$$

równanie (4) przekształca się do postaci:

$$R = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{q^k} e^{iq^k t} \quad (7)$$

Ponieważ długość promienia  $R$  zmienia się w sposób ciągły, ciągła jest także trajektoria ruchu rysika. Nieciągła jest natomiast szybkość zmiany długości tego promienia, czyli prędkość ruchu rysika:

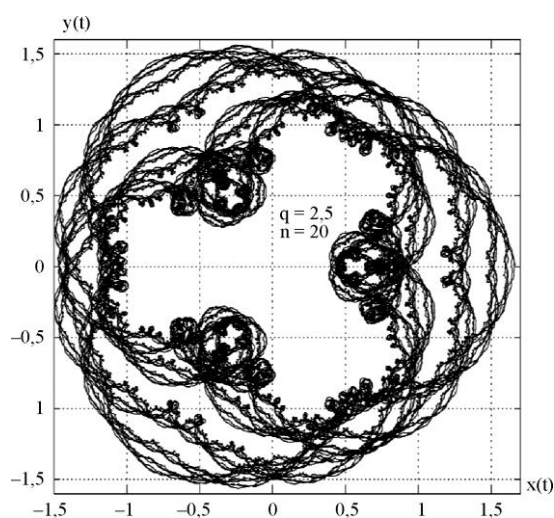
$$\frac{dR}{dt} = i \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} e^{iq^k t} \quad (8)$$

Dla  $n = \infty$  nieciągłość ta występuje dla każdej wartości  $t$ .

W praktyce, gdy  $n < \infty$ , zjawisko to ma znaczenie dla przyrostu  $\Delta t > q^{1-n}$ . I tak np. dla  $n = 20$  i  $q = 2,5$ ,  $\Delta t > 0,00000003$ . Oznacza to, że zanik nieciągłości pochodnej (8), czyli zanik nieciągłości prędkości ruchu rysika, zaobserwowałibyśmy mierząc obrót największego koła dopiero w odstępach krótszych niż

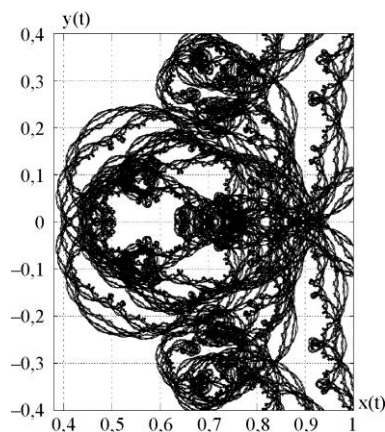
30 nanostopni. W praktyce zatem w układzie występują nieustannie gwałtowne zmiany prędkości ruchu rysika, zarówno jej wartości, jak i kierunku. Można powiedzieć, że rysik jest nieustannie szarpnięty i w konsekwencji może tworzyć na płaszczyźnie bardzo złożone figury fraktalne.

Rozważmy dla przykładu system złożony z 20 kół, w którym zastosowano  $q = 2,5$ . Na rys. 2 przedstawiono obraz, jaki kreśli rysik zamontowany na obwodzie dwudziestego koła.

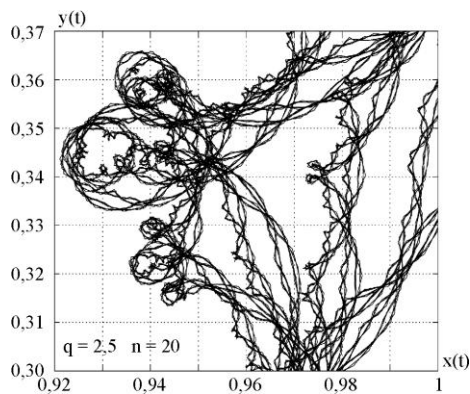


Rys. 2. Fraktal namalowany przez koła

Prezentowana struktura jest bardzo złożona, a jej fragmenty pokazane na rys. 3 i 4 świadczą, że ma ona formę fraktalną.



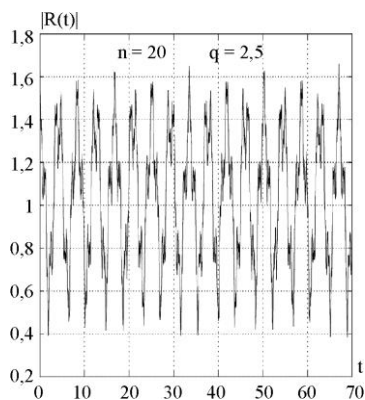
Rys. 3. Fragment obrazu z rys. 2



Rys. 4. Fragment obrazu z rys. 3

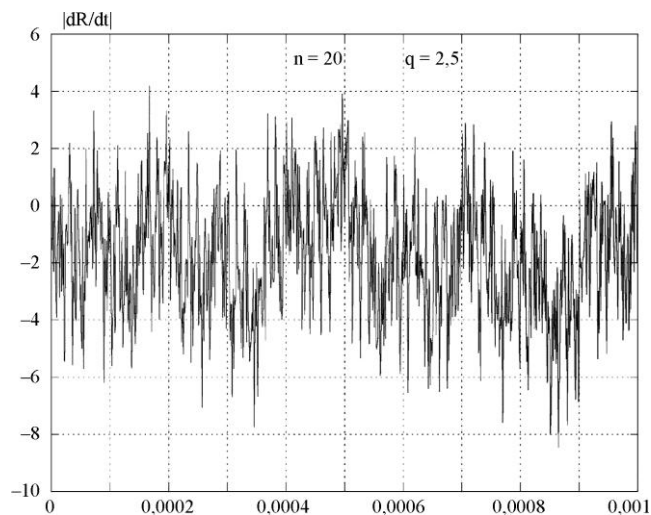
Użyte na powyższych wykresach symbole  $x$  i  $y$  są współrzędnymi znormalizowanymi:  $x = \frac{x'}{r_0}$ ,  $y = \frac{y'}{r_0}$ .

Z kolei na rys. 5 przedstawiono zmiany długości promienia wodzącego  $|R|$  w funkcji  $t$ .



Rys. 5. Zmiany odległości rysika od osi największego koła

Natomiast na rys. 6 zaprezentowano szybkość tych zmian  $\left| \frac{dR}{dt} \right|$ .

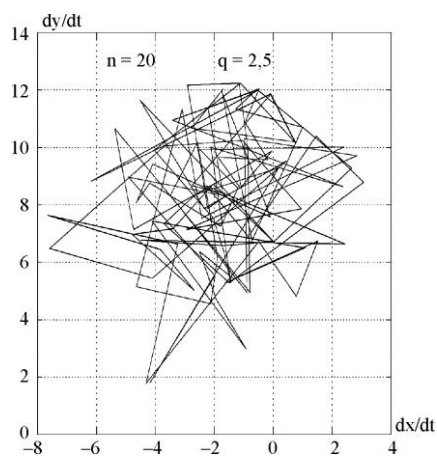


Rys. 6. Szybkość zmian odległości rysika od osi największego koła

Powyższe wykresy potwierdzają ciągłość zmian odległości rysika  $/R/$  od osi największego koła oraz praktyczną nieciągłość szybkości ruchu rysika  $\left| \frac{dR}{dt} \right|$ .

W granicznym przypadku, gdy  $n = \infty$ , gwałtowna zmiana tej szybkości następuje dla każdej wartości  $t$ .

Widoczne na poniższej płaszczyźnie fazowej zygzaki są konsekwencją tej nieciągłości (rys. 7).

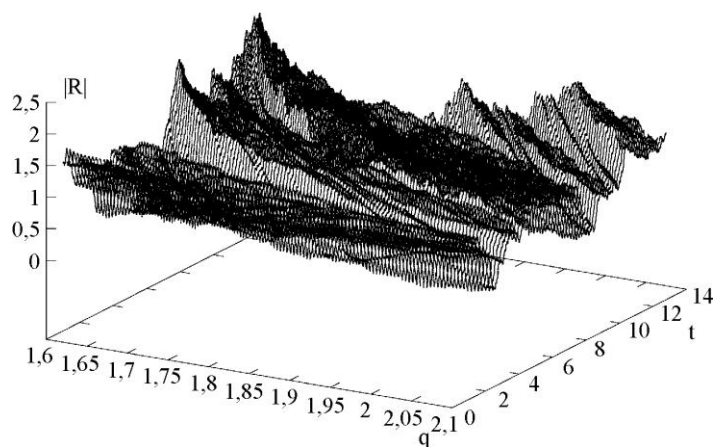


Rys. 7. Współrzędne prędkości ruchu rysika



Gdy  $n = \infty$  zygzaki występują w każdym punkcie płaszczyzny. Trajektoria ta przypomina ruchy Browna, gdzie – jak wiadomo – ruch cząsteczek brownowskich jest także zygzakowaty w każdym punkcie [1].

Konsekwencją tego jest fakt, że wprowadzie zmiany długości promienia wodzącego mają charakter ciągły (co pokazano na rys. 5), ale charakter tych zmian nie jest gładki. Można powiedzieć, że wykres jest „chropowaty”. Przy nieskończonej liczbie kołach chropowatość ta występuje w każdym punkcie. Na rys. 8 przedstawiono formę przestrzenną tego zjawiska.



Rys. 8. Góry kreślone kołami

Trudno oprzeć się wrażeniu, że podobny charakter mają także struktury przyrody. Wystarczy spojrzeć na góry skaliste.

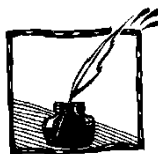
Więcej na temat tu poruszony można przeczytać w artykule [2].

### Literatura

- [1] P.F. Góra, Sto lat teorii ruchów Browna, Foton 91, Zima 2005
- [2] M. Berezowski, *Phase trajectories of a certain mechanical system*, Far East Journal of Dynamical Systems, **13**/1, 85–96, 2010

### Redakcja poleca

- [3] P. Pierański, *Fraktale: od geometrii do sztuki*, Ośrodek Wydawnictw Naukowych, Poznań 1992
- [4] M. Figiel, T. Sabała, *Fraktale*, Foton 111, Zima 2010, s. 18
- [5] M. Figiel, T. Sabała, *Maszynka do fraktali*, Foton 112, Wiosna 2011, s. 28



## Elipsoida ziemiska

Justyna Chojnacka, Grzegorz Karwasz  
Zakład Dydaktyki Fizyki,  
Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

Artykuły popularnonaukowe, w tym w renomowanych czasopismach [1], określają kształt Ziemi jako „nieregularny kartofel”. Tymczasem różnice względne między dokładnym kształtem a elipsoidą są rzędu  $10^{-5}$  promienia Ziemi, natomiast elipsoidalne spłaszczenie wynosi  $1/298$ . Te same publikacje nie wyjaśniają, dlaczego elipsoida ziemiska ma takie rozmiary, a nie inne. Rozważania o kształcie Ziemi są dla nas pretekstem do przypomnienia lub wprowadzenia zagadnień z elektrostatyki i grawitacji, w tym pojęć takich jak powierzchnia ekwipotencjalna i gradient potencjału.

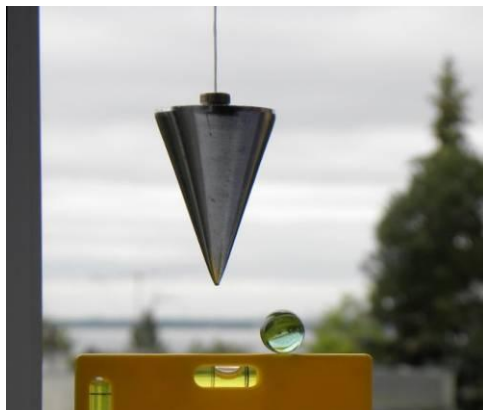
### Część I

#### Jakiego kształtu jest „kula” ziemiska?

Jakiego kształtu jest Ziemia? Odpowiedź znają wszyscy – oczywiście kulistego. W zasadzie jest ona nieco spłaszczona na biegunach, wskutek ruchu obrotowego. W rzeczywistości kształt Ziemi odbiega od elipsoidy i przypomina taki pognieciony kartofel [2], który nazywamy *geoidą*.

Podobnie jak w wielu innych problemach dydaktycznych odpowiedź jest nieco tautologiczna: kształt kuli ziemskiej to *ziemsko-kula*, czyli geoida. Nadal nie wiemy, ile wynosi spłaszczenie, dlaczego dokładnie tyle, na ile geoida różni się od elipsoidy i jaką rolę odgrywają łańcuchy górskie i rowy oceaniczne. W istocie, to nawet nie znamy zasady, jak taką *ziemsko-kulę* wyznaczyć.

Problem nie jest bynajmniej z geografii, ale z fizyki i to wcale niełatwy, co można zauważyć wertując książki z geodezji i z geofizyki, które to traktują problem w sposób lakoniczny – „kształt Ziemi to powierzchnia jednakowego potencjału siły ciężkości” [3]. O tym, że problem należy do nauk ścisłych wiedział już Kopernik, który zastanawiał się, dlaczego woda nie spływa z kuli ziemskiej. Od kulistości Ziemi i problemu wód zaczyna się jego *De revolutionibus*: „Także i wody morskie układają się do postaci kulistej, o czym wiedzą żeglarze, dostrzegając z wysokości masztu łąd stały, którego z pokładu okrętu jeszcze nie widać. [...] Wypadało tedy, aby mniej było wód niż ładu, by woda nie pochłonęła całej ziemi, skoro oba te elementy na skutek swej ciężkości dążą do tego samego środka. [...] jako ład i woda wspierają się na jednym środku ciężkości Ziemi, który jest zarazem środkiem jej objętości. Woda, będąc lżejszą, wypełnia rozpadliny ziemskie i dlatego mało jest wody w stosunku do ładu, chociaż może na powierzchni więcej widać wody” [4].



Fot. 1. (Pozioma) powierzchnia morza jest prostopadła do murarskiego „pionu”. Kulka położona na poziomej płaszczyźnie pozostaje w spoczynku. Pion wskazuje kierunek wypadkowej siły grawitacji i odśrodkowej siły bezwładności, a poziomicą powierzchnię stałego potencjału grawitacyjnego (linia brzegowa w tle to port w Gdańsku, a czarny lewy margines to pionowa futryna okna)

Podsumowując, Kopernik zagadnienie kulistości Ziemi łączy z problemem wody oblewającej lądy i ze środkiem ciężkości Ziemi. Intuicja, jak wykażemy dalej, genialna!

### Kłopoty z zegarem

Jak wiadomo, okres wahadła fizycznego zależy od wartości przyspieszenia ziemskiego, dlatego też precyzja zegarów była kluczowa w pomiarach  $g$ .

Już w średniowieczu budowano niezłe zegary. Takim jest zegar na Ratuszu w Pradze i taki jest w Kościele Mariackim w Gdańsku. W zegarach tych spadające wolno ciężarki napędzały system kół zębatach a poprzez nie wskazówki, figurki, kalendarz i resztę mechanizmów. Oczywiście, taki zegar nie mógł być idealnie dokładny.

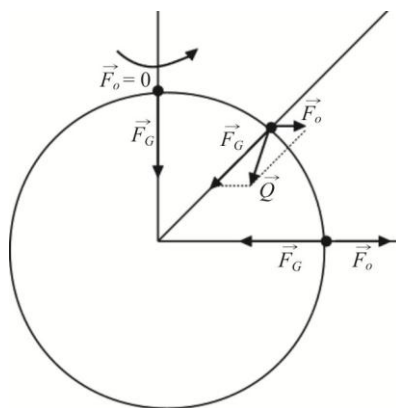


Fot. 2. Zegar astronomiczny z Pragi (1410/1490) i z Kościoła Mariackiego w Gdańsku (1470, Hans Düringer). Zegary budowane przed odkryciem przez Galileusza izochronizmu wahadła matematycznego dokładne być nie mogły. Zegar w Gdańsku zrekonstruowany dzięki długim staraniom prof. fizyki Politechniki Gdańskiej Andrzeja Januszajtisa

W katedrze w Pizie Galileusz liczył wahnięcia zwisającego z kopuły kandelabru. Tak podobno odkrył izochronizm wahadła. Droga do dokładnego zegara była otwarta! Lecz nie do końca. Należało jeszcze połączyć oba mechanizmy – ciężarków i wahadła. Pierwszy zegar tego typu zbudowali Anglicy, a Francuz (J. Richer, 1672) pokazał, że spóźnia się on na równiku o 2,5 minuty na dobę. W ten sposób stwierdzono doświadczalnie, o ile przyspieszenie ziemskie jest mniejsze na równiku niż na biegunie. Przyczyną jest oczywiście ruch obrotowy Ziemi i związane z nim przyspieszenie. Obliczenia jednak nie do końca się zgadzają.

Poprawka do przyspieszenia ziemskiego z powodu ruchu obrotowego Ziemi wynosi  $0,0337 \text{ m/s}^2$ . Tymczasem standardowe przyspieszenie ziemskie wynosi  $9,7803 \text{ m/s}^2$  na równiku i  $9,8322 \text{ m/s}^2$  na biegunie, co daje większą różnicę niż poprawka związana z siłą odśrodkową bezwładności. Zgodnie z wytłumaczeniem Europejskiej Agencji Kosmicznej ESA, mniejsze przyspieszenie grawitacyjne na równiku wynika z większej odległości punktów na równiku od środka Ziemi niż punktów na biegunie. To stwierdzenie nie wyjaśnia jednak elioidalnego kształtu Ziemi. Co więcej, gdyby klucz do wyjaśnienia kształtu Ziemi leżał w rozważaniach o wielkości wypadkowej siły działającej w różnych punktach globu, to można by wywnioskować, że z powodu mniejszej siły wypadkowej na równiku niż na biegunach Ziemia powinna ulec rozplaszczeniu, jak glina na szybko wirującym kole garncarskim. Kluczem do rozważań o kształcie Ziemi **nie jest** więc zagadnienie równowagi sił.

Wróćmy na chwilę do pewnego znanego schematu. Poniżej ilustracja zamieszczana w wielu podręcznikach fizyki i geografii.

