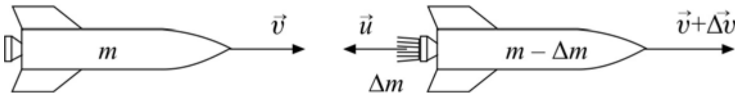
Ruch ciała o zmiennej masie – rakieta

Katarzyna Cieślar, Witold Zawadzki

Jako przykład ruchu ciała o zmiennej masie rozpatrzymy ruch rakiety z silnikiem odrzutowym.

Niech m oznacza masę rakiety w pewnej chwili t, $\vec{v}$ – jej prędkość. Niech szybkość spalania paliwa $\frac{\Delta m}{\Delta t}$ będzie stała i równa q, a szybkość wyrzucanych spalin względem rakiety wynosi u (spaliny są wyrzucane do tyłu).

Chcemy obliczyć tzw. siłę ciągu rakiety i jej prędkość po wypaleniu się paliwa. Przyjmujemy oś X układu współrzędnych zgodnie ze zwrotem prędkości rakiety.



Rozważania prowadzimy w układzie inercjalnym (np. Ziemi). W chwili t pęd rakiety z paliwem $\vec{p}_1 = m\vec{v}$ a jego wartość $p_1 = mv$, w chwili $t + \Delta t$ po wyrzucie Δm gazów pęd jest sumą pędu rakiety

$$(m - \Delta m)(v + \Delta v)$$

oraz pędu wyrzuconych gazów

$$\Delta m \cdot (v + \Delta v - u),$$

czyli $$p_2 = m\,v + m \cdot \Delta v - (\Delta m) \cdot u$$

Zgodnie z zasadą zachowania pędu:

$$p_1 = p_2$$

$$mv = m\,v + m \cdot \Delta v - (\Delta m) \cdot u,$$

czyli $$m\Delta v = (\Delta m) \cdot u \qquad (1)$$

Po podzieleniu obu stron równania przez Δt otrzymujemy

$$m\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{u \cdot \Delta m}{\Delta t} = u \cdot q\ ,$$

Zatem zgodnie z II zasadą dynamiki mamy

$$F = m\frac{\Delta v}{\Delta t} = u \cdot q \qquad (2)$$

Jest to wzór na wartość siły ciągu rakiety gdy szybkość spalania paliwa jest stała I równa q.

—— • ——

Obliczmy teraz końcowa szybkość rakiety. Niech m_0 oznacza masę początkową rakiety, zaś m_k – masę rakiety po spaleniu paliwa ($m_0 - m_k$). Ze wzoru (1) $m\Delta v = (\Delta m)\cdot u$, otrzymujemy $\Delta v = \frac{\Delta m}{m}\cdot u$, skąd możemy przez scałkowanie obliczyć prędkość końcową v_k rakiety. Zamieniamy otrzymane równanie różnicowe na równanie różniczkowe:

$$dv = -\frac{dm}{m}\cdot u\,.$$

Dodanie znaku „minus" wynika z tego, że masa m rakiety maleje podczas spalania paliwa. Otrzymane równaniem jest równaniem o zmiennych rozdzielonych, rozwiązujemy je całkując obie strony. Otrzymujemy

$$v(t) = -u \ln m + c,$$

gdzie stała całkowania c zostanie obliczona z warunku początkowego. Mianowicie w chwili $t = 0$ masa rakiety $m = m_0$ i $v = 0$, a więc stała $c = -u \ln m_0$. Zatem

$$v(t) = -u \ln m + u \ln m_0 = u \ln \frac{m_0}{m}.$$

Dla $m = m_k$

$$v_k = u \ln \frac{m_0}{m_k}.$$

Teraz możemy rozwiązać przykładowe zadania:

Rakieta spala paliwo z szybkością 100 kg/s, a powstałe gazy spalinowe są wyrzucane przez dyszę z szybkością 2000 m/s. Jaką wartość ma siła ciągu rakiety?

Po podstawieniu danych liczbowych do wzoru (2) otrzymujemy wartość siły ciągu:

$$F = 2000\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot 100\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}} = 200\,000\,\frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 200\ \mathrm{kN}.$$

W jednym z podręczników austriackich (Seexl Raab, Streeruwitz, band 1, 1980, s. 65, zad. 90) znajduje się zadanie też dotyczące, jak poprzednie, rakiety V2 , „cudownej broni" Hitlera używanej przy bombardowaniu Londynu.

Rakieta V2 wyrzuca gazy spalinowe z szybkością 2 km/s. Siła nośna rakiety powinna wynosić $2\cdot10^5$ N.

a) Ile paliwa musi być spalane na sekundę?
b) Masa zatankowanej do pełna rakiety to 10 ton. Z jakim przyspieszeniem unosi się rakieta pionowo w górę z miejsca startu?
c) Rakieta ma zatankowane 5 ton paliwa. Jak długo to paliwo jest spalane?

a)

Po wstawieniu danych do wzoru (1) dostajemy q = 100 kg/s

b)

Wstawienie danych do wzoru $a = \frac{F}{m}$ daje a = 20 m/s^2, czyli 2g.

Otrzymany wynik dotyczy tylko siły nośnej rakiety. Ponieważ zadanie dotyczy przyspieszenia rakiety startującej pionowo z powierzchni Ziemi od wartości 2g należy odjąć g.

c)

t = 50 s.

Konkretne dane liczbowe dotyczące rakiety V2 podał w swym podręczniku do mechaniki Arkadiusz Piekara, który w czasie niemieckiej okupacji uczestniczył w badaniu rakiety V2 zrzuconej omyłkowo na terenach okupowanych, a następnie wyekspediowanej przez AK samolotem do Anglii (*Foton* 105, Lato 2009).