



KĄCIK ZADAŃ

Powierzchnie ekwipotencjalne

Witold Zawadzki

Instytut Fizyki UJ

1. Jaki kształt ma powierzchnia cieczy w naczyniu obracającym się ze stałą szybkością wokół pionowej osi?

Rozwiązanie:

Powierzchnia cieczy jest powierzchnią ekwipotencjalną, to znaczy powierzchnią równego (jednakowego) potencjału pola (czyli energii potencjalnej przypadającej na jednostkową masę lub ładunek), ponieważ wtedy nie występuje styczny do powierzchni przepływ cieczy. W naszym przypadku układu nieinercyjnego mamy do czynienia z potencjałem **wypadkowego** pola siły ciężaru (grawitacji) i siły odśrodkowej bezwładności. Energia potencjalna małej masy m cieczy znajdującej się w dowolnym punkcie na powierzchni wynosi

$$E_p = mgh + \left(-\frac{1}{2}m\omega^2 r^2\right),$$

gdzie: g – wartość przyspieszenia grawitacyjnego, ω – szybkość kątowna, z jaką obraca się naczynie ($\omega = 2\pi/T$). Przy wyborze układu współrzędnych jak na rysunku, otrzymujemy:

$$E_p = mgy - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2.$$

Na powierzchni ekwipotencjalnej mamy $E_p = \text{const} = mgC$ (stała), więc

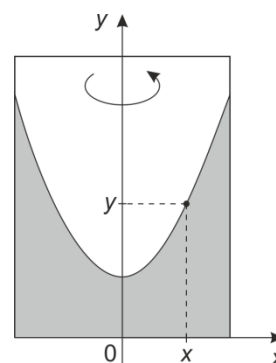
$$mgy - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = C.$$

Z powyższego równania otrzymujemy kolejno:

$$mgy = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + C$$

$$y = \frac{\omega^2}{2g} x^2 + C$$

Otrzymaliśmy równanie paraboli, co oznacza, że powierzchnia cieczy w wirującym ze stałą szybkością naczyniu ma kształt paraboloidy obrotowej.



2. W wyniku obrotu Ziemi dookoła własnej osi, Ziemia ma kształt lekko spłaszczonej kuli (elipsoidy obrotowej), powierzchnia Ziemi jest powierzchnią ekwipotencjalną wypadkowego pola. Obliczyć, o ile równikowy promień Ziemi r_r jest większy od promienia biegunowego r_b . Założyć, że potencjał ziemskiego pola grawitacyjnego jest taki, jak wytworzony przez jednorodną kulę: $V(r) = -GM/r$, gdzie G – stała grawitacji, M – masa Ziemi, r – odległość od jej środka,

Rozwiązanie:

Potencjał wypadkowego pola siły grawitacji i siły odśrodkowej dany jest wzorem

$$V = -\frac{GM}{r} + \left(-\frac{1}{2}\omega^2 x^2\right),$$

gdzie x – odległość danego punktu od osi obrotu Ziemi.

Rozważamy tylko dwa punkty: na biegunie i na równiku. Potencjał na biegunie wynosi $V_b = -\frac{GM}{r_b}$,

a potencjał na równiku $V_r = -\frac{GM}{r_r} - \frac{1}{2}\omega^2 r_r^2$.

Powierzchnia Ziemi jest powierzchnią ekwipotencjalną wypadkowego pola, zatem $V_b = V_r$, skąd otrzymujemy równanie

$$\begin{aligned} -\frac{GM}{r_b} &= -\frac{GM}{r_r} - \frac{1}{2}\omega^2 r_r^2 \\ \frac{1}{2}\omega^2 r_r^2 &= \frac{GM}{r_b} - \frac{GM}{r_r} \\ \frac{1}{2}\omega^2 r_r^2 &= GM \frac{r_r - r_b}{r_b r_r} \end{aligned}$$

Występująca w liczniku ułamka różnica $r_r - r_b$ to nasza szukana x . Mamy zatem

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\omega^2 r_r^2 &= GM \frac{x}{r_b r_r} \\ x &= \frac{\omega^2 R^4}{2GM} \end{aligned}$$

gdzie przyjęto $r_b \approx r_r \approx R$. Podstawiając $R = 6370$ km otrzymujemy $x \approx 11$ km. Rzeczywista różnica promieni: równikowego i biegunowego Ziemi wynosi około 21 km, więc otrzymany wynik jest obarczony błędem na poziomie 50%. Błąd ten jest spowodowany przyjętymi przybliżeniami, głównie założeniem potencjału pola centralnego $1/r$. Wynik ma więc jedynie jakościowy charakter. Zaprezentowane rozwiązanie miało na celu pokazanie idei powierzchni ekwipotencjalnej oraz potencjału siły odśrodkowej.