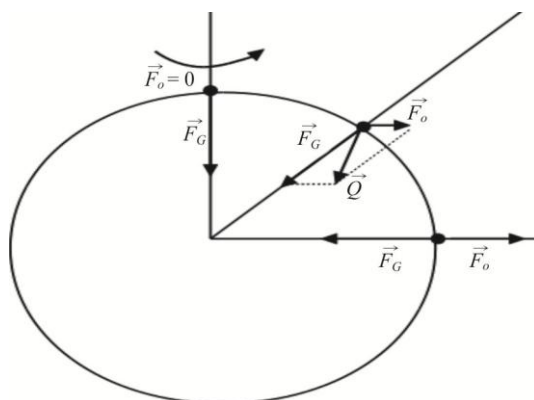


Rys. 3. Rozkład sił na obracającej się Ziemi. Wartość siły grawitacji  $\vec{F}_G$  na kulistej nieobracającej się Ziemi jest taka sama na równiku i na biegunach. Dodatkowo na masy poza biegunem działa siła odśrodkowa bezwładności (układ nieinercyjny)

Na powyższym rysunku siła odśrodkowa bezwładności  $\vec{F}_o$  jest wyolbrzymiona, ale nie z tego powodu rysunek jest błędny. Otóż zsumowanie (wektoro-

we) siły grawitacji  $\vec{F}_G$  i siły odśrodkowej bezwładności  $\vec{F}_o$  daje siłę  $\vec{Q}$ , która na rys. 3 **nie jest** prostopadła do powierzchni Ziemi. Siła  $\vec{Q}$  ma więc składową wzdłuż powierzchni Ziemi. Składowa ta powodowałaby ruch mas wody w kierunku równika, fale kilometrowej wysokości!

Mamy tu sytuację analogiczną z problemem ładunku elektrycznego na powierzchni przewodnika. Ładunek na powierzchni przewodnika może się swobodnie przemieszczać (taka jest definicja „przewodnika”). O ile rozkład ładunku na powierzchni przewodnika byłby taki, że wzdłuż powierzchni przewodnika istniałaby składowa wektora natężenia pola (innymi słowy, istniałaby siła elektryczna wzdłuż powierzchni), to ładunek elektryczny przemieszczałby się tak długo, aż nowy rozkład ładunku zniwelowałby to pole. Pole elektryczne na powierzchni przewodnika nie ma więc składowej stycznej. Właściwy rysunek dla „kuli” ziemskiej to rys. 4. Kula ziemiska musi być spłaszczona! Tylko wówczas wektor  $\vec{Q}$  jest w każdym punkcie Ziemi prostopadły do jej powierzchni. Można wykazać, że wówczas Ziemia jest elipsoidą. Na rys. 4 dokonaliśmy tego graficznie – rozciągając koło z rys. 3 w poziomie.



Rys. 4. Elipsoida obrotowa jest „idealną” powierzchnią Ziemi. Tylko w tym przypadku wektor siły  $\vec{Q}$  nie ma składowej stycznej do powierzchni Ziemi

Jak więc wyznaczyć tę elipsoidę metodą rozważań fizycznych? Wróćmy do elektrostatyki. Stwierdzenie, że rozkład ładunku na powierzchni jest taki, że nie wytwarza składowej stycznej pola można wyrazić też w inny sposób: powierzchnia przewodnika jest powierzchnią o **stałym potencjale** elektrycznym.

Kolejne etapy rozumowania wykraczają poza program szkoły średniej, choć nie przekraczają umiejętności wielu uczniów. Przytoczmy dobrze znane wzory na energię potencjalną  $E_p$  w polu grawitacyjnym (lub elektrostatycznym)

i na wartość siły grawitacji  $\vec{F}$ , pochodzące od masy punktowej (lub ładunku punktowego).

$$E_p = -GMm/r \quad (1)$$

i

$$F = GMm/r^2 \quad (2)$$

gdzie  $M$  jest masą ciała wytwarzającego pole grawitacyjne,  $m$  masą ciała umieszczonego w tym polu,  $G$  stałą grawitacji, a  $r$  – odległością od środka ciała wytwarzającego pole grawitacyjne.

Dwa wzory bardzo „podobne”. Kto zna rachunek różniczkowy od razu widzi, że siła jest pochodną energii potencjalnej po zmiennej  $r$  (ze znakiem minus).

$$F = -dE_p/dr \quad (3)$$

Rzeczywiście pochodną funkcji  $y = 1/x$  jest funkcja  $y' = -1/x^2$ . Zauważmy, że w równaniu (1) jest znak minus po prawej stronie: energia oddziaływania grawitacyjnego dwóch mas jest *ujemna* – masy się przyciągają, czyli siła działa w kierunku  $-r$ , energia rośnie w kierunku  $+r$  i (wynosi zero dla  $r = \infty$ ).

Mamy argument przemawiający za tym, że siła jest pochodną energii potencjalnej po przesunięciu (a natężenie pola pochodną potencjału). Jest nim wzór na pracę  $W$

$$W = Fs \quad (4)$$

gdzie  $s$  jest przesunięciem. Wzór to oczywiście bardzo, bardzo uproszczony. Co zrobić, jeśli siła nie jest stała? Trzeba wówczas mnożyć chwilową siłę przez fragment drogi, na jakim siła jest w miarę stała. Innymi słowy, należy *całkować* siłę wzdłuż małych odcinków drogi  $ds$ . Nieco lepszy wzór na pracę ma więc postać

$$W = \int F ds \quad (5)$$

(Ten nie spodobałby się i fizykom i matematykom, ale nam taka postać wystarczy). Całkowanie to operacja „odwrotna” do różniczkowania, czyli

$$F = dW/ds \quad (6)$$

a ponieważ wykonana praca  $W$  oznacza straconą energię, równania (3) i (6) są równoważne.

Aby zrozumieć, dlaczego Ziemia ma kształt elipsoidy, potrzebna jeszcze dygresja z kartografii. W którym kierunku płyną strumienie w górach? Oczywiście w dół, to znaczy w poprzek (prostopadle) do poziomicy. Co więcej, strumienie płyną tam, gdzie poziomice są ułożone najgęściej, zob. rys. 5. Rzeki płyną w kierunku gdzie jest największy spadek terenu.



Rys. 5. Aby się w górach nie zmęczyć, należy chodzić wzdłuż poziomicy. Wzdłuż poziomicy nie wznosimy się ani w górę ani w dół, nie zmienia się więc nasza *energia potencjalna*. Rzeki natomiast płyną w kierunku największego spadku – prostopadle do poziomicy i tam gdzie są one najgęściej ułożone (Courtesy: Wyd. Witański)

Możemy podsumować nasze dotychczasowe rozważania. Między siłą a energią (lub analogicznie: między natężeniem pola a potencjałem) zachodzi następujący związek:

natężenie pola (dla pola grawitacyjnego nazywane też przyspieszeniem grawitacyjnym) jest prostopadłe do powierzchni ekwipotencjalnych i jest zawsze zwrócone w stronę malejącego potencjału.

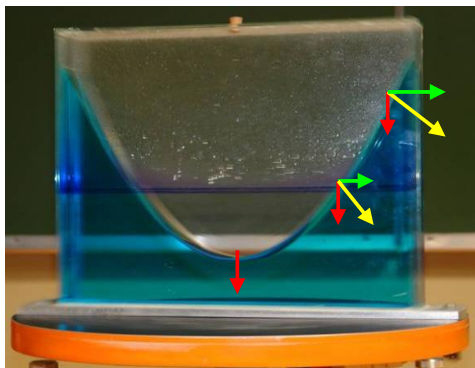
Przepiękny wzór znajdziemy np. w *Wykładach* R. Feynmana: natężenie pola  $\mathbf{E}$  jest gradientem potencjału  $V$  (ze znakiem minus: natężenie pola ma kierunek *spadku* potencjału)

$$\mathbf{E} = -\text{grad}V = -\nabla V \quad (7)$$

gdzie pogrubione  $\mathbf{E}$  i pogrubiony operator **nabla** przypominają, że zamieniamy pole skalarne (czyli potencjał) na pole wektorowe (czyli natężenie pola).

W pokoju powierzchnią stałego potencjału grawitacyjnego (powierzchnią ekwipotencjalną) jest poziomo ustawiony stół. Kropla wody pozostaje na nim w równowadze, nie spływa.

Aby więc po „kuli ziemskiej” nie przelewały się kilometrowe fale, jej powierzchnia musi być powierzchnią *stałego potencjału grawitacyjnego*. Rozumiemy więc rys. 4 w nowy sposób: elipsoida jest powierzchnią ekwipotencjalną wypadkowego pola siły grawitacji i siły odśrodkowej bezwładności. Jak wygląda powierzchnia ekwipotencjalna w wirującym akwarium z wodą znajdującym się w stałym, pionowym polu grawitacyjnym pokazuje fot. 6.



Fot. 6. Na cząstki znajdujące się na powierzchni swobodnej w wirującym akwarium działa siła grawitacji i siła odśrodkowa bezwładności. Powierzchnia wody, w profilu parabola, jest w każdym punkcie prostopadła do wypadkowej tych dwóch sił. Powierzchnia wody jest powierzchnią ekwipotencjalną

Jakie rozmiary ma elipsoida będąca powierzchnią ekwipotencjalną na wirującej kuli o rozmiarach i masie Ziemi wyliczymy w drugiej części artykułu.

### Literatura

- [1] Davide Castelvecchi, *The Geoid: Why a map of Earth's gravity yields a potato-shaped planet*, *Scientific American*, 01.04.2011 <http://blogs.scientificamerican.com/observations/2011/04/01/the-geoid-why-a-map-of-earths-gravity-yields-a-potato-shaped-planet/>
- [2] W. Niedzicki, *Geoida*, *Ambernet*, <http://www.ambernet.pl/Filmy.php#Geoida>, zob. też: [http://dydaktyka.fizyka.umk.pl/Physics\\_is\\_fun/movies/geoida1.mpg](http://dydaktyka.fizyka.umk.pl/Physics_is_fun/movies/geoida1.mpg)
- [3] R. Dmowska, *Fizyka skorupy i wnętrza Ziemi*, w: *Encyklopedia Fizyki Współczesnej*, PWN, Warszawa 1973, s. 815
- [4] M. Kopernik, *O obrotach ciał niebieskich*, tłum. L.A. Birkenmajer, Wydawnictwo Zakład Narodowy im. Ossolińskich, Wrocław 2004, Księga pierwsza, s. 35–40

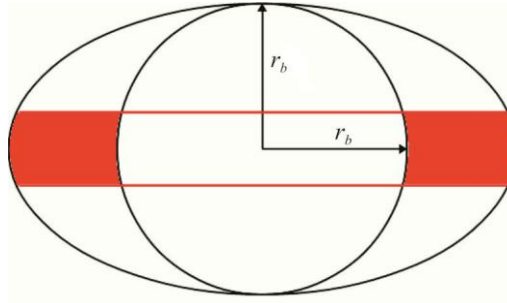
## Część II

### Elipsoida ziemiska

Na rozważaniach o powierzchniach ekwipotencjalnych i gradientach pola grawitacyjnego problemy z powierzchnią Ziemi dopiero się zaczynają. Potrafimy obliczyć powierzchnie ekwipotencjalne dla ładunku (lub masy) punktowej lub masy kulistej: są to po prostu powierzchnie sferyczne. A jak jest w przypadku elipsoidy? Dokładne rozwiązanie wymaga złożonych metod matematycznych, ale daje się modelowo uprościć.

Czym jest elipsoida? Widziana z bieguna jest to kula o promieniu biegunowym  $r_b$ , z dodatkową masą skupioną głównie w strefie równikowej (rys. 1).





Rys. 1. Elipsoidę, w dużym przybliżeniu, ale akceptowalnym dla obliczenia potencjału, możemy uważać za kulę o promieniu biegunowym  $r_b$  z dodatkową masą w postaci pierścienia dookoła równika

Potencjał jest wielkością addytywną, możemy więc potencjał grawitacyjny na biegunie obliczyć jako sumę potencjału pochodzącego od kuli o promieniu  $r_b$  i potencjału pierścienia o masie wynikającej z różnicy mas elipsoidy i kuli o promieniu  $r_b$ .

Z danych geograficznych znamy promień biegunowy i równikowy Ziemi (ten ostatni większy o 21 km) oraz średnią gęstość Ziemi\* –  $5,515 \text{ g/cm}^3$  (taką gęstość, pośrednią między gęstością żelaza a gęstością granitu, ma na przykład minerał piryt  $\text{FeS}_2$ ). W obliczeniach przyjmujemy 5–6 cyfr znaczących, z przyczyn, które będą jasne na końcu artykułu). Oto dane wyjściowe:

$$r_r = 6,378245 \cdot 10^6 \text{ m} - \text{promień równikowy Ziemi,}$$

$$r_b = 6,356752 \cdot 10^6 \text{ m} - \text{promień biegunowy Ziemi,}$$

$$\rho_Z = 5,515 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} - \text{średnia gęstość Ziemi,}$$

$$M_Z = 5,9742 \cdot 10^{24} - \text{masa Ziemi (dla sprawdzenia poprawności rachunków),}$$

$$G = 6,67428 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} - \text{stała grawitacji.}$$

1. Potencjał grawitacyjny dwóch kul o promieniach równych promieniowi biegunowemu albo równikowemu, odpowiednio,  $r_b$  albo  $r_r$ .

\* Nie znamy dokładnych gęstości zewnętrznych warstw Ziemi (na pewno więcej niż  $3 \text{ g/cm}^3$ ). W zerowym przybliżeniu przyjmujemy średnią gęstość Ziemi ( $5,5 \text{ g/cm}^3$ ), co daje poprawkę nieco za dużą. Dopiero przyjęcie mniejszej gęstości zewnętrznych warstw Ziemi, mniej więcej jak prawdopodobna gęstość płaszczka ( $3,3\text{--}3,6 \text{ g/cm}^3$ ) poprawia zgodność obliczonej powierzchni ekwipotencjalnej z rzeczywistymi rozmiarami elipsoidy ziemskiej.

a) Potencjał grawitacyjny kuli o promieniu równym  $r_b$ :

$$V_b = -\frac{G \cdot M_Z}{r_b} \quad (1)$$

Masę Ziemi wyznaczamy przekształcając wzór  $\rho_Z = \frac{M_Z}{V} \Rightarrow M_Z = \rho_Z \cdot V$ .

W miejsce  $V$  podstawiamy  $V = \frac{4}{3}\pi r_b^3$  (objętość kuli), stąd otrzymujemy, że

$$M_Z = \rho_Z \cdot \frac{4}{3}\pi r_b^3$$

i porządkując wzór (1) dostajemy, że

$$V_b = -\frac{4}{3}G \cdot \rho_Z \cdot \pi \cdot r_b^2. \quad (2)$$

Jest to ważny wynik: im większy promień kuli, tym (przy tej samej gęstości) większy potencjał na jej powierzchni (chodzi o wartość bezwzględną).

Podstawiając odpowiednie dane liczbowe otrzymujemy wartość potencjału grawitacyjnego kuli o promieniu równym promieniowi biegunowemu Ziemi:

$$V_b = -6,22715 \cdot 10^7 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$$

b) Potencjał grawitacyjny kuli o promieniu równym  $r_r$ :

Korzystając ze wzoru (2) na potencjał grawitacyjny, zastępując w nim  $r_b$  promieniem równikowym  $r_r$ , a także podstawiając pozostałe dane liczbowe otrzymujemy wartość potencjału dla kuli o promieniu  $r_r$ :

$$V_r = -6,26933 \cdot 10^7 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$$

Potencjał na równiku w tym oszacowaniu byłby większy (w liczbach bezwzględnych) niż na biegunie. Ale powoli...

2. Wkład potencjału siły odśrodkowej bezwładności do potencjału grawitacyjnego Ziemi.

Przemierzając się wzdłuż promienia na wirującej tarczy (lub kuli) przezwyciężyć musimy siłę odśrodkową (o ile poruszamy się w kierunku centrum). Przemierzając się więc, wykonujemy pracę. W przypadku pola grawitacyjnego z wykonaną pracą (czyli ze zmianą energii potencjalnej) kojarzymy potencjał grawitacyjny. Przez analogię, sile odśrodkowej przypisać możemy stosowny potencjał, który umownie nazwiemy potencjałem siły odśrodkowej (pojawia się on np. w teorii zderzeń). Bez tego potencjału wyliczona powierzchnia elipsoidy

nie uwzględniałyby efektów związanych z obrotem Ziemi. Aby wyznaczyć potencjał siły odśrodkowej skorzystamy ze wzoru (3) z części I artykułu.

Przyspieszenie odśrodkowe siły bezwładności ma wartość

$$a = \omega^2 R, \quad (3)$$

gdzie  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  jest prędkością kątową, a  $R$  jest odległością od osi obrotu.

Potencjał siły odśrodkowej<sup>1</sup> wynosi więc:

$$V_o = -\frac{1}{2}\omega^2 R^2 \quad (4)$$

tak, aby pochodna potencjału po zmiennej  $R$  wzięta ze znakiem minus była równa przyspieszeniu odśrodkowemu  $a$ .

Dla Ziemi  $T = 23$  h 56 min (nie 24 h!) stąd:  $\omega = 7,28877 \cdot 10^{-5} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ .

Podstawiając do wzoru na  $V_o$  pozostałe dane liczbowe dostajemy wartość potencjału siły odśrodkowej, która wpływa na końcową wartość potencjału grawitacyjnego:

$$V_o = -0,10806 \cdot 10^6 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$$

3. Pozostają do policzenia poprawki elipsoidalne. Potencjał pochodzący od pierścienia nie jest trudny do policzenia. Wszystkie elementy masy pierścienia równikowego znajdują się w tej samej odległości od bieguna, równej  $\sqrt{r_b^2 + r_r^2}$ , wzór (1) przyjmuje więc postać (5)

a) Poprawka elipsoidalna na biegunie (do potencjału dla kuli o promieniu  $r_b$ ) wynosi

$$V_{pb} = -G \cdot \frac{M_p}{(r_r^2 + r_b^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (5)$$

gdzie:

$V_{pb}$  – potencjał pierścienia powstałego wokół kuli o promieniu  $r_b$ ,

$M_p$  – masa pierścienia.

Masę pierścienia obliczymy odejmując od masy Ziemi – elipsoidy, masę Ziemi – kuli o promieniu równym promieniowi biegunowemu. Stąd

<sup>1</sup> Uważny czytelnik zauważy, że obliczany potencjał „siły dośrodkowej” przemnożony przez masę poruszającego się ciała jest, co do wartości bezwzględnej, równoważny energii kinetycznej tego ciała  $\frac{1}{2}mv^2$ .

$$M_P = \underbrace{\rho_Z \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot r_r^2 \cdot r_b}_{\text{masa Ziemi-eliipsoida}} - \underbrace{\rho_Z \cdot \frac{4}{3} \pi r_b^3}_{\text{masa Ziemi-kuli}}.$$

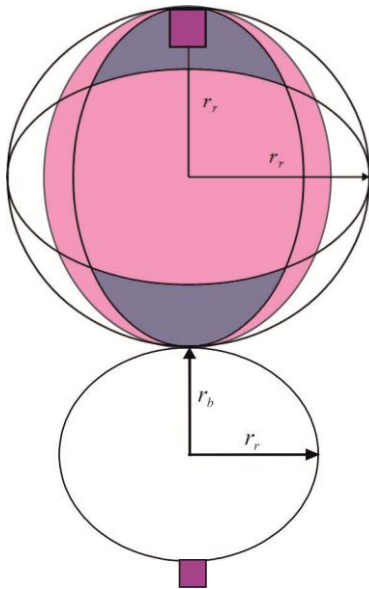
otrzymujemy  $M_P = 4,017678 \cdot 10^{22}$  kg, czyli mniej niż 1% masy całej Ziemi. Podstawiając masę pierścienia do wzoru (5) wyznaczamy wartość poprawki do potencjału

$$V_{pb} = -0,29778 \cdot 10^6 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}.$$

Uwzględniając tę elipsoidalną poprawkę otrzymujemy wartość potencjału Ziemi na biegunie:

$$V_{b,g} = \underbrace{-6,22715 \cdot 10^7}_{V_b} - \underbrace{0,29778 \cdot 10^6}_{V_{pb}} = -6,25693 \cdot 10^7 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}.$$

- b) Potencjał pierścienia (poprawka elipsoidalna na brakujące\* czasy biegunowe, zob. rys. 2) dla kuli o promieniu  $r_r$ :



Rys. 2. Elipsoida widziana z równika, to kula o promieniu równikowym  $r_r$ , od której odjęto dwie czapy nad biegunami. Brakujące czapy zastępujemy w obliczeniach równoważnymi *ujemnymi* masami umieszczonymi na biegunach

\* Stosujemy takie przybliżenie przez analogię z elektrostatyką. Jeśli jakieś ciało jest w swej objętości jednorodnie naładowane elektrycznie, a pewna jego część jest elektrycznie obojętna, to możemy obliczyć potencjał wywołany takim ładunkiem przyjmując, że całe ciało jest naładowane, po czym odjąć przyczynkę od części nienaładowanej zakładając, że dodatkowo ta część jest naładowana przeciwnie. Brakująca masa na czasach biegunowych eliipsoidy, w porównaniu do kuli o promieniu równikowym (czyli większym niż biegunowy) to jakby „ujemna” masa tych czas.

$$V_{pr} = G \frac{M_p}{(r_r^2 + r_b^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Masę tego\* pierścienia obliczamy odejmując od masy kuli o promieniu  $r_r$  masę Ziemi – elipsoidy:  $M_p = \frac{4}{3}\pi \cdot \rho_Z (r_r^3 - r_r^2 r_b) = 2,019042 \cdot 10^{22}$  kg. Zauważmy, że masa czasz biegunowych jest dwa razy mniejsza niż pierścienia równikowego.

Obliczając potencjał równoważnego pierścienia otrzymujemy poprawkę

$$V_{pr} = +0,14965 \cdot 10^6 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}.$$

Znak „+” oznacza, że poprawkę *odjeliśmy* od potencjału kuli o promieniu  $r_r$  – w analogii z potencjałem elektrostatycznym brakującą masę na czasach biegunowych traktujemy jak ładunek elektryczny przeciwnego znaku. Potencjał *grawitacyjny*  $V_{r,g}$  (nie uwzględniający potencjału odśrodkowego) wynosi więc na równiku

$$V_{r,g} = \underbrace{-6,269332 \cdot 10^7}_{V_r} + \underbrace{0,014965 \cdot 10^7}_{V_{pr}} = -6,254367 \cdot 10^7 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$$

Uwzględniając dodatkowo potencjał odśrodkowy dostajemy, że całkowity potencjał grawitacyjny  $V_r$  punktów na powierzchni Ziemi–elipsoidy wynosi na równiku:

$$V_r = \underbrace{-6,254367 \cdot 10^7}_{V_{r,g}} - \underbrace{0,010806 \cdot 10^7}_{V_o} = -6,26517 \cdot 10^7 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}.$$

Potencjał grawitacyjny na biegunie i na równiku są w takim oszacowaniu równe z dokładnością do 0,13%. Powierzchnia wirującej i spłaszczonej na biegunach Ziemi jest więc powierzchnią ekwipotencjalną!

Można potencjały na równiku i biegunie oszacować dokładniej, ale należałoby tego dokonać nie za pomocą zgrubnych przybliżeń, ale korzystając z metod rachunku całkowego a ponadto trzeba znać z większą dokładnością gęstość różnych warstw Ziemi.

Obliczone wartości potencjałów  $V_b$ ,  $V_{r,g}$  oraz  $V_o$  (i doświadczalne wartości  $r_r$  i  $r_b$ ) poprzez cytowany już kilkakrotnie wzór (3) pozwalają w prosty sposób<sup>2</sup>

\* Jest to inny pierścień, niż omawiany wcześniej na s. 42; ten jest „biegunowy”.

<sup>2</sup> Z ogólnego wzoru (3) i wzorów na potencjały grawitacyjny i odśrodkowy dedukujemy, że  $a_b = V_b/r_b$ , a  $a_r = V_{r,g}/r_r + 2V_o/r_r$ , na biegunie i równiku, odpowiednio.

obliczyć przyspieszenie ziemskie na równiku i biegunie. Wartości tak obliczone wynoszą  $9,772 \text{ m/s}^2$  i  $9,843 \text{ m/s}^2$ , odpowiednio, w niezłej zgodności z wartościami doświadczalnymi cytowanymi na początku artykułu.

Podsumowując, idealny kształt Ziemi odbiega od rzeczywistego ukształtowania. Idealna powierzchnia Ziemi to taka, jaką przybrałoby morze całkowicie ją oblewające – powierzchnia morza jest w każdym punkcie ekwipotencjalna, „pozioma”, a innymi słowy, prostopadła do sumy siły grawitacji i odśrodkowej siły bezwładności. Środek Ziemi to nie jej środek geometryczny, ale punkt, do którego zbiegają się wszystkie „piony” murarskie zawieszane w różnych miejscach na powierzchni Ziemi. Jak pisał Kopernik – jest to środek ciężkości Ziemi.

Przyspieszenie grawitacyjne to pochodna potencjału wzdłuż promienia – jeśli więc powierzchnia ekwipotencjalna przebiega dalej od „środka” Ziemi, to przyspieszenie grawitacyjne jest tam *mniej*, jak to ma miejsce na równiku. Przedstawione obliczenie poprawki do powierzchni ekwipotencjalnej wynikającej z ruchu obrotowego Ziemi i jej spłaszczenia jest dydaktycznie inspirujące, choć podręczniki tego tematu unikają.

Dodatkowe, lokalne poprawki dla ustalenia *referencyjnego*, grawitacyjnego kształtu Ziemi (czyli kształtu *geoidy*) wynikają z lokalnych różnic w gęstości płaszcza. Większa gęstość skał daje większą *bezwzględną* wartość potencjału na powierzchni. Z kolei, ponad powierzchnią Ziemi wartość bezwzględna potencjału zmniejsza się z wysokością. Nad skałami ciężkimi powierzchnie ekwipotencjalne przebiegają więc wyżej (dalej od środka Ziemi) niż nad skałami lekkimi. Europejska Agencja Kosmiczna (ESA) stwierdza: „nad podmorską górą morze wybrzusza się ku górze”.

Doświadczalne wyznaczenie referencyjnej powierzchni Ziemi nie jest bynajmniej proste: należy mierzyć siłę grawitacji w pobliżu powierzchni Ziemi i wyznaczyć z tych pomiarów kształt powierzchni ekwipotencjalnej. Uczynił to ostatnio czuły satelita GOCE należący do ESA, latający na małej wysokości (150 km) i używający do korekty trajektorii silników na strumieniu jonów ksenonowych. Potwierdził on niewielkie odchylenia od powierzchni elipsoidy rzędu  $-100 \text{ m}$ ,  $+80 \text{ m}$ , w rejonie Oceanu Indyjskiego i Islandii, odpowiednio. Paradoksalnie, w rejonie Himalajów powierzchnia referencyjna geoidy przebiega *pod* powierzchnią elipsoidy: najwyższe góry świata to dryfująca krawędź lekkich skał.

P.S. Ogólnie, pomiary siły ciężkości potrafimy przeprowadzić z dokładnością do 8 cyfr znaczących. Oddziaływanie grawitacyjne Księżyca (i Słońca) daje, po przeciwległych stronach równika, różnice odpowiadające zmianie poziomu powierzchni ekwipotencjalnej rzędu kilku metrów, jak to obrazują przyływy

morza<sup>3</sup>. Na ósmą cyfrę znaczącą lokalnej siły grawitacji ma wpływ rozmieszczenie wieżowców w otoczeniu badanego punktu, zob. [1].

Rozważania o Ziemi oblanej morzami i powierzchniach ekwipotencjalnych wyjaśniają nie tylko spóźnianie się zegarów na równiku i elipsoidalny kształt naszego globu, ale potwierdzają ruch obrotowy Ziemi.



Fot. 1. Wbrew rozpowszechnionym, a niepełnym cytowaniom, napis na pomniku w Toruniu głosi „Ruszył Ziemię, wstrzymał Słońce i *niebo*”. To właśnie wirujące niebo, „którego rozmiarów nie znamy, a być może znać nie możemy” [4], niepokoiło Mikołaja Kopernika pięćset lat temu (powstanie *Komentarza* jest datowane gdzieś między rokiem 1510 a 1514)

### Podziękowania

Autorzy dziękują panu redaktorowi Witoldowi Zawadzkiemu za wnikliwą lekturę rękopisu i cenne uwagi.

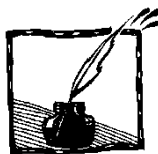
### Literatura

- [1] Europejska Agencja Kosmiczna, [http://www.esa.int/images/C2\\_gravity\\_crop.jpg](http://www.esa.int/images/C2_gravity_crop.jpg)
- [2] R.H. Steward, Introduction to Physical Oceanography, [http://oceanworld.tamu.edu/resources/ocng\\_textbook/chapter17/chapter17\\_04.htm](http://oceanworld.tamu.edu/resources/ocng_textbook/chapter17/chapter17_04.htm)
- [3] Irving Michelson, *Tides' Tortured Theory*, Bulletin of the Atomic Scientists, March 1974, zob. <http://books.google.com>
- [4] M. Kopernik, *O obrotach ciał niebieskich*, tłum. L.A. Birkenmajer, Wydawnictwo Zakład Narodowy im. Ossolińskich, Wrocław 2004

---

<sup>3</sup> Amplituda pływów oceanicznych określona z potencjału grawitacyjnego i potencjału dośrodkowego jest rzędu metrów, więcej niż rzeczywiste pływy na otwartym oceanie. Decydujący wpływ na wielkość pływów mają zjawiska *mechaniki cieczy* [2].

Zagadnienia pływów oceanicznych próbowali rozwiązywać najwybitniejsi uczeni od Sir Newtona przez Markiza de Laplace'a do Lorda Kelvina [3], a nawet wielki polski matematyk i filozof epoki romantyzmu Józef Maria Hoene Wroński. Żadnemu z nich tak do końca się to nie udało, więc my nie będziemy się tego nawet podejmować...



## Kąt odchylenia promienia w pryzmacie: wzór ścisły i jego przybliżenia

Jacek Ciborowski\*, Maria Sobol\*\*

\*Uniwersytet Warszawski, Wydział Fizyki

\*\*Warszawski Uniwersytet Medyczny, Zakład Biofizyki i Fizjologii Człowieka

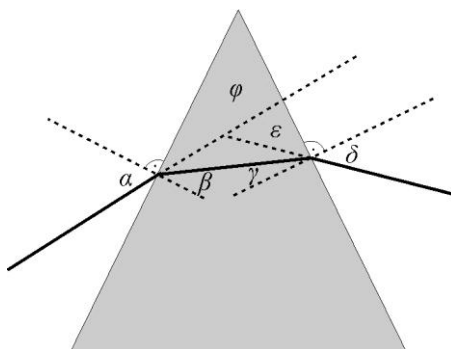
W szkole wyprowadzano następujący, przybliżony wzór na kąt odchylenia  $\varepsilon$ , promienia padającego na pryzmat:  $\varepsilon = (n - 1)\varphi$ , gdzie  $\varphi$  to tzw. kąt łamiący pryzmatu, a  $n$  – względny współczynnik załamania światła dla ośrodka, z którego wykonany jest pryzmat. We wzorze tym nie występuje zależność od kąta padania promienia na ściankę pryzmatu  $\alpha$ , więc narzuca się pytanie o zakres stosowalności tego wzoru. Wyprowadźmy więc ścisły wzór na kąt odchylenia oraz przedyskutujmy jego przybliżenia w funkcji zmiennych  $\alpha$  i  $\varphi$ . Sprawdźmy również, jak dobre jest przybliżenie szkolne. W rachunkach przyjmijmy, że pryzmat wykonany jest z lodu o współczynniku załamania światła  $n = 1,31$ .

Bieg promienia światła w pryzmacie przedstawiony jest na rys. 1, z którego wynikają następujące związki dla kątów i ich funkcji (dalej przyjmujemy  $n = n_2/n_1$ ):  $\varphi = \beta + \gamma$  oraz  $\varepsilon = \alpha + \delta - (\beta + \gamma)$  oraz  $\sin \alpha / \sin \beta = n$  oraz  $\sin \delta / \sin \gamma = n$ . Z tych związków otrzymujemy:  $\varepsilon = \alpha + \delta - \varphi$  oraz  $\sin \delta = n \sin \gamma = n \sin(\varphi - \beta)$ . Eliminując kąt  $\beta$  otrzymujemy:

$$\sin \delta = \sin \varphi \cdot \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \sin \alpha \cdot \cos \varphi, \quad (1)$$

i stąd następujący ścisły wzór na kąt odchylenia promienia w pryzmacie:

$$\varepsilon = \alpha + \arcsin\left(\sin \varphi \cdot \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \sin \alpha \cos \varphi\right) - \varphi. \quad (2)$$



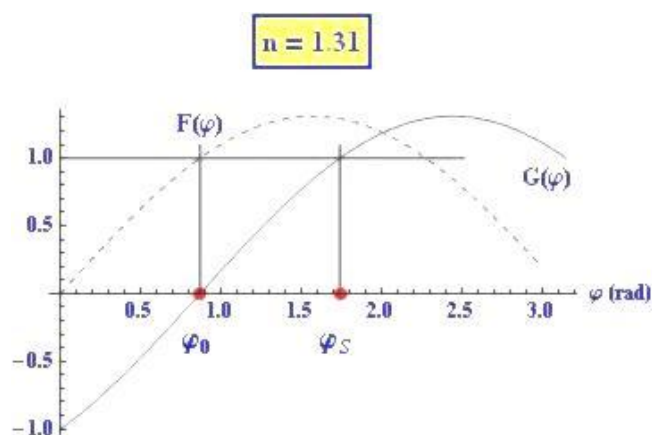
Rys. 1. Bieg promienia światła w pryzmacie:  $\alpha$  – kąt padania,  $\varepsilon$  – kąt odchylenia,  $\varphi$  – kąt łamiący pryzmatu. Liniami kropkowanymi oznaczono normalne do ścianek bocznych pryzmatu a przerywanymi przedłużenia promieni



Wzór ten nie jest w szkole wyprowadzany prawdopodobnie z powodu konieczności skorzystania z funkcji arcus sinus, której nie ma w programie nauczania. Ta funkcja również pojawiłaby się w rachunku prowadzącym do warunku dla kąta padania, aby promień załamany wyszedł z pryzmatu przez drugą ściankę, tzn. nie uległ na niej wewnętrznemu odbiciu. Oczywiście musi w tym celu zachodzić  $\sin \delta < 1$ , co odpowiada warunkowi:

$$\sin \alpha > \sqrt{n^2 - 1} \sin \varphi - \cos \varphi \equiv G(\varphi), \quad (3)$$

gdzie prawą stronę nierówności zdefiniowano jako funkcję  $G(\varphi)$  i przedstawiono na rys. 2 dla pryzmatu wykonanego z lodu ( $n = 1,31$ ). Funkcja ta przecina oś odciętych w punkcie  $\varphi_0 = \arcsin(1/n)$ ; dla lodu  $\varphi_0 = 0,8685$  ( $49,76^\circ$ ). Tak więc dla pryzmatów o kątach łamiących mniejszych niż  $\varphi_0$  nie ma możliwości aby promień uległ całkowitemu wewnętrznemu odbiciu na drugiej ścianie. Jeśli kąt łamiący jest większy niż  $\varphi_0$  wówczas całkowite wewnętrzne odbicie zajdzie dla kątów padania spełniających warunek:  $0 \leq \sin \alpha \leq G(\varphi)$ . W szczególności, gdy kąt łamiący spełnia warunek:  $G(\varphi) > 1$  wówczas całkowite wewnętrzne odbicie na drugiej ścianie zachodzi dla dowolnych wartości kąta padania  $\alpha$ . Odpowiada to kątom łamiącym  $\varphi > \varphi_S$  gdzie, jak łatwo można sprawdzić,  $\sin(\varphi_S/2) = 1/n$ , a więc  $\varphi_S = 2\varphi_0$ . Dla pryzmatu z lodu,  $\varphi_S = 1,7370 \approx 99,52^\circ$ .



Rys. 2. Funkcje  $F(\varphi) = n \sin \varphi$  oraz  $G(\varphi) = \sqrt{n^2 - 1} \sin \varphi - \cos \varphi$  dla lodu ( $n = 1,31$ ). Na osi odciętych oznaczono kąty  $\varphi_0 = 0,8685$  i  $\varphi_S = 2\varphi_0 = 1,7370$  (objaśnienie w tekście)

Szkolne przybliżenia wzoru (2) polegały na ograniczeniu się do małych kątów  $\alpha \approx 0$  ( $\alpha \ll n$ ),  $\varphi \approx 0$  i w konsekwencji do przyjęcia przybliżeń:  $\alpha/\beta \approx n$  oraz  $\delta/\gamma \approx n$ , których zastosowanie prowadzi do wzoru szkolnego:

$$\varepsilon \approx (n - 1) \varphi. \quad (4)$$

Zależność od zmiennej  $\alpha$  „zgubiła się” wskutek tego, że w powyższych przybliżeniach ograniczyliśmy się do pierwszego wyrazu rozwinięcia funkcji sinus,  $\sin x \approx x$ . Jak widać z wcześniejszego rachunku, całkowite wewnętrzne odbicie nie jest możliwe w przybliżeniu małych kątów, gdyż warunek ten oznacza również, że rozważamy pryzmaty o kątach łamiących znacznie mniejszych niż  $\varphi_0$  oraz kąty padania promieni również spełniających ten warunek.

Wprowadźmy teraz wyrazy wyższych rzędów w przybliżeniach funkcji występujących we wzorze ścisłym (2) tak, aby pojawiła się zależność od  $\alpha$ . Nadal oczywiście przyjmujemy, że  $\varphi \ll 1$ . W tym celu wykorzystamy pierwsze dwa wyrazy rozwinięć występujących w tym wzorze funkcji. Przyjmujemy zatem:  $\sin x \approx x - x^3/6$ ,  $\cos x \approx 1 - x^2/2$ ,  $\sqrt{1 \pm x} \approx 1 \pm x/2$ .

Zdefiniujmy funkcję  $\Omega$ :

$$\Omega = \arcsin\left(\sin \varphi \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \sin \alpha \cos \varphi\right). \quad (5)$$

Rozwijając pierwiastek oraz funkcje trygonometryczne, zachowując wyrazy do trzeciego rzędu iloczynów zmiennych  $\alpha$  i  $\varphi$ , otrzymujemy:

$$\Omega \approx \arcsin(n\varphi - \alpha + \zeta) \quad \text{gdzie} \quad \zeta = \frac{\alpha^3}{6} - \frac{\alpha^2 \varphi}{2n} + \frac{\alpha \varphi^2}{2} - \frac{n\varphi^3}{6}.$$

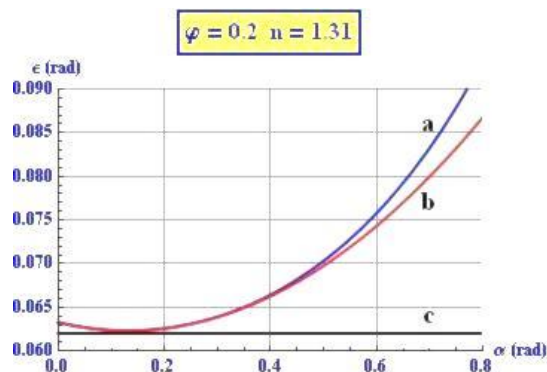
Pozostaje nam jeszcze rozwinięcie funkcji arcus sinus. Korzystamy z pierwszych dwóch wyrazów rozwinięcia:  $\arcsin x \approx x + x^3/6$ . Po wykonaniu nietrudnych, aczkolwiek żmudnych rachunków, zachowując wyrazy do trzeciego rzędu iloczynów zmiennych  $\alpha$  i  $\varphi$ , otrzymujemy następujący wzór dla kąta odchylenia promienia w pryzmacie:

$$\varepsilon \approx (n-1)\varphi \left[ 1 + \underbrace{\frac{(n+1)}{2} \left( \frac{\alpha^2}{n} - \alpha\varphi + \frac{n\varphi^2}{3} \right)}_{\text{poprawka } C(\alpha, \varphi)} \right], \quad (6)$$

gdzie  $C(\alpha, \varphi)$  jest poprawką najniższego rzędu do wzoru szkolnego. Powyższa poprawka, będąca kwadratową funkcją kątów  $\alpha$  i  $\varphi$ , jest zawsze dodatnia ponieważ wyróżnik  $\Delta$  równania kwadratowego:  $\alpha^2/n - \alpha\varphi + n\varphi^2/3 = 0$  jest ujemny, zarówno gdy traktujemy je jako równanie dla zmiennej  $\alpha$  jak i zmiennej  $\varphi$ . Wartość kąta  $\alpha$ , przy którym funkcja ta osiąga minimum dla ustalonego kąta  $\varphi$ , wynosi:

$$\alpha_{min} = n \varphi/2, \quad (7)$$

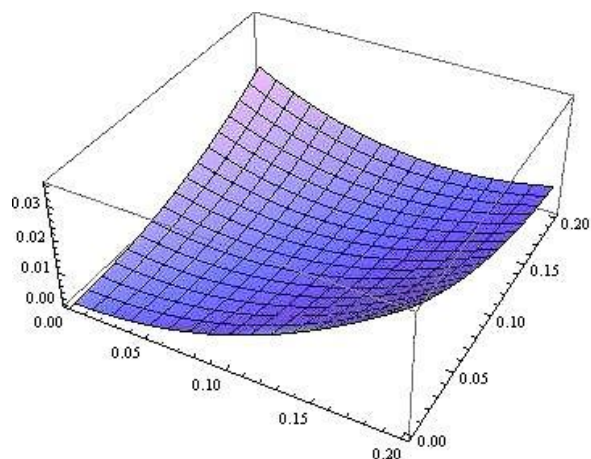
a wartość poprawki w minimum wynosi:  $C(\alpha_{min}, \varphi) = (n+1)n\varphi^2/24$ . Łatwo pokazać, że dla tej szczególnej wartości kąta  $\alpha$  zachodzi również:  $\delta = \alpha_{min}$ , tak więc minimum poprawki odpowiada symetrycznemu biegowi promienia w pryzmacie.



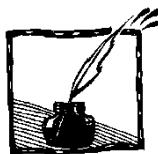
Rys. 3. Porównanie zależności kąta odchylenia  $\epsilon$ , od kąta padania  $\alpha$ , w pryzmacie z lodu o kącie łamiącym  $\varphi = 0,2$ . Oznaczenia: (a) – wzór ścisły (2); (b) – wzór przybliżony (6); (c) – wzór szkolny (4)

Porównanie ścisłej i przybliżonej zależności kąta odchylenia od zmiennych  $\alpha$  dla wartości kąta łamiącego  $\varphi = 0,2$  przedstawione jest na rys. 3. Widzimy, że zależność przybliżona (6) bardzo dobrze zgodna jest ze ścisłą (2) w dość dużym zakresie wartości kąta  $\alpha$  (do około 0,4 rad) dla pryzmatu o małym kącie łamiącym,  $\varphi = 0,2$ .

Poprawka do wzoru szkolnego  $C(\alpha, \varphi)$  jako funkcja dwóch zmiennych przedstawiona jest na rys. 4 i widać, że nie przekracza ona 3% w zakresie małych kątów,  $0 < \alpha, \varphi < 0,2$ . Taka jest więc (nie)dokładność wzoru szkolnego w wyniku: (a) rezygnacji z wprowadzania funkcji arcus sinus; (b) przybliżania funkcji, występujących w ścisłym wzorze, tylko pierwszym wyrazem rozwinięcia w szereg Taylora.



Rys. 4. Poprawka do wzoru szkolnego  $C(\alpha, \varphi)$  dla pryzmatu z lodu ( $n = 1,31$ )



## Odgłosy z jaskini (20) Mistrz jest nagi

*Adam Smólski*

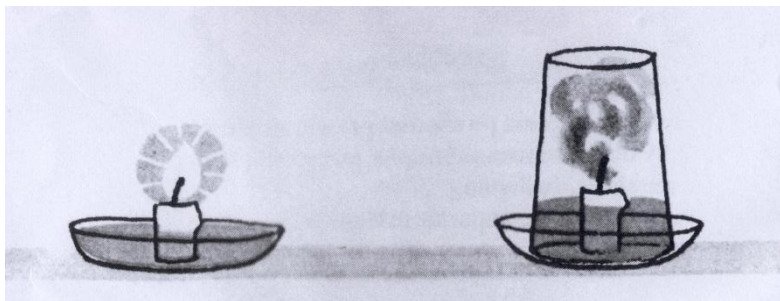
Cóż za zuchwały tytuł, co będzie, jeśli się mylę?... Nie chodzi mi o konkretnego mistrza-fizyka, lecz o pewne utrwalone i uparcie powtarzane przekonanie. Jak mi się wydaje, całkowicie błędne. Ale i konkretny mistrz tu wystąpi – Arkadiusz Piekara z jego uroczą książeczką „Ciekawe historie o powietrzu”. Czytałem tę książkę w dzieciństwie, i to wiele razy.

Oto znane doświadczenie, należące niewątpliwie do (przed)szkolnego kanonu. Mistrz Piekara zapewne nie wymyślił go i przywołał tylko wraz z obiegową interpretacją. Przeczytajmy fragment wspomnianej książeczki:

Świeca w pokoju pali się, ale nakryta szklanką gaśnie po kilku sekundach. W szklance zabrakło czegoś, co do palenia się świecy jest nieodzowne. Zbadajmy tę sprawę bliżej!

Właśnie na spodeczku z wodą pali się mała świeczka. Po co ta woda? Zaraz zobaczycie.

Nakryjcie świeczkę szklanką odwróconą do góry dnem. Świeczka jeszcze się chwilę pali, ale wkrótce gaśnie, a woda ze spodka wchodzi do szklanki – o, tyle, ile widzicie na rysunku! Co to znaczy?



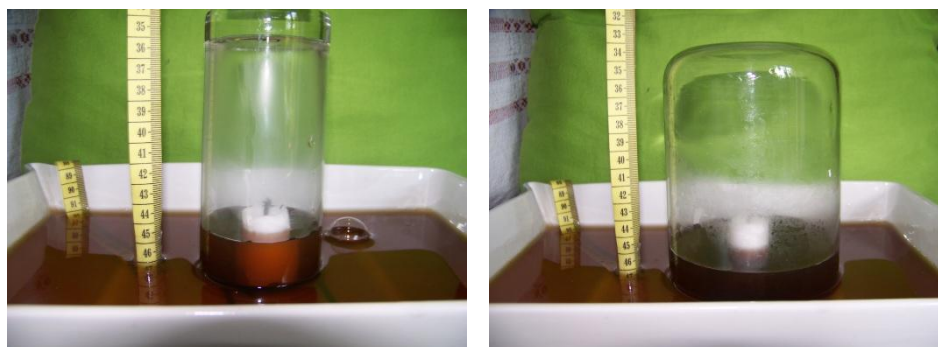
(...) Oto powietrze składa się z dwóch różnych gazów. Jeden z nich podtrzymuje palenie, drugi nie. Miejsce gazu zużytego przy spalaniu zajęła woda, wypełniając 1/4 objętości szklanki. Oznacza to, że gaz ten zajmuje 1/4 objętości powietrza. Gaz, który podtrzymuje palenie, nazywamy tlenem. Drugi z tych gazów, który zajmuje 3/4 objętości powietrza, palenia nie podtrzymuje; nazywa się on azotem. Powietrze jest mieszaniną tlenu i azotu.

Nie wiem, czemu Arkadiusz Piekara podał 1/4 zamiast 1/5, ale nie w tym problem. Sprawa jest dużo poważniejsza. Elementarna chemia podpowiada, że miejsce wypalonego tlenu zajmuje dwutlenek węgla, i to w liczbie cząsteczek dokładnie takiej samej – zamiast jednej cząsteczki  $O_2$  mamy jedną cząsteczkę  $CO_2$ . Ta sama liczba cząsteczek oznacza tę samą objętość.

Czemu zatem woda włązi do szklanki? Sam najpierw kombinowałem, że poza  $\text{CO}_2$  powstaje także  $\text{H}_2\text{O}$ . I może się skrapla, gdy świeczka zgaśnie. No, ale żadnych kropelek na ścianie szklanki nie widać.

Właściwy trop jest chyba inny – podsunął mi go, i to bez długiego zastanawiania się, jeden z przyjaciół-fizyków. Zasugerował, że mamy do czynienia z tym samym efektem, co przy stawianiu baniek lekarskich. Nakrywając szklanką płonąca już świecę, zamykamy pod nią mocno rozgrzane powietrze wokół płomienia. Gdy świeca zgaśnie, powietrze szybko stygnie i zmniejsza objętość. Rzeczywiście, woda wchodzi do szklanki dopiero w momencie, gdy świeca gaśnie, a nie równomiernie w trakcie wypalania się tlenu. Arkadiusz Piekara jakby nie zauważył tego szczegółu.

Wypadało dokonać jakiejś doświadczalnej weryfikacji. Najprostszy chyba sposób przekonania się, że z interpretacją Piekary jest coś nie tak, to nakrywanie świecy naczyniami o różnej objętości. Czy szklana jest mała czy duża, tlenu wypala się zawsze jedna piąta. Natomiast efekt bańki lekarskiej będzie zależny od wielkości szklanki – dużą nakrywamy średnio chłodniejsze powietrze niż małą. Oto dwa zdjęcia – ze zwykłą szklanką i z półlitrową zlewką:



Woda jest ruda, bo zabarwiłem ją herbatą. W szklance wciągnięta woda zajmuje ok.  $1/6$  początkowej objętości powietrza, w zlewce ok.  $1/9$ . Gdy użyłem jeszcze większego naczynia – czego już nie ma na zdjęciu – w ogóle nie zaobserwowałem wciągania wody.

Inny pomysł na doświadczenie to zapalanie świecy już nakrytej. Jeden z moich przyjaciół próbował robić to za pomocą grzejnej spiralki, z zachęcającymi wynikami, jednak nie udało się doświadczenia dobrze sfotografować. Ja zastosowałem sposób prostszy: w słoneczny dzień można zapalić świeczkę pod szklanką za pomocą soczewki. Sam knot co prawda zapala się niechętnie, ale wetknięty obok łepka zapalniczki – od razu (wszystko szybko gaśnie, nie mam pewności czy knot zdąży się od zapalniczki zapalić, być może więc wystarcza sama zapalniczka, bez świecy). Oto zdjęcie z finału doświadczenia – szklanka jest już nieco zadymiona. Po chwilowym rozszerzeniu się powietrza woda WRÓCIŁA

DO WYSOKOŚCI ZAZNACZONEJ WCZEŚNIEJ pisakiem (dobrze jest przedtem wyciągnąć słómką do napojów nieco powietrza, by początkowy poziom wody wewnątrz szklanki był wyższy niż na zewnątrz):



Nie robiłem wielu prób, w imię zasady, że „udanego doświadczenia nie powtarza się” ☺. Zachęcam do eksperymentowania czy ze spiralką, czy z soczewką, zwłaszcza może z większymi naczyniami, by świeczka paliła się dłużej.

Apeluję do nauczycieli fizyki i chemii, aby historyjki o „zajmowaniu miejsca tlenu przez wodę” już może nie powtarzali, bo to chyba jednak bzdura, kusząca tylko pozorami łatwego rozumienia.

Pewnie jest w naszych nauczycielskich przyzwyczajeniach podobnych bzdur więcej. Ale niech kto inny już wyciąga je na światło dzienne. Jest dobry moment (dwudziesty odcinek!), abym pisanie „Odgłosów z jaskini” zakończył. Dziękuję czytelnikom i *Fotonowi* za cierpliwość, zachęcając do nadal życzliwego towarzyszenia „Lwiątku”, które, już bez mojego udziału, oby miało się jak najlepiej.



## KĄCIK ZADAŃ

### Powierzchnie ekwipotencjalne

Witold Zawadzki

Instytut Fizyki UJ

1. Jaki kształt ma powierzchnia cieczy w naczyniu obracającym się ze stałą szybkością wokół pionowej osi?

#### Rozwiązanie:

Powierzchnia cieczy jest powierzchnią ekwipotencjalną, to znaczy powierzchnią równego (jednakowego) potencjału pola (czyli energii potencjalnej przypadającej na jednostkową masę lub ładunek), ponieważ wtedy nie występuje styczny do powierzchni przepływ cieczy. W naszym przypadku układu nieinercyjnego mamy do czynienia z potencjałem **wypadkowego** pola siły ciężaru (grawitacji) i siły odśrodkowej bezwładności. Energia potencjalna małej masy  $m$  cieczy znajdującej się w dowolnym punkcie na powierzchni wynosi

$$E_p = mgh + \left(-\frac{1}{2}m\omega^2 r^2\right),$$

gdzie:  $g$  – wartość przyspieszenia grawitacyjnego,  $\omega$  – szybkość kątowna, z jaką obraca się naczynie ( $\omega = 2\pi/T$ ). Przy wyborze układu współrzędnych jak na rysunku, otrzymujemy:

$$E_p = mgy - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2.$$

Na powierzchni ekwipotencjalnej mamy  $E_p = \text{const} = mgC$  (stała), więc

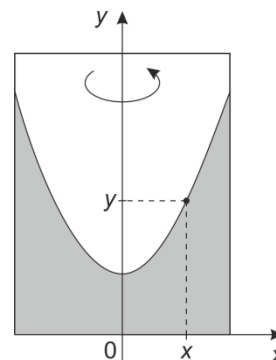
$$mgy - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = C.$$

Z powyższego równania otrzymujemy kolejno:

$$mgy = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + C$$

$$y = \frac{\omega^2}{2g} x^2 + C$$

Otrzymaliśmy równanie paraboli, co oznacza, że powierzchnia cieczy w wirującym ze stałą szybkością naczyniu ma kształt paraboloidy obrotowej.





2. W wyniku obrotu Ziemi dookoła własnej osi, Ziemia ma kształt lekko spłaszczonej kuli (elipsoidy obrotowej), powierzchnia Ziemi jest powierzchnią ekwipotencjalną wypadkowego pola. Obliczyć, o ile równikowy promień Ziemi  $r_r$  jest większy od promienia biegunowego  $r_b$ . Założyć, że potencjał ziemskiego pola grawitacyjnego jest taki, jak wytworzony przez jednorodną kulę:  $V(r) = -GM/r$ , gdzie  $G$  – stała grawitacji,  $M$  – masa Ziemi,  $r$  – odległość od jej środka,

### Rozwiązanie:

Potencjał wypadkowego pola siły grawitacji i siły odśrodkowej dany jest wzorem

$$V = -\frac{GM}{r} + \left(-\frac{1}{2}\omega^2 x^2\right),$$

gdzie  $x$  – odległość danego punktu od osi obrotu Ziemi.

Rozważamy tylko dwa punkty: na biegunie i na równiku. Potencjał na biegunie wynosi  $V_b = -\frac{GM}{r_b}$ ,

a potencjał na równiku  $V_r = -\frac{GM}{r_r} - \frac{1}{2}\omega^2 r_r^2$ .

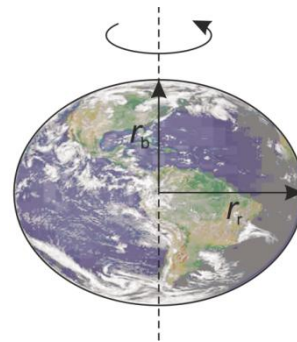
Powierzchnia Ziemi jest powierzchnią ekwipotencjalną wypadkowego pola, zatem  $V_b = V_r$ , skąd otrzymujemy równanie

$$\begin{aligned} -\frac{GM}{r_b} &= -\frac{GM}{r_r} - \frac{1}{2}\omega^2 r_r^2 \\ \frac{1}{2}\omega^2 r_r^2 &= \frac{GM}{r_b} - \frac{GM}{r_r} \\ \frac{1}{2}\omega^2 r_r^2 &= GM \frac{r_r - r_b}{r_b r_r} \end{aligned}$$

Występująca w liczniku ułamka różnica  $r_r - r_b$  to nasza szukana  $x$ . Mamy zatem

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\omega^2 r_r^2 &= GM \frac{x}{r_b r_r} \\ x &= \frac{\omega^2 R^4}{2GM} \end{aligned}$$

gdzie przyjęto  $r_b \approx r_r \approx R$ . Podstawiając  $R = 6370$  km otrzymujemy  $x \approx 11$  km. Rzeczywista różnica promieni: równikowego i biegunowego Ziemi wynosi około 21 km, więc otrzymany wynik jest obarczony błędem na poziomie 50%. Błąd ten jest spowodowany przyjętymi przybliżeniami, głównie założeniem potencjału pola centralnego  $1/r$ . Wynik ma więc jedynie jakościowy charakter. Zaprezentowane rozwiązanie miało na celu pokazanie idei powierzchni ekwipotencjalnej oraz potencjału siły odśrodkowej.







## Turniej Młodych Fizyków 2012

Andrzej Nadolny  
Instytut Fizyki PAN, Warszawa



Podobnie, jak w poprzednich latach, Polskie Towarzystwo Fizyczne organizuje w roku szkolnym 2011/2012 **Turniej Młodych Fizyków** dla uczniów szkół ponadgimnazjalnych.

**W pierwszym etapie** drużyny szkolne opracowują rozwiązania dowolnych dziesięciu spośród siedemnastu zadań (zamieszczonych poniżej) i przesyłają je do wybranego przez siebie ośrodka w Katowicach lub Warszawie. Termin nadsyłania prac – listownie lub w formie elektronicznej – upływa 31 stycznia 2012 roku. Drużyny, których prace uzyskają najwyższe oceny, wezmą udział w **półfinałowych zawodach turniejowych**. Odbędą się one w połowie marca w Katowicach oraz Warszawie. Podczas zawodów każda drużyna przedstawia rezultaty swojej pracy w referatach, występuje także jako oponent cudzych prac oraz recenzent wystąpień innych drużyn. Istotnym elementem zawodów jest dyskusja prowadzona między referentem a oponentem.

**Finał Turnieju**, z udziałem najlepszych drużyn półfinałowych, zostanie rozegrany 26 maja w Instytucie Fizyki PAN w Warszawie. W odróżnieniu od poprzednich etapów w zawodach finałowych (we wszelkich wystąpieniach oraz dyskusji) obowiązuje język angielski. Zwycięska drużyna będzie reprezentowała Polskę w Turnieju Międzynarodowym, który odbędzie się w lipcu w niemieckiej miejscowości Bad Saulgau.

Więcej informacji na temat Turnieju, jego dotychczasowych edycji, wymogów dotyczących prac pisemnych oraz prezentacji na zawodach, a także regulamin zawodów i adresy komitetów organizacyjnych można znaleźć na stronie internetowej <http://ptf.fuw.edu.pl/tmf.html>.

### 1. Działko magnetyczne (Gaussa)

W niemagnetycznej rynnicy spoczywa szereg jednakowych kulek stalowych oraz znajdujący się pomiędzy nimi silny magnes. Gdy inna kulka stalowa, tocząca się z boku, uderza w skrajną kulkę, kulka z przeciwnego końca odskakuje z zadziwiająco dużą prędkością. Wyznacz optymalne położenie magnesu, przy którym uzyskany efekt jest największy.

### 2. Przecinanie powietrza

Podczas wirowania kawałka nici lub np. żyłki nylonowej z zamocowanym na końcu ciężarkiem daje się słyszeć wyraźny dźwięk. Zbadaj, w jaki sposób ten dźwięk powstaje oraz od jakich parametrów zależy.

### 3. Łańcuch koralik

W naczyniu typu zlewki znajduje się długi łańcuch nanizanych na nitkę koralików. Gdy odpowiednio dużą część tego łańcucha wyciągniemy poza brzeg naczynia i puścimy, zacznie on pod wpływem siły ciężkości spadać w dół z rosnącą szybkością. W pewnej chwili łańcuch oderwie się od krawędzi szklanki (patrz rys. 1). Zbadaj i wyjaśnij to zjawisko.



Rys. 1.



Rys. 2.

### 4. Ciekły most

W dwóch stykających się zlewkach znajduje się ciecz (np. woda dejonizowana). Po przyłożeniu wysokiego napięcia między cieczą w jednej i w drugiej szklance na krawędzi styku szklanek może się pojawić mostek z cieczy. Zbadaj to zjawisko. Uwaga: wysokie napięcie może być użyte tylko pod odpowiednią kontrolą, stosownie do miejscowych przepisów.

### 5. Jasne fale

Oświetl płaski zbiornik z wodą. Gdy na jej powierzchni zostaną wytworzone fale, można będzie zobaczyć jasne i ciemne wzory na dnie zbiornika. Zbadaj zależność między falami a obserwowanymi wzorami.

### 6. Zabawka „dzięcioł”

Zabawka „dzięcioł” – jak na rys. 2 – wykonuje ruch oscylacyjny. Zbadaj i wyjaśnij ten ruch.

### 7. Pineski

Pineska pływająca na powierzchni wody w pobliżu innych pływających przedmiotów podlega działaniu sił przyciągających. Zbadaj i wyjaśnij to zjawisko. Czy na zasadzie podobnego mechanizmu możliwe jest uzyskanie siły odpychającej?

### 8. Bąbelki

Czy jest możliwe pływanie na powierzchni wody, w której występuje dużo bąbelków? Zbadaj, jak pływanie przedmiotu zależy od obecności bąbelków.

### **9. Magnes i moneta**

Na magnesie umieść monetę w pozycji pionowej. Pochyl monetę względem magnesu, a następnie ją zwolnij. Moneta może upaść na magnes, albo powrócić do początkowego położenia pionowego. Zbadaj i wyjaśnij ruch monety.

### **10. Kolyszająca się butelka**

Butelkę częściowo napełnioną cieczą połóż na poziomej powierzchni i popchnij wprawiając ją w ruch. Po początkowym ruchu postępowo-obrotowym butelka, zanim spocznie, będzie wykonywała ruch oscylacyjny. Zbadaj ruch butelki.

### **11. Płaski przepływ**

Wąska szczelina między dwiema dużymi, przezroczystymi, poziomo umieszczonymi płytami wypełniona jest cieczą, a przez mały otwór w środku jednej z tych płyt wstrzykiwana jest inna ciecz. Zbadaj przepływ wstrzykiwanej cieczy w tej płaskiej przestrzeni.

### **12. Latające lampiony**

Papierowe lampiony mogą się unosić w powietrzu dzięki płomieniowi świecy. Zaprojektuj i wykonaj lampion z użyciem standardowej „świeczki herbacianej” (*tea-light*) tak, aby wzniósł się on na wysokość 2,5 m w możliwie najkrótszym czasie (od zapalenia świeczki). Zbadaj wpływ istotnych parametrów na ten czas.

Uwaga: zachowaj odpowiednią ostrożność, aby uniknąć ryzyka pożaru!

### **13. Mgliste szkło**

Chuchnij na powierzchnię zimnej płytki szklanej, aby nastąpiła na niej kondensacja pary wodnej. Spoglądając na białą lampę przez tak zamgloną szybkę zobaczysz wokół rozmytej centralnej białej plamki barwne pierścienie. Wyjaśnij to zjawisko.

### **14. Granularny rozbryzg**

Gdy kulka stalowa spada na powierzchnię suchego piasku, obserwuje się rodzaj piaskowego rozbryzgu, po którym może nastąpić wyrzucenie pionowej kolumny piasku. Odtwórz to zjawisko i je wyjaśnij.

### **15. Zawodna piłka golfowa**

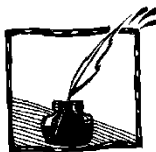
Często się zdarza, że piłka golfowa wyskakuje z dołka natychmiast po tym, jak do niego wpadła (została do niego wprowadzona). Wyjaśnij to zjawisko i zbadaj, w jakich warunkach może ono zachodzić.

### **16. Wznosząca się bańka**

Pionowa rura jest napełniona lepką cieczą. Na dnie tej rury znajduje się duża bańka powietrzna. Zbadaj ruch tej bańki unoszącej się z dna do góry.

### **17. Piłka w pianie**

Małą, lekką piłeczkę umieść w pianie mydlanej. Wymiary piłki powinny być porównywalne z rozmiarami pęcherzyków piany. Zbadaj, jak ruch piłeczki zależy od istotnych parametrów.



## XXIV Międzynarodowy Turniej Młodych Fizyków 2011

*Andrzej Nadolny*

*Instytut Fizyki PAN, Warszawa*

W Turnieju Młodych Fizyków 2011 wzięło udział 15 drużyn z 14 miejscowości. Pięciosobowe drużyny licealne, niekiedy wspomagane przez szersze grono uczniów, pracowały nad rozwiązaniami wybranych przez siebie 10 spośród 17 zadań turniejowych. Zadania turniejowe były publikowane, jak co roku, na stronie internetowej Turnieju <http://ptf.fuw.edu.pl/tmf.html>.

Pisemne opracowania należało przesłać do jednego z dwóch komitetów turniejowych – w Katowicach lub Warszawie. Drużyny wybrane na podstawie oceny prac nadesłanych w I etapie referowały swoje opracowania na zawodach II etapu, zwanych półfinałami. Odbyły się one 10 marca w Katowicach z udziałem drużyn

- V Liceum Ogólnokształcącego w Zespole Szkół i Placówek Oświatowych w Bielsku Białej,
  - II Liceum Ogólnokształcącego im. Stanisława Wyspiańskiego w Kwidzynie,
  - I Liceum Ogólnokształcącego im. Heliodora Święcickiego w Międzyrzeczu
  - Grupy Twórczej „Quark” z Pałacu Młodzieży w Katowicach,
- oraz 12 marca w Warszawie z udziałem drużyn
- VIII Liceum Ogólnokształcącego im. Adama Mickiewicza w Poznaniu,
  - XIV Liceum Ogólnokształcącego im. Stanisława Staszica w Warszawie,
  - Liceum Ogólnokształcącego im. Ziemi Kujawskiej we Włocławku,
  - Liceum Ogólnokształcącego nr 1 we Wrocławiu (dwie drużyny).

W trakcie zawodów drużyny przedstawiały rezultaty własnych prac, prowadziły dyskusje z oponentami, starającymi się znaleźć słabe punkty, same również występowały w roli oponentów oraz recenzentów działań innych drużyn.

Drużyny, które zajęły najwyższe miejsca w zawodach półfinałowych, reprezentujące

- V Liceum Ogólnokształcące w Zespole Szkół i Placówek Oświatowych w Bielsku Białej,
- Grupę Twórczą „Quark” z Pałacu Młodzieży w Katowicach,
- XIV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica w Warszawie,
- Liceum Ogólnokształcące im. Ziemi Kujawskiej we Włocławku,

wzięły następnie udział w zawodach finałowych rozegranych 28 maja w Instytucie Fizyki PAN w Warszawie. O ile w pierwszych dwóch etapach Turnieju posługiwano się językiem polskim, to w finale wszystkie wystąpienia, włącznie z dyskusją, były prowadzone w języku angielskim.

Wystąpienia finałowe oceniało jury pod przewodnictwem prof. dra hab. Macieja M. Maśki z udziałem m.in. delegowanego przez Zarząd Główny Polskiego

Towarzystwa Fizycznego prof. dr hab. Andrzeja Ślebarskiego – obaj z Uniwersytetu Śląskiego. W jury uczestniczyli fizycy z Instytutu Fizyki PAN, Uniwersytetów – Jagiellońskiego, Warszawskiego i Zielonogórskiego, był także gość zagraniczny – prof. Jozef Brestenský z Uniwersytetu Komeńskiego w Bratysławie.

Pierwsze miejsce w zawodach finałowych, a więc i w całym Turnieju, zajęła drużyna XIV Liceum Ogólnokształcącego im. Stanisława Staszica w Warszawie prowadzona przez mgra Stanisława Lipińskiego i mgra Michała Oszmańca. Uzyskała ona prawo reprezentowania Polski w Turnieju Międzynarodowym. Zanim jednak wyruszyła do Iranu, gdzie to wydarzenie miało miejsce, włożyła jeszcze sporo pracy w przygotowanie prezentacji swoich opracowań problemów turniejowych. Pomógł jej w tym trzydniowy pobyt w Instytucie Fizyki Uniwersytetu Jagiellońskiego w Krakowie, a także referowanie opracowań przed gronem specjalistów w Instytucie Fizyki PAN.

XXIV Międzynarodowy Turniej Młodych Fizyków odbył się w Teheranie w dniach 22–29 lipca z udziałem 21 drużyn narodowych – z Austrii, Białorusi, Brazylii, Bułgarii, Chorwacji, Chin, Chińskiego Tajpej (Tajwanu), Czech, Gruzji, Iranu, Kenii, Korei Płd., Niemiec, Polski, Rosji, Singapuru, Słowacji, Szwajcarii, Szwecji, Tajlandii, Ukrainy. Po trudach niełatwych zmagania polska drużyna znalazła się wśród trzech drużyn nagrodzonych brązowymi medalami. Po zawodach została zorganizowana dwudniowa wycieczka do Isfahanu, gdzie już w rozluźnionej atmosferze uczestnicy poznawali wspaniałe zabytki. W tym czasie Międzynarodowy Komitet dokonał wyboru problemów na przyszłoroczny Turniej, a zarazem wprowadził pewne zmiany do Regulaminu i Statutu. W wyjeździe do Iranu polskiej drużynie towarzyszyli mgr Michał Oszmaniec oraz dr Andrzej Nadolny, który był jurorem i członkiem Międzynarodowego Komitetu Organizacyjnego.

Turniej Młodych Fizyków 2011 był sponsorowany przez Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego, Fundację PZU, Fundację BRE Banku, Polski Komitet ds. UNESCO, Centrum Fizyki Teoretycznej PAN. Bardzo dużego wsparcia organizacyjnego udzieliły Turniejowi Instytuty Fizyki Polskiej Akademii Nauk w Warszawie oraz Uniwersytetu Jagiellońskiego w Krakowie. Wyjazd drużyny na Turniej Międzynarodowy był częściowo sponsorowany przez Urząd m.st. Warszawy.

#### SKŁAD FINAŁOWYCH DRUŻYN TMF 2011

**Drużyna V LO w Bielsku-Białej** pod opieką mgr Ewy Gajdy: Sebastian Dawid (kapitan), Damian Kołaczek, Rafał Kozik, Ignacy Mizia, Jakub Porębski

**Drużyna Grupy Twórczej „Quark” z Pałacu Młodzieży w Katowicach** pod opieką mgr Urszuli Woźnikowskiej-Bezak: Eliza Basińska (kapitan), Olivia

Cyran, Tomasz Kumor, Paweł Promny, Tomasz Tokarski, Piotr Urbańczyk (zawodn. rezerw.)

**Drużyna XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie** pod opieką mgra Stanisława Lipińskiego i mgra Michała Oszmańca: Łukasz Gładczuk (kapitan), Ryszard Błogowski, Grzegorz Fabiański, Maciej Malinowski, Stanisław Świdwiński, Wojciech Rządkowski (zawodn. rezerw.)

**Drużyna I LO im. Ziemi Kujawskiej we Włocławku** pod opieką mgra Mariusza Sobczaka: Paweł Jaworski (kapitan), Mateusz Gańczak, Igor Kobus, Arkadiusz Łukasiak, Przemysław Urbański, Katarzyna Bączkowska (zawodn. rezerw.)

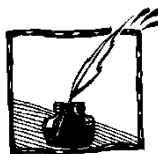


Polska drużyna po wylądowaniu na lotnisku w Teheranie, stoją od lewej: Grzegorz Fabiański, Ryszard Błogowski, Stanisław Świdwiński, mgr Michał Oszmaniec (opiekun drużyny), Maciej Malinowski, Łukasz Gładczuk (kapitan), dr Andrzej Nadolny (juror i przedstawiciel Polski w Międzynarodowym Komitecie Organizacyjnym)

Prezentacja polskiej drużyny przez jej kapitana podczas ceremonii otwarcia XXIV MTMF



Udekorowana medalami drużyna schodzi ze sceny



## O spotkaniu noblisty Wilsona z uczniami i nadchodzących zmianach w edukacji

Zofia Gołąb-Meyer

W lipcu ponownie gościł w Krakowie noblista Kenneth Wilson. Tym razem uczestniczył w konferencji STHESCA (Science, Technology, Higher Education and Society in the Conceptual Age). Kenneth Wilson ostatnio całą swą energię poświęca edukacji. Sesja specjalna konferencji STHESCA była o tym, w jaki sposób idee Petera Druckera (badacza procesów zarządzania) można wykorzystać w edukacji oraz wskazać kierunek rozwoju, w jakim powinien podążać świat. W sesji uczestniczyli Kenneth Wilson, Constance Barsky z Ohio Department of Education, Joseph A. Macciarello z Instytutu Petera Druckera (poprzez połączenie internetowe) oraz Stanisław Głazek z Instytutu Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego.

Oprócz udziału w konferencji profesor Wilson odbył dwa kilkugodzinne spotkania z licealistami – laureatami Turnieju Młodych Fizyków. Zarówno Kenneth Wilson, jak i młodzi adepci fizyki opowiadali o swojej drodze do fizyki. Okazuje się, że była ona niesłychanie podobna. Rola nauczyciela fizyki oraz rodziców bardzo istotna.

Kenneth Wilson słusznie podkreśla potrzebę zmian w systemie edukacji, który tkwi niezmiennie w pięknym modelu *Comeniusa* sprzed przeszło 300 lat, ale nieodpowiadającym na wymogi XXI wieku.

Potrzeba zmian w obecnym systemie edukacji jest widoczna gołym okiem, jednakże stwierdzenie, iż model współczesnej szkoły jest w pierwszym przybliżeniu niezmienny od lat, jest nieuprawniony. Widzę, oprócz stosunkowo drugorzędnych, a bardziej widocznych zmian, następujące istotne:

1. Przedmioty nauczania, zakres, treści nauczane, metody dydaktyczne były formułowane przez wąskie grono uczonych czy innych osób powołanych przez rząd, czy władców. W Europie panował na ten temat powszechny *consensus*. Przedmiot nauczania był narzucany uczącym się, nie był przez społeczeństwo konsultowany. Zmiany, jak na przykład usunięcie łaciny jako obowiązkowego przedmiotu, następowały powoli. Dzisiaj przedmiot nauczania, konkretne treści, są ustalane *de facto* poprzez polityków, pod dyktando społeczne, uczniów i ich rodziców.

Ta zmiana ma istotny wpływ na poziom wykształcenia absolwentów szkół. Jest zasadna obawa, czy strategia narzucania programów nauczania przez, umownie biorąc, rzesze kibiców megameczy futbolowych nie powoduje zaniedbań w edukacji soli ziemi, elit?

2. Comenius postulował powszechność szkoły. Tę w zasadzie w naszym kręgu kulturowym osiągnęliśmy. Ten fakt to kolejna istotna zmiana w szkolnictwie.
3. Zmieniła się relacja uczeń – nauczyciel. Nauczyciel spadł z piedestału nieomylnego mistrza do roli ofiarodawcy usługi edukacyjnej uczniowi. To znowuż nie jest tylko mała zmiana.

Czas pokaże jak te już dokonane zmiany wpłyną na przyszłe pokolenia, czy będą działać na rzecz przygotowania młodych do życia.

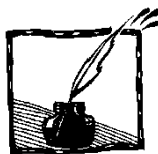
W ideach zarządzania proponowanych przez Petera Druckera kluczową rolę pełnią liderzy, którymi mogą być nauczyciele, studenci i starsi uczniowie. Stąd się bierze pomysł nowego rodzaju skautingu proponowany przez profesorów Głazka i Wilsona. Zastępy i drużyny skupiałyby się wokół jakiegoś istotnego prawdziwego programu badawczego, jak np. ochrona miejscowości przed powodziami.

Drużyna turniejowiczów, z którą spotkał się Wilson, to wszakże przykład takiej naukowej drużyny skautowskiej, tyle że niewłączonej w szerszy układ. Jak pokazuje wieloletnia praktyka, o masowości takich drużyn nie ma co marzyć. Drużyny wymagają charyzmatycznych wręcz liderów i zwariowanych na punkcie fizyki uczniów. W całej Polsce wyzwanie uczestniczenia w turnieju i wykonywanie przez rok programów badawczych podejmuje zaledwie kilkanaście drużyn. Jest nadzieja, że programy dostosowane do poziomu mniej zaawansowanych uczniów, a atrakcyjne i ważne, przyciągną szerokie rzesze nauczycieli i uczniów.



Kenneth Wilson w rozmowie z Michałem Oszmańcem





## Festiwal kół fizycznych

*Stanisław Bednarek*

*Uniwersytet Łódzki*

Festiwale nauki stały się już powszechnymi wydarzeniami, do których zdążyliśmy się przyzwyczaić. Podczas ich trwania swoje osiągnięcia prezentują zwykle pracownicy naukowcy i studenci. Niecodzienny festiwal zorganizowali w dniu 10 czerwca 2011 roku pracownicy Katedry Modelowania Procesów Nauczania Wydziału Fizyki i Informatyki Stosowanej Uniwersytetu Łódzkiego. Na tym festiwalu zaprezentowało się 40 szkolnych kół fizycznych z Łodzi i regionu łódzkiego. W sumie w spotkaniu wzięło udział ponad 200 uczniów wraz z opiekunami. Ze względu na trwający jeszcze remont gmachu Wydziału Fizyki i brak auli zdolnej pomieścić tylu uczestników, festiwal odbył się w sąsiednim gmachu Wydziału Zarządzania. Było to już drugie spotkanie tego typu. Festiwal stanowił część projektu zatytułowanego „Studia podyplomowe dla nauczycieli fizyki w zakresie doskonalenia działalności pozalekcyjnej”. Projekt jest realizowany na wspomnianym Wydziale, dzięki dofinansowaniu ze środków Unii Europejskiej. Z powodu zmniejszenia liczby godzin przeznaczonych na nauczanie fizyki, zajęcia pozalekcyjne nabierają obecnie coraz większego znaczenia. Odpowiednie przygotowanie i przeprowadzenie tych zajęć pozwala uczniom poznać prawdziwą pracę badawczą, wykonywaną przez fizyków. W ten sposób realizowany jest jeden z głównych postulatów nauczania fizyki – upodabniania procesu nauczania do procesu badawczego.

W celu realizacji postulatu upodabniania, festiwal zorganizowany został na wzór prawdziwej konferencji naukowej. W uroczystym rozpoczęciu spotkania uczestniczyli przedstawiciele władz uczelni i województwa łódzkiego. Następnie kierownik Studiów podyplomowych dr Piotr Skurski omówił założenia projektu oraz relacje między Studiami i festiwalem. Wyjaśnił również, dlaczego projekt adresowany jest przede wszystkim do uczniów gimnazjów oraz skoncentrowany na zajęciach pozalekcyjnych. Forum, na którym prezentowane są na bieżąco działalność i osiągnięcia szkolnych kół fizycznych stanowi strona internetowa [www.kola.edufizyka.pl](http://www.kola.edufizyka.pl). Na niej znajdują się linki do własnych stron wszystkich kół. Podczas pierwszego festiwalu liczba kół wynosiła 20, a obecnie jest ponad dwukrotnie większa. Wszystkie strony zostały przygotowane w systemie zarządzania treścią CMS. Umożliwia to łatwe wypełnienie aktualnymi materiałami swego rodzaju „szkieletu”, jednakowego dla każdego koła. Dzięki temu nawet osoby bez większych umiejętności posługiwania się technologią informacyjną, mogą utworzyć te strony i aktualizować ich zawartość. Po podaniu tych informacji mgr Paweł Barczyński dokonał prezentacji wszystkich kół fizycznych przy użyciu ich stron internetowych.

Po prezentacji odbyły się wykłady pracowników naukowych Uniwersytetu Łódzkiego i Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Łodzi. Dr Tomasz Czapla mówił o procesie kształtowania się świadomości własnych kompetencji, prof. Podgórska-Jachnik rozważała psychologiczne aspekty wystąpień publicznych, a prof. Tadeusz Wibig przedstawił 10 najważniejszych osiągnięć fizyków w 2010 roku, wymienionych w czasopiśmie „Physics Word”. Kolejnym etapem była sesja plenarna, podczas której swoje osiągnięcia w dziesięciominutowych prezentacjach pokazało dziewięć kół fizycznych. Wszystkie wystąpienia charakteryzowały się wysokim poziomem merytorycznym i były bardzo starannie przygotowane. Dla przykładu, członkowie jednego z kół omówili wyniki badania wstrząsów gruntu, powodujące pękanie murów zabytkowych budowli, przeprowadzone przy użyciu samodzielnie zbudowanego sejsmografu, współpracującego z komputerem. Warto odnotować, że w sesji plenarnej wzięli też udział uczniowie niepełnosprawni i zaprezentowali pantomimę dotyczącą maszyn prostych.

W popołudniowej części festiwalu odbyła się sesja plakatowa, podczas której zaprezentowało się 28 kół fizycznych. Określenie „sesja plakatowa” nie w pełni opisuje tę część festiwalu, ponieważ pokazane zostały nie tylko materiały drukowane, co ma miejsce na typowych sesjach plakatowych. Uczniowie wystawili również wiele przyrządów, modeli i zabawek zbudowanych w ramach badań prowadzonych w kołach fizycznych. Duże wrażenie wywołał rurofon – oryginalny instrument muzyczny, zbudowany z plastikowych rur wodociągowo-kanalizacyjnych, na którym można było wygrywać melodie. Rozmiary tego instrumentu wynosiły około 2 m. Gdy sesja plakatowa dobiegła końca, uczestnicy festiwalu przeszli na trawiasty plac wśród budynków kampusu Uniwersytetu Łódzkiego i stamtąd wypuścili w pogodne niebo nad Łodzią kilkadziesiąt balonów na ogrzane powietrze o rozmiarach około 1 m.

Na zakończenie festiwalu zostały rozstrzygnięte konkursy, m.in. na najlepszą fotografię, przedstawiającą zjawiska fizyczne, najdalej rzucony obiekt latający, wykonany z jednej tylko kartki papieru formatu A4 bez sklejanie oraz przeprowadzone quizy. Uczestnicy festiwalu otrzymali również pamiątkowe dyplomy, a opiekunowie kół fizycznych – podziękowania. Ostatnim akcentem festiwalu było wystrzelenie rakiety wodnej, zbudowanej przez członków jednego z kół. Oprócz starannego przygotowania i dobrej organizacji, na podkreślenie zasługuje niezwykle życzliwa atmosfera festiwalu, stworzona przez prowadzące go osoby: dr Jadwigę i Piotra Skurskich oraz mgra Pawła Barczyńskiego.



## Konferencja dydaktyków, Łódź 2011

*Stanisław Bednarek  
Uniwersytet Łódzki*

Wkrótce po zakończeniu festiwalu kół fizycznych, w dniach 17–18 czerwca, odbyła się w gmachu Wydziału Fizyki i Informatyki Stosowanej „Łódzka Konferencja Problemy Dydaktyki Fizyki, Działalność Pozalekcyjna”, zorganizowana przez Katedrę Modelowania Procesów Nauczania. W spotkaniu wzięło udział w sumie 30 osób w tym 26 z polskich ośrodków akademickich, jedna nauczycielka z Zespołu Szkół w Kaliszu oraz dwie osoby z Federalnego Uniwersytetu w Kazaniu (Rosja) i doktorantka z Tajlandii Punsiri Dam-O. Podczas konferencji odbyło się pięć sesji plenarnych, na których wygłoszono razem 22 referaty oraz dwie sesje dyskusyjne. Zorganizowano też sesję plakatową, pozwalającą na przedstawienie przez nauczycieli własnych osiągnięć w zakresie prowadzonej działalności pozalekcyjnej i środków do realizacji edukacyjnego eksperymentu fizycznego. Oprócz tego, podczas konferencji przedstawiciele Wydawnictwa ZamKor z Krakowa prezentowali podręczniki, filmy i środki dydaktyczne do nauczania fizyki. Uczestnicy konferencji wzięli także udział w uroczystej kolacji oraz odbyli wieczorny spacer z przewodnikiem po Łodzi.

Tematy referatów wygłoszonych w pierwszym dniu konferencji dotyczyły różnych form działalności pozalekcyjnej, związanych z nauczaniem fizyki. Wprowadzeniem do wystąpień był referat prof. Iwony Chrzanowskiej z Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Łodzi, dotyczący ogólnych zmian, które zaszły w systemie edukacji i sytuacji społecznej w związku z tzw. transformacją ustrojową, zachodzącą w naszym kraju od 1989 r. Skutkiem tych zmian nastąpiło ograniczenie roli opiekuńczej państwa i zwiększenie swobody obywateli. W związku z tym przed szkołami stanęły nowe zadania, polegające na dobrym przygotowaniu uczniów do nowych i trudniejszych warunków, w których będą musieli wykazać się kreatywnością i większymi zdolnościami adaptacyjnymi. Zadania te w szerokim zakresie mogą być realizowane w ramach działalności pozalekcyjnej.

Kolejne wystąpienia pierwszego dnia w sesji przedpołudniowej dotyczyły różnych form działalności pozalekcyjnej w zakresie fizyki, prowadzonych przez wyższe uczelnie. Na ten temat mówili uczestnicy z Uniwersytetów: Adama Mickiewicza w Poznaniu, Mikołaja Kopernika w Toruniu, Wrocławskiego i Marii Curie-Skłodowskiej w Lublinie. W Poznaniu prowadzone jest Koło Młodych Fizyków, w którym bierze udział ponad 40 uczniów. W Toruniu funkcjonuje Uniwersytet Dziecięcy, organizujący wykłady z licznymi pokazami, warsztaty i samodzielne doświadczenia głównie dla uczniów o ponadprzecięt-

nych potrzebach edukacyjnych. Pracownicy Uniwersytetu Wrocławskiego przeprowadzają dodatkowe lekcje z fizyki z pokazami oraz festiwale, w których bierze udział młodzież nie tylko z Dolnego Śląska, ale również z przygranicznych regionów Niemiec. W Lublinie od ponad 50 lat prowadzone są we wrześniu pokazy z fizyki, oglądane każdego roku w sumie przez ok. 20 tys. uczniów z południowo-wschodniej Polski. Oprócz tego, organizowane są w tym mieście zajęcia z fizyki dla przedszkolaków, w których bierze udział ok. 200 osób. Działalność pozalekcyjna, organizowana przez uczelnie cieszy się dużym zainteresowaniem dzieci i młodzieży, choć często ma charakter komercyjny i uczestnicy muszą ponosić opłaty za udział w zajęciach.

Doświadczenia wynikające z prowadzenia od kilku lat klas patronackich przedstawił prof. Tadeusz Wibig z Uniwersytetu Łódzkiego. Zajęcia w tych klasach polegają na tym, że uczniowie z kilku szkół przychodzą do gmachu Wydziału Fizyki i Informatyki Stosowanej Uniwersytetu Łódzkiego, gdzie biorą udział w lekcjach przygotowanych i przeprowadzanych przez pracowników i doktorantów wydziału. Charakterystyczną cechą tych lekcji jest sprawdzanie praw fizyki przy użyciu specjalnie przygotowanych do tego celu eksperymentów, oraz opracowanie statystyczne i krytyczna analiza wyników pomiarów. Badania mające za zadanie ocenę efektywności tego rodzaju lekcji wykazały, znaczne zainteresowanie nimi uczniów oraz lepsze zrozumienie zjawisk i praw fizyki, potwierdzone się wyższymi wynikami podczas egzaminów maturalnych. Niestety, udział w tych klasach nie spowodował większej częstości wybierania przez uczniów studiów na kierunku fizyka.

Warto dodać, że Prof. Wibig, oprócz wspomnianych lekcji, organizuje już od ośmiu lat w Łodzi Międzynarodowe Warsztaty Fizyki Cząstek Elementarnych (International Particle Physics Masterclasses). Biorące w nich udział grupy kilkudziesięciu łódzkich licealistów otrzymują za pośrednictwem Internetu dane pomiarowe z prowadzonych aktualnie eksperymentów CERN-ie, analizują je i biorą udział w dyskusji wyników z innymi grupami. Dr Eugene Yaschagin z Federalnego Uniwersytetu w Kazaniu dokonał porównania obecnych warunków oraz organizacji nauczania fizyki w Rosji i w Polsce, a dr Alena Khmelynitskaya z tej uczelni mówiła o roli matematyki w nauczaniu fizyki. Referaty wygłoszone po południu dotyczyły różnych problemów związanych z organizacją i prowadzeniem działalności pozalekcyjnej oraz prezentacji wyników badań, mających na celu ocenę poziomu zainteresowania i skuteczności tego rodzaju działań.

Drugiego dnia konferencji uczestnicy skoncentrowali się na ogólnych problemach dydaktyki fizyki, rozwiązaniach w zakresie kształcenia nauczycieli tego przedmiotu oraz możliwościach awansu naukowego osób, zajmujących się zawodowo dydaktyką fizyki. O aktualnych zadaniach dydaktyki fizyki i jej przedmiocie zainteresowań mówili prof. Władysław Błasiak z Uniwersytetu Pedagogicznego w Krakowie i dr Piotr Skurski z Uniwersytetu Łódzkiego.

Trudności prowadzenia badań w zakresie dydaktyki fizyki zarysował prof. Andrzej Majhofer z Uniwersytetu Warszawskiego, a relacje między fizyką i jej dydaktyką rozważał prof. Edward Kapuścik z Wyższej Szkoły Dentystycznej w Ustroniu. Dwa ostatnie referaty wygłoszone przez prof. Ryszarda Naskręckiego z Uniwersytetu Adama Mickiewicza oraz dr Leszka Ryka z Uniwersytetu Wrocławskiego dotyczyły trudności w dostosowaniu procesu kształcenia nauczycieli fizyki do nowych aktów prawnych – Ustawy o Szkolnictwie Wyższym, Krajowych Ram Kwalifikacji oraz Rozporządzenia Ministerstwa Nauki Szkolnictwa i Wyższego w sprawie standardów kształcenia przygotowującego do zawodu nauczyciela.

Uczestnicy konferencji podczas ożywionej dyskusji wyrazili zaniepokojenie z powodu wątpliwości, jakie na obecnym etapie dopracowania wzbudzają nowe akty prawne, dotyczące kształcenia nauczycieli. Podjęli również temat, nurtujący od parędziesięciu lat środowisko dydaktyków przedmiotowych, który dotyczy trudności, a właściwie braku formalnych możliwości, uzyskiwania w Polsce stopni naukowych doktora i doktora habilitowanego za prace naukowe z dydaktyk szczegółowych. Przedmiotem dyskusji była też niewspółmierność między wysiłkami wkładanymi w popularyzację i promocję fizyki, a liczbą uczniów wybierających ten kierunek studiów. Biorący udział w konferencji ustalili, iż zostaną pojęte prace nad sformułowaniem wspólnej opinii środowisk dydaktyków przedmiotowych na te tematy i zawarte w nich postulaty będą przekazane odpowiednim instytucjom ustawodawczym. Podczas konferencji wspomniano też zasługi dla rozwoju dydaktyki fizyki zmarłego 30 kwietnia 2011 roku doc. dra Ignacego Stępniewskiego i uczczono Jego pamięć minutą ciszy.



## Nadświatlnie neutrina

*Paweł Góra*

*Instytut Fizyki UJ*

Na kilka dni przed oddaniem tego numeru *Fotonu* do druku, grupa badaczy doniosła, a media to zaraz podchwyciły, że neutrina poruszają się z prędkością większą od prędkości światła. Gdyby to odkrycie potwierdziło się, byłaby to rewolucja w fizyce. Ale czy powinniśmy się spodziewać rewolucji?

Badacze z grupy OPERA, mającej swoje przyrządy pomiarowe w tunelu pod masywem Gran Sasso we Włoszech, zmierzili prędkość wiązki neutrin mionowych wysyłanych z CERN w Genewie. Wynik wielokrotnie powtarzanych pomiarów jest zaskakujący: neutrina zdają się poruszać z prędkością o 0,000025%

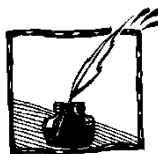
większą od prędkości światła w próżni. Niby niewiele, ale zgodnie ze Szczególną Teorią Względności cząstki obdarzone masą mogą poruszać się jedynie z prędkością mniejszą od prędkości światła. Gdyby wynik OPERY potwierdził się, stanowiłoby to wielki przełom w fizyce.

Nie jest to pierwszy raport o zaobserwowaniu prędkości nadświatlnych. Nie mam tu na myśli enuncjacji szaleńców lub niedouków, ale wyniki bardzo pięknych eksperymentów, przeprowadzonych zgodnie z wszelkimi zasadami sztuki przez zawodowych fizyków. Dotychczas jednak zawsze okazywało się, że jakiś bardzo subtelny i dalece nieoczywisty efekt, przeoczony przez eksperymentatorów, pozwalał zinterpretować wyniki pomiarów bez uciekania się do hipotezy prędkości nadświatlnych. Przypuszczam, że i tym razem będzie podobnie. W obecnym eksperymencie ciekawe jest jednak to, iż cząstkami nadświatlnymi miałyby być neutrina, tymczasem zaś pewna grupa badawcza od lat utrzymuje, że neutrina mają urojoną (sic!) masę, co byłoby konsyistentne z ich tachionową (nadświatlną) naturą. I choć w szczegółach tamtego eksperymentu nie widać żadnego błędu, nikomu nie udało się go powtórzyć, jest więc on na ogół ignorowany.

Teraz więc przyszła pora na przeniecie eksperymentu OPERA na dziesiątą stronę. Jeśli nie uda się znaleźć w nim żadnej luki, trzeba go będzie powtórzyć. Jeżeli eksperyment powtórzony na innych detektorach, z innymi źródłami neutrin, da podobny wynik, no to już będzie coś. Wielkie COŚ.

Nawet i wtedy jednak nie będzie to musiało oznaczać, że neutrina poruszają się nadświatlnie. Może okazać się, że my bardzo słabo znamy fizykę neutrin – a znamy ją rzeczywiście nie najlepiej, gdyż neutrina niezwykle słabo oddziałują z pozostałą materią: w każdej sekundzie przez nasze ciała przelatują miliardy neutrin, dla których jesteśmy właściwie przezroczysti. Wiemy, że różne rodzaje neutrin przechodzą jedne w drugie (na przykład neutrina elektronowe stają się mionowymi i na odwrót), ale nie znamy szczegółów tego procesu. Możliwe, że gdzieś tu kryje się wyjaśnienie hipotetycznej nadświatłości neutrin.

Jeśli jednak okaże się, że neutrina *naprawdę* poruszają się z prędkościami nadświatlnymi, a zatem że mogą istnieć nadświatlne cząstki oddziałujące ze zwykłą materią, cóż, fizyka sobie z tym poradzi, choć będzie to wymagało ogromu pracy. Ba, fizycy mogą się z takiego stanu rzeczy wręcz cieszyć, gdyż będzie się działo! Wbrew temu co mówią jej krytycy, fizyka zupełnie nie jest dogmatyczna.



## Jaka brzydka katastrofa!

Grzegorz Sęk

Młodzieżowe Obserwatorium Astronomiczne  
w Niepołomicach

W trzecim tegorocznym numerze dwumiesięcznika *Fizyka w Szkole* ukazał się artykuł pod tytułem „Asteroida – realne zagrożenie”, podpisany przez Panią Iwonę Cieślik. Z tytułu i treści wynika, iż autorka chce nas przestrzec przed katastrofą, jaka grozi Ziemi ze strony niewielkich ciał niebieskich. Tymczasem to sam artykuł okazał się katastrofą, co postaram się udokumentować w kilkunastu zdaniach.

Już sam tytuł brzmi obco – mamy przecież takie zadomowione w polszczyźnie słowa, jak planetoida, planetka, mała planeta, po cóż więc posługiwać się angielską kalką. Następująca po tytule sentencja – motto Carla Sagana – zostało przetłumaczone z języka oryginału najgorzej jak tylko to jest możliwe, cały artykuł zaś roi się od błędów merytorycznych i językowych. Ponieważ wyliczenie ich wszystkich wyczerpałoby cierpliwość czytelnika, ograniczę się tylko do omówienia najjaskrawszych przypadków.

Już początek lektury artykułu wrzuca czytającego w przepaść zwątpienia we własny rozum, bowiem pierwsze zdanie brzmi tak: „**Asteroida 2002MN pojawiła się w roku 1908 na terenach syberyjskich**”. Po pierwsze, albo rok 2002 albo 1908 – tertium non datur. Po drugie, tylko z pewnym trudem można się domyślić, że autorka nawiązuje do katastrofy (nie do końca wyjaśnionej), jaka w czerwcu 1908 roku zdarzyła się nad rzeką Podkamienna Tunguska, która to rzeka płynie rzeczywiście przez obszar krainy Syberią środkową zwanej.

A dalej jest już tylko gorzej.

„**Miała średnicę 50–100 m i mogła zrównać z Ziemią miasto wielkości Mediolanu.**” (pisownia oryginalna). Szanowna autorko, słowa „zrównać z ziemią” oznaczają nic innego, jak tylko zrównanie z powierzchnią terenu, zatem słowo „ziemia” nie jest tu użyte w znaczeniu nazwy planety. No a skąd się wziął w tym zdaniu Mediolan? Ani to miasto szczególnie znane w Polsce, ani specjalnie wielkie, ani też z niczym szczególnie (no może oprócz fresku wielkiego Leonarda) niekojarzone. Czemu nie Ciechanów na przykład? Tu nasuwa się pierwszy trop – autorka dość topornie korzystała z jakiegoś włoskiego opracowania.

„**Asteroida eksplodowała 10 lub 5 km nad Ziemią w atmosferze, całkowicie niszcząc wówczas otaczające tereny**” – heroiczne zmagania autorki z polszczyzną zaowocowały zdaniem–potworkiem.

**„Krater nie został odnaleziony, ponieważ eksplozja nie odbyła się na Ziemi”** – konsekwencja autorki w łamaniu reguł ortografii i zasad stylu nadal jest widoczna.

**„To wydarzenie jest dowodem na to, jak wielkie jest to niebezpieczeństwo”** – teza o korzystaniu z automatycznego translatora zdaje się potwierdzać.

**„Asteroidy posiadają nieregularną budowę a ich centrum stanowi Słońce, które okrążają”** – niezdolność do sformułowania poprawnego logicznie okresu zdaniowego osiąga kulminację.

**„Poruszają się po orbitach, których tor może ulec odkształceniu w wyniku zderzeń z innymi ciałami niebieskimi we wszechświecie”** – tu z kolei Układ Słoneczny awansował do roli Wszechświata, co prawda nieco zdeprecjonowanego przez pisanie z małej litery. No i ten „tor orbity” – toż to oryginalny wkład autorki w mechanikę nieba.

**„Ciała niebieskie – elementy układu słonecznego do których należą: Słońce, Planety (sic!), Ziemia leżące na powierzchni nazywanej sferą niebieską”** – a to już zupełne curiosum, za taka „definicję” gimnazjalista łąduje w ławce z jedyneką, autorka zdaje się ni w ząb nie rozumieć pojęć, jakich używa w swoim artykule. Na jakiej to sferze niebieskiej leży Ziemia? A może jednak nasza planeta jest płaska i niosą ją żółwie na grzbietach? Ta teza, choć dziwaczna, miała przynajmniej pozory logiki.

**„Jak głosi teoria Titusa (sic) – Bodego...”** – nie ma żadnej teorii Titiusa – Bodego, jest tylko empiryczna reguła, sformułowana przez J.D. Titiusa i spopularyzowana przez H.J. Bodego. Autorka omawianego artykułu jest (wyczytałem w internecie) z wykształcenia magistrem inżynierem chemii – aż chciałoby się zawołać „pilnuj, szewcze, kopyta”.

**„Kolejne ciekawe wydarzenie miało miejsce w 1997 roku, kiedy to dostrzeżono światło kierujące się w stronę Ziemi”** – otóż, droga autorko, dziecko wychodzące pod rozgwieżdżone niebo zobaczy kilka tysięcy światel, „kierujących się” w stronę Ziemi. Dzięki temu dostrzegamy gwiazdy, czasem planety, nierzadko Księżyc. Jest to widok ciekawy, często zachwycający, ale na miano wydarzenia nie zasługuje.

**„Okręgi składające się z tych odłamków okrążają słońce (sic) i poruszają się z bardzo dużą prędkością”** – autorka najwyraźniej wierzy w substancjalność pojęcia orbity.

**„Odkryto, że znajduje się tam jedyna taka podwójna asteroida 617 Patroclus, której średnice są bardzo podobne”** – przypomina się dowcip o wróbelku, który różnił się tym, że miał jedną nóżkę bardziej.

**„Asteroid spadając wyzwala olbrzymią energię, stąd też widoczna na niebie smuga światła odbitego od słońca (sic)”** – szczyt absurdu został przekroczony.

**„Odkrycia asteroidy Eros 433 dokonano wysyłając na nią statek kosmiczny”** – jednak nie, można jeszcze głupiej.



Żeby oszczędzić czytelnikowi tortur, nie będę wyliczał kolejnych rażących przykładów językowej niezborności i merytorycznej ignorancji autorki.

A przecież można było napisać na przykład tak:

„W czerwcu roku 2002 na niebie pojawiło się słabe światełko, którego szybki ruch wśród gwiazd wynikał z niewielkiej odległości od Ziemi małego obiektu, jakiemu nadano nazwę 2002MN. Była to planetoida, która minęła Ziemię w odległości zaledwie 120 000 kilometrów, a jej masa i parametry orbity przypominały tę, która, jak sądzimy, spowodowała głośną katastrofę na Syberii w roku 1908. Na szczęście wybuch, który przed laty nastąpił w atmosferze, z racji miejsca nie spowodował żadnych ofiar, ale można przypuszczać, że byłby w stanie zniszczyć duże miasto. Pomimo wieloletnich poszukiwań, na ziemi prócz powalonych połaci syberyjskiej tajgi nie udało się odnaleźć ani krateru, ani też odłamków hipotetycznego meteorytu, co utrudnia jednoznaczną interpretację katastrofy syberyjskiej. Jednak gwałtowność tego niemal współczesnego zjawiska każe się zastanowić nad zagrożeniami, jakie mogą nieść kolizje z naszą planetą niewielkich skalistych ciał, licznie obecnych w Układzie Słonecznym”.

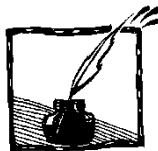
I tak dalej, i tak dalej.

Podsumowanie jest smutne, wnioski wyliczę w punktach:

- 1) P. Iwona przeczytała artykuł o zagrożeniu ze strony planetoid w obcojęzycznym (może włoskim) czasopiśmie popularnonaukowym, niewiele z niego rozumiejąc.
- 2) Przetłumaczyła ten artykuł zdanie po zdaniu, korzystając z jakiegoś internetowego tłumacza.
- 3) Wynik tego nadludzkiego, jak się okazało, wysiłku opatrzyła własnym nazwiskiem i wysłała do Redakcji dwumiesięcznika *Fizyka w szkole*.
- 4) Niestety Redakcja dopuściła artykuł do druku, ukazał się on w dziale „Astronomia dla każdego”.

Otóż ja, nauczyciel astronomii z wieloletnim stażem, nikomu takiej „astronomii” nie polecam.

**Od Redakcji:** W świetle cytowanego artykułu oraz w perspektywie „reformy edukacji” redakcja wyraża swoje obawy o poziom nauczania fizyki w ramach przedmiotu „przyroda” przez nauczycieli nie będących fizykami „z krwi i kości”. Oby nie była to podobna katastrofa.



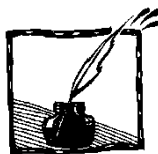
## Europejski Festiwal Nauki „Science on Stage”

Zenona Stojcka

*I LO im. T. Kościuszki w Wieluniu*

W dniach 16–19 kwietnia 2011 roku odbywał się w Kopenhadze kolejny Europejski Festiwal „Science on Stage”. Festiwal stanowi forum wymiany doświadczeń nauczycieli w zakresie nauczania przedmiotów przyrodniczych. Umożliwia wymianę dobrych praktyk, innowacyjnych pomysłów zmierzających do poprawy jakości nauczania. Tym razem 350 nauczycieli z 24 krajów europejskich i Kanady gościło w nowoczesnej szkole średniej Ørestad Gymnasium w Kopenhadze. Festiwal otworzył duński minister edukacji Troels Lund Poulsen. Zajęcia festiwalowe przyjmowały różne formy: były to zajęcia warsztatowe, zajęcia typu „Master Class”, prezentacje na scenie oraz tzw. targi, na których wszyscy nauczyciele mogli zaprezentować swoje projekty. Oferta zajęć warsztatowych jak i pokazów na stoiskach poszczególnych krajów była bardzo bogata. Pełny program spotkania oraz krótkie streszczenia znajdują się na stronie <http://www.science-on-stage.eu>. Dodatkowo uczestnicy festiwalu mieli możliwość obejrzenia spektaklu „Kopenhaga”, zwiedzenia kopenhaskiego „Ekspermentarium”, czy wybrania jednej z wielu krótkich wycieczek proponowanych przez organizatorów. Przewodniczącym 12-osobowej delegacji polskiej na Festiwal „Science on Stage” był prof. Wojciech Nawrociak z Wydziału Fizyki Uniwersytetu Adama Mickiewicza w Poznaniu. Członkowie naszej reprezentacji, wyłonieni na podstawie Ogólnopolskiego Festiwalu „Nauki Przyrodnicze na Scenie 4”, prezentowali swoje projekty przy polskim stoisku. Dodatkowo Maria Dobkowska wraz z Mirosławem Łosiem prowadzili warsztaty poświęcone nowym technologiom w nauczaniu fizyki. Najlepsze projekty festiwalowe zostały nagrodzone. Pierwsza nagroda w wysokości 2000 euro została przyznana za niemiecki projekt „High Speed/Slow motion”. Pokazano w nim w jaki sposób, wykorzystując aparat cyfrowy z opcją robienia szybkich zdjęć seryjnych, można analizować krok po kroku procesy i zdarzenia zachodzące bardzo szybko. Autorzy pokazali to na przykładzie karate, łamania spaghetti, spadania kropel wody, eksplozji balonu. Szerszą relację z tego festiwalu można znaleźć na stronie <http://www.staff.amu.edu.pl/~fizscena>.

Kolejny Ogólnopolski Festiwal „Nauki Przyrodnicze na Scenie 5” odbędzie się na Wydziale Fizyki Uniwersytetu Adama Mickiewicza w Poznaniu w dniach 21 i 22 września 2012 roku. Jego celem jest **pokazanie wkładu nauk przyrodniczych (fizyki, chemii, biologii) oraz matematyki w budowanie wiedzy społeczeństwa o otaczającym nas świecie i o wpływie tych nauk na współczesne życie człowieka**. Krajowy Komitet Organizacyjny ogłosił już zasady przyszłorocznego festiwalu na stronie <http://www.staff.amu.edu.pl/~fizscena>.



## XVIII Międzynarodowa Konferencja Młodych Naukowców

*Urszula Woźnikowska-Bezak*

*Pracownia Fizyki Pałacu Młodzieży w Katowicach*

Grupa Twórcza Quark Pracowni Fizyki Pałacu Młodzieży w Katowicach pod opieką fizyka oraz członka zarządu Międzynarodowej Konferencji Młodych Naukowców Urszuli Woźnikowskiej-Bezak po raz kolejny reprezentowała Polskę podczas XVIII Międzynarodowej Konferencji Młodych Naukowców (18<sup>th</sup> International Conference of Young Scientists), która odbyła się w dniach 24–29 kwietnia 2011 w Moskwie. Wszyscy uczestnicy są laureatami ogólnopolskich konkursów organizowanych przez Pracownię Fizyki Pałacu Młodzieży w Katowicach i członkami Grupy Twórczej Quark, która co roku reprezentuje Polskę na zawodach. Opiekunami naukowymi polskiej reprezentacji byli prof. dr hab. Władysław Borgiel z Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach, prof. dr hab. Maciej Kolwas z Polskiej Akademii Nauk w Warszawie, dr Joachim Gmyrek z Politechniki Śląskiej oraz prof. dr hab. Maciej Maśka z Uniwersytetu Śląskiego.

Polskiej reprezentacji w Moskwie towarzyszyli opiekunowie: Anna Kazura – fizyk, Jakub Polewka – student Politechniki Warszawskiej, wieloletni członek Grupy Twórczej Quark Pałacu Młodzieży w Katowicach.

W tegorocznej konferencji udział wzięło około 120 uczestników z 16 państw: Holandii, Niemiec, Czech, Białorusi, Ukrainy, Litwy, Macedonii, Indonezji, Rumunii, Brazylii, Chorwacji, Tajlandii, Węgier, Rosji, Turcji oraz Polski.

Członkami jury byli naukowcy, nauczyciele, przedstawiciele wszystkich państw. Zawody odbywały się w następujących kategoriach: fizyka teoretyczna, fizyka eksperymentalna, ekologia, biofizyka, matematyka i informatyka.

W czasie pobytu w Moskwie organizatorzy zapewnili nam mnóstwo atrakcji, między innymi koncert, zwiedzanie Moskwy i okolic, ognisko. Zwiedziliśmy prawie całą Moskwę – Plac Czerwony, Kreml, Galerię Trietiańską, Arbat, Panoramę Moskwy, Moskiewskie Metro, Plac Zwycięstwa i wiele innych ciekawych miejsc. Pozwoliło nam to zauważyć zarówno podobieństwa jak i różnice kulturowe między naszymi krajami. W Zvenigorodzie odwiedziliśmy kompleks cerkwi. Jako że konferencja odbywała się w czasie Świąt Wielkanocnych byliśmy świadkami obchodów tego święta w kościele prawosławnym. Poznaliśmy tradycje i zwyczaje wielkanocne w Rosji i mieliśmy możliwość skosztowania tradycyjnych potraw.

Serdecznie dziękujemy za wsparcie organizacyjne Europejskiemu Towarzystwu Fizycznemu, Katowickiemu Holdingowi Węglowemu, Miejskiemu Przedsiębiorstwu Gospodarki Komunalnej w Katowicach.

Z ramienia Europejskiego Towarzystwa Fizycznego konferencji patronował jego prezydent prof. dr hab. Maciej Kolwas.

Skład reprezentacji Polski, zdobyte medale i wyróżnienia:

**Laureaci:**

Kategoria fizyka teoretyczna

– **srebrny medal** – **Mariusz Nowak** – *Akustyka pocieranych „Śpiewających mis”*

„Nazywam się Mariusz Nowak, chodzę do Gimnazjum nr 1 w Katowicach i na Międzynarodową Konferencję Młodych Naukowców przygotowałem prezentację o śpiewających misach, które są wytwarzane z brązu o bardzo dużej zawartości cyny w rejonie Himalajów od kilku tysięcy lat. Te praktyczne naczynia (kuchenne i sakralne) są znane jako instrumenty polifoniczne, które emitują fale akustyczne o kilku częstotliwościach i bardzo wielu harmonicznym. Tym, co dodatkowo zwróciło moją uwagę na śpiewające misy jest ich bardzo ciekawa właściwość – gdy pobudzi się je do drgań przez pocieranie, woda w nich sprawia wrażenie wrzenia w temperaturze pokojowej. Celem moich badań było poznanie drgań misy w dwóch przypadkach: wzbudzenia misy za pomocą uderzenia oraz wzbudzenia misy przez pocieranie. Istotną cechą tych badań było wykorzystanie pospolitych urządzeń i ogólnie dostępnego oprogramowania. Rejestrowałem dźwięki za pomocą dyktafonu, z którego następnie przenosiłem nagranie do komputera, gdzie wyznaczyłem widmo częstotliwości, obliczyłem okres i częstotliwość dudnień, wyznaczyłem amplitudy drgań i logarytmiczny dekrement tłumienia a następnie obliczyłem współczynnik tłumienia drgań. W wyniku przeprowadzonych badań zauważyłem podobieństwo mis do kwadrupoli emitujących promieniowanie. Stwierdziłem, że to interferencja fal wzbudzanych przez pocieraną misę jest na tyle silna, iż wyrzuca krople wody na wysokość nawet kilkudziesięciu centymetrów, co może znaleźć zastosowania praktyczne w rozpylaczach i nawilżaczach. Częstotliwość kołowa dudnień misy wynosi 3,35 Hz, która koreluje z częstotliwością fal mózgowych delta, jakie są odpowiedzialne za stan głębokiego transu. Uwiarygodnia to informacje o stosowaniu tego typu mis przez buddyjskich mnichów w czasie medytacji”.

– **brązowy medal** – **Margareta Pelesz** – *Lewitron – magnetyczna lewitacja*

„Zjawisko lewitacji od zawsze fascynowało ludzi. Do niedawna zdawało się być pragnieniem nie do osiągnięcia, zagadką nie do rozwiązania, a nawet magiczną sztuczką. Moje rozważania dotyczą lewitacji magnetycznej – wyjątkowego typu lewitacji, która opiera się wyłącznie na zjawisku magnetyzmu. Modelem obrazującym ideę tego zjawiska jest lewitron – zabawka, dzięki której jesteśmy w stanie wprowadzić ciało w stan zawieszenia wyłącznie przy użyciu własnych dłoni. Dzięki mojej pracy każdy może zrozumieć na czym polega lewitacja i odkryć tajemnicę tego niezwyklego fenomenu, który okazał się niczym innym, jak zjawiskiem fizycznym. Lewitacja wprowadza do naszej rzeczywistości odrobinę magii i dziecięcą fascynację, z którą chciałabym się podzielić z uczestnikami Międzynarodowej Konferencji Młodych Naukowców. Uważam, że dzięki mojej pracy uda mi się rozwiązać wątpliwości odnośnie tego zjawiska oraz odpowiedzieć na frapujące pytanie: co sprawia, że lewitacja jest możliwa?”.

– **brązowy medal** – **Mateusz Górecki** – *Regulacja profilu lotniczego przez wklęsłość wirową*

„Nazywam się Mateusz Górecki. Uczę się w VIII Liceum Ogólnokształcącym w Katowicach i jestem tegorocznym maturzystą. Jestem wieloletnim członkiem Grupy

Twórczej Quark i wielokrotnym zwycięzcą konkursów fizycznych w Polsce i na świecie. Dodatkowo fascynuję się lotnictwem. Jako pilot samolotowy pragnę, aby lotnictwo rozwijało się coraz szybciej. Jako że podczas startów i lądowań małych samolotów występuje duże prawdopodobieństwo wypadku, postanowiłem wprowadzić pewne ulepszenie w budowie skrzydła samolotów, pozwalające na uzyskanie mniejszej prędkości podejścia oraz uzyskanie większych kątów natarcia. Parametry te zwiększają bezpieczeństwo podczas lotu, na czym najbardziej mi zależy. Zaprezentowanie wyników moich badań na Międzynarodowej Konferencji Młodych Naukowców 2011 jest dla mnie bardzo ważne. Pozwoli mi to na zrewolucjonizowanie prywatnego lotnictwa”.

#### Kategoria fizyka eksperymentalna

##### **– brązowy medal – Eliza Basińska – *Rezonans. Zjawisko plastikowego kubka nad powierzchnią***

„Temat mojej pracy pośrednio dotyczy muzyki, która jest moją pasją, a która fascynowała ludzkość niemal od zarania dziejów. Sama gram na gitarze, pianinie, organach i od niedawna na akordeonie, a wcześniej interesowałam się budową instrumentów muzycznych. Fascynowało mnie jak barwa głosu i brzmienie zmieniają się w zależności od kształtu instrumentu, a także od tego, gdzie on się znajduje – te same skrzypce brzmią inaczej na sali koncertowej, a inaczej w domu. Z czasem zaczęła interesować mnie fizyczna natura dźwięku, jego naukowy, ścisły opis. W mojej pracy na ICYS posłużyłam się plastikowym kubeczkiem jako modelem pudła rezonansowego występującego w skrzypcach czy gitarze. Kolejną inspiracją były organy wodno-hydrauliczne, wynalezione już w starożytnej Aleksandrii w III w. p.n.e. – wprowadziłam więc wodę do mojego doświadczenia. Tak powstał temat – „Rezonans. Zjawisko plastikowego kubeczka nad powierzchnią wody”. Matematyczny opis drgań kubeczka okazał się wyzwaniem, które warto było podjąć. Dlatego też owoc mojej pracy chciałabym zaprezentować na Międzynarodowej Konferencji Młodych Naukowców w Moskwie. Jestem pewna, że temat zainteresuje audytorium, jako że dotyczy wszechobecnego dźwięku i wody, bez której nie byłoby życia, w zaskakujący i niebanalny sposób łącząc te dwie dziedziny”.

##### **– wyróżnienie specjalne – Filip Maśka – *Fizyka yo-yo***

„Nazywam się Filip Maśka i jestem uczniem II LO im. Ziemi Olkuskiej w Olkuszu. Moja praca dotyczy yo-yo. Yo-yo jest zabawką wyjątkowo prostą. Okazuje się jednak, że z fizycznego punktu widzenia procesy, które zachodzą podczas zabawy z yo-yo, są dalekie od spodziewanej prostoty. Na przykład badając ruch swobodnie puszczonego yo-yo wydaje się, jakby w pewnych okresach całkowita energia rosła, co oczywiście nie może być prawdą. Dopiero szczegółowa analiza pokazuje, że źródłem tego pozornego paradoksu jest zmiana efektywnego promienia ośki yo-yo przy nawijaniu się sznurka. Literatura dotyczących ruchu yo-yo jest dość bogata, lecz ten aspekt najprawdopodobniej nie był jeszcze nigdzie badany. W ramach swojej pracy zbudowałem model matematyczny, który po uwzględnieniu owej zmiany promienia prawie idealnie opisuje ruch yo-yo obserwowany w przeprowadzonych eksperymentach. Także eksperymenty te są interesujące: żeby precyzyjnie wyznaczyć zależność położenia yo-yo, a także jego prędkości liniowej i kątowej od czasu, zabawka była filmowana i fotografowana w świetle

lampy stroboskopowej, a otrzymane zdjęcia i filmy analizowane komputerowo. Z kolei zmierzenie momentu bezwładności, potrzebnego do obliczeń związanych z energią yo-yo, opierało się o metodę wahadła torsyjnego z użyciem podczerwonych czujników przesyłających dane do komputera. W sumie praca wymagała zarówno zaawansowanego aparatu matematycznego, jak i wyrafinowanych technik eksperymentalnych. Mam nadzieję, że jej wyniki wnoszą wkład do wiedzy na temat fizyki yo-yo”.

– wyróżnienie specjalne – **Paweł Promny** – *Taśma samoprzylepna*

– wyróżnienie specjalne – **Jakub Sawicki** – *Badanie wydajności współczynnika termoelektrycznego*

#### Kategoria ekologia

– wyróżnienie specjalne – **Ilona Grzyb** – *Odzyskiwanie ciepła i termoizolacja. Metoda ekonomicznego ogrzewania budynków*

#### **Finaliści:**

##### Kategoria biofizyka:

**Tomasz Tokarski** – *Odchudzanie lodami*

##### Kategoria fizyka teoretyczna:

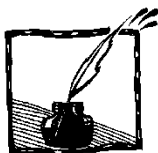
**Tomasz Kumor** – *Mechaniczny laser*

##### Kategoria ekologia:

– **Adrian Jarczyk** – *Sensory fototermiczne oraz fotoakustyczne w monitoringu środowiska*

– **Paweł Mleczo** – *Naturalna radioaktywność gleb*

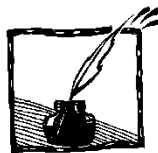




## Nagrody dydaktyczne PTF 2011

W lipcu 2011 roku zostały przyznane następujące nagrody Polskiego Towarzystwa Fizycznego dla wyróżniających się nauczycieli:

- Nagroda PTF I stopnia im. Grzegorza Białkowskiego i Medal im. Grzegorza Białkowskiego:  
**mgr Barbara Zegrodnik** – nauczycielka w Zespole Szkół nr 1 im. G. Morcinka w Tychach, za rozwijanie twórczych form pracy z młodzieżą oraz popularyzację wiedzy przyrodniczej w kraju i za granicą.
- Nagrody PTF II stopnia *ex aequo*:  
**mgr Marek Lipiński** – nauczyciel i wicedyrektor I LO im. K. Brodzińskiego w Tarnowie, za organizację różnorodnych działań w celu zainteresowania fizyką uczniów i lokalnej społeczności,  
i  
**dr Włodzimierz Natorf** – nauczyciel w IX LO im. Klementyny Hoffmannowej w Warszawie, za pasję i twórcze przekazywanie wiedzy z fizyki i wkład w poprawę jakości nauczania.
- Nagroda PTF III stopnia:  
**mgr Teresa Łaskowska** – nauczycielka w I LO im. Marii Konopnickiej w Suwałkach, za pracę z uzdolnioną młodzieżą.
- Wyróżnienia:  
**mgr Grzegorz Łopatka** – nauczyciel w II LO im. Andrzeja Frycza Modrzewskiego w Rybniku, za pracę z utalentowaną młodzieżą i wybitne osiągnięcia uczniów na arenie międzynarodowej i krajowej,  
**mgr Anna Mazurkiewicz** – nauczycielka z V LO im. Ks. Józefa Poniatowskiego w Warszawie, za organizowanie innowacyjnych i efektywnych form pracy z młodzieżą,  
**mgr Ewa Gajda** – nauczycielka z V LO w Bielsku-Białej, za zorganizowanie motywujących form pracy z młodzieżą,  
**mgr Romuald Kondys** – nauczyciel z II LO im. Andrzeja Frycza Modrzewskiego w Rybniku, za pracę z utalentowaną młodzieżą i wybitne osiągnięcia uczniów na arenie międzynarodowej i krajowej.



## Ogólnopolski konkurs fizyczno-fotograficzny „Zjawiska fizyczne wokół nas”

*Zenona Stojcka*

*Młodzieżowy Dom Kultury w Wieluniu*

W IX Ogólnopolskim konkursie fizyczno-fotograficznym „Zjawiska fizyczne wokół nas” przyznano nagrody w kategorii:

### „Obserwacje”:

1. **Luiza Radecka** z Liceum Ogólnokształcącego Sióstr Prezentek z Krakowa,
2. **Marta Świącicka** z Zespołu Szkół Ogólnokształcących im. Jana Pawła II w Pawłowicach,
3. **Monika Zawistowska** z Liceum Ogólnokształcącego im. Mieszka I z Oddziałami Integracyjnymi w Świnoujściu.

### „Eksperyment”:

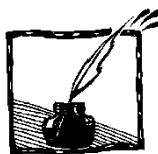
1. **Tomasz Grzeška** z Publicznego Gimnazjum nr 1 w Kozienicach,
2. **Klaudia Licznarska** z II Liceum Ogólnokształcącego im. Stanisława Wyspiańskiego w Kwidzynie oraz **Magdalena Szczepaniak** z Gimnazjum im. Królowej Jadwigi w Lipiu,
3. **Katarzyna Stryczyńska** oraz **Mateusz Wyszyński** z Liceum Ogólnokształcącego im. Mieszka I z Oddziałami Integracyjnymi w Świnoujściu.

Pełne wyniki konkursu wraz z prezentacją zdjęć znajdują się na stronie <http://www.fizyka.byethost12.com>.



„Spadające krople”,  
Klaudia Licznarska





## Praca dla fizyka

Ośrodki z koherencją kwantową  
– nowe właściwości i zastosowania

Wojciech Gawlik  
Instytut Fizyki UJ

Zespół prof. Wojciecha Gawlika w Zakładzie Fotoniki Instytutu Fizyki Uniwersytetu Jagiellońskiego **zatrudni na stanowisku *postdoc*** (asystenta) kandydata do pracy doświadczalnej nad ośrodkami z koherencjami kwantowymi w ultra zimnych atomach.

W ramach projektu finansowanego przez Fundację na Rzecz Nauki Polskiej przewidziane jest przygotowanie i przeprowadzenie eksperymentów z ultrazimnymi atomami rubidu w optycznej pułapce dipolowej. W dalszej kolejności przewidziane są badania zjawisk magnetoptycznych w układach zimnych atomów oraz w kondensatach Bose-Einsteina.

Zatrudnienie jest na okres 1.11.2011–31.08.2013 i obejmuje stypendium w wysokości 5000 zł/mies. oraz honorarium związane z zatrudnieniem w UJ (ok. 2000 zł miesięcznie).

Kandydaci powinni:

1. Posiadać doktorat z fizyki, inżynierii materiałowej lub pokrewnych dyscyplin (uzyskany nie później niż do listopada 2007).
2. Posiadać doświadczenie w pracy eksperymentalnej zwłaszcza w zakresie fizyki atomowej i molekularnej, optyki i fotoniki.
3. Wykazywać motywację i kreatywność w pracy badawczej oraz umiejętność pracy zespołowej.
4. Posiadać dobrą znajomość języka angielskiego.

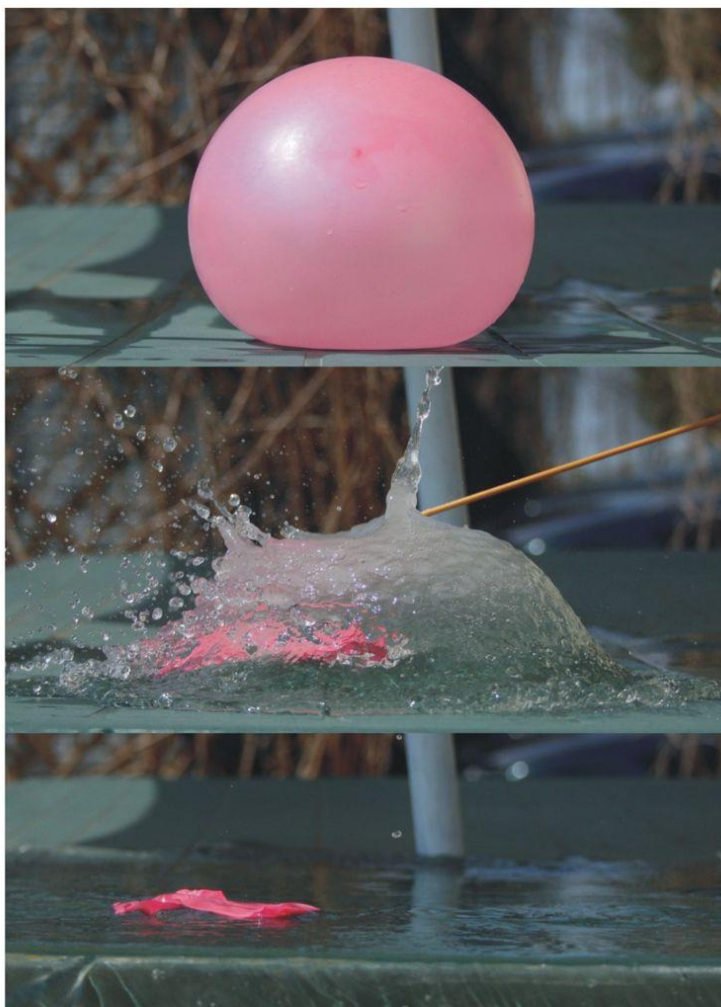
Wymagane dokumenty:

1. Życiorys.
2. Listy rekomendacyjne, w tym jeden od opiekuna pracy doktorskiej.
3. Kopię dyplomu doktorskiego.
4. Opis dotychczasowej pracy badawczej (w tym pracy doktorskiej).
5. Spis publikacji.

Zgłoszenia do 22.10.2011 na adres **[gawlik@uj.edu.pl](mailto:gawlik@uj.edu.pl)** z zaznaczeniem tematu „TEAM application”.

Więcej informacji: <http://www.if.uj.edu.pl/team>

IX Ogólnopolski konkurs fizyczno-fotograficzny  
„Zjawiska fizyczne wokół nas”



Kategoria "Eksperyment", II miejsce  
Klaudia Licznarska „Pękający balon z wodą”  
II Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Wyspiańskiego  
w Kwidzynie