Zadanie – ruch plamki wskaźnika laserowego

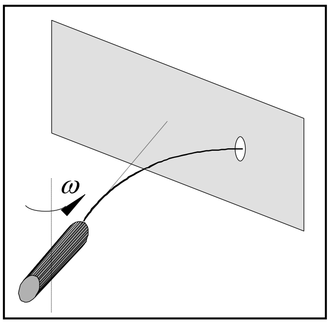
Roman Nowak

Instytut Fizyki Doświadczalnej, Uniwersytet Warszawski

Źródło: А.С. Жукарев, А.Н. Матвеев, В.К. Петерсон, *Задачи повышеиной сложности в курсе общеи физики*, Издтельство Московского Униберситета, 1985.

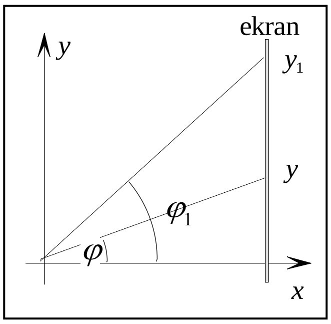
Zadanie – ruch plamki wskaźnika laserowego

Poziomo ustawiony wskaźnik laserowy obraca się wokół pionowej osi z prędkością kątową ω i rzuca plamkę świetlną na pionowy ekran. Uwzględniając fakt skończonej prędkości światła, wyznacz prędkość, z jaką plamka porusza się po ekranie, jeśli odległość między wskaźnikiem a ekranem wynosi h. Opisz jakościowo ruch plamki na ekranie. W rozważaniach zaniedbaj długość wskaźnika laserowego w stosunku do odległości h.



Rozwiązanie

Rozważmy płaszczyznę XY, w której obraca się, wokół osi Z, wskaźnik. Umieśćmy wskaźnik w początku układu odniesienia. Niech oś X będzie prostopadła do ekranu umieszczonego w punkcie $x = h$, a nieskończenie długi bok ekranu będzie równoległy do osi Y, jak na rysunku.



Niech w pewnej chwili wskaźnik będzie ustawiony pod kątem φ do osi X. Foton wysłany pod tym kątem dotrze do punktu o współrzędnej

$$y = h\,\mathrm{tg}\,\varphi$$

po przebyciu drogi $L = \dfrac{h}{\cos\varphi}$,

co zajmie mu czas $t = \dfrac{h}{c\cos\varphi}$.

Po upływie czasu $t_0 = \dfrac{\varphi_1 - \varphi}{\omega} = \dfrac{\Delta\varphi}{\omega}$

wskaźnik znajdzie się pod kątem φ_1. Teraz foton wysłany ze wskaźnika znajdzie się w punkcie o współrzędnej

$$y_1 = h\,\mathrm{tg}\,\varphi_1$$

po przebyciu drogi $L_1 = \dfrac{h}{\cos\varphi_1}$

i będzie na to potrzebował czasu $t_1 = \dfrac{h}{c\cos\varphi_1}$.

Tak więc plamka przebędzie drogę

$$\Delta y = y_1 - y = h\left(\operatorname{tg}\varphi_1 - \operatorname{tg}\varphi\right) = h\frac{\sin\varphi_1\cos\varphi - \cos\varphi_1\sin\varphi}{\cos\varphi\cos\varphi_1} =$$
$$= h\frac{\sin\left(\varphi_1 - \varphi\right)}{\cos\varphi\cos\varphi_1} = h\frac{\sin\Delta\varphi}{\cos\varphi\cos\varphi_1}$$

w czasie

$$\Delta t = t_1 + t_0 - t = \frac{h}{c\cos\varphi_1} + \frac{\Delta\varphi}{\omega} - \frac{h}{c\cos\varphi} =$$
$$= \frac{h}{c}\left(\frac{1}{\cos\varphi_1} + \frac{c}{\omega h}\Delta\varphi - \frac{1}{\cos\varphi}\right) =$$
$$= \frac{h}{c}\frac{\cos\varphi - \cos\varphi_1 + \dfrac{c}{\omega h}\Delta\varphi\cos\varphi\cos\varphi_1}{\cos\varphi\cos\varphi_1} =$$
$$= \frac{h}{c}\frac{2\sin\left(\dfrac{\varphi_1 - \varphi}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\varphi_1 + \varphi}{2}\right) + \dfrac{c}{\omega h}\Delta\varphi\cos\varphi\cos\varphi_1}{\cos\varphi\cos\varphi_1} =$$
$$= \frac{h}{c}\frac{2\sin\left(\dfrac{\Delta\varphi}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\varphi_1 + \varphi}{2}\right) + \dfrac{c}{\omega h}\Delta\varphi\cos\varphi\cos\varphi_1}{\cos\varphi\cos\varphi_1}$$

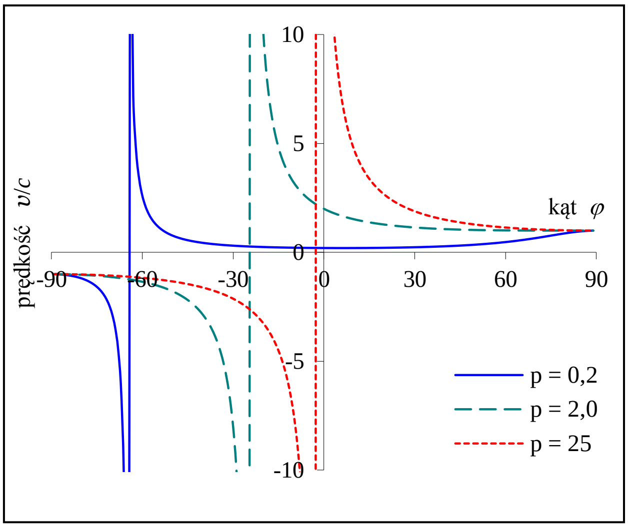
Teraz wyznaczymy prędkość plamki:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = c\frac{\dfrac{\omega h}{c}\sin\Delta\varphi}{2\dfrac{\omega h}{c}\sin\left(\dfrac{\Delta\varphi}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\varphi + \varphi_1}{2}\right) + \Delta\varphi\cos\varphi\cos\varphi_1} \xrightarrow[\Delta\varphi \to 0]{}$$
$$\xrightarrow[\Delta\varphi \to 0]{} \quad \upsilon = c\frac{p}{p\sin\varphi + \cos^2\varphi}, \quad p = \frac{\omega h}{c}$$

Wyprowadzenie jest słuszne w całym zakresie wartości kąta $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$. Mianownik znika w punkcie

$$\sin^2\varphi - p\sin\varphi - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta = p^2 + 4 \quad \Rightarrow$$
$$\sin\varphi_0 = \frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + 1} = \frac{\omega h}{2c} - \sqrt{\left(\frac{\omega h}{2c}\right)^2 + 1} < 0$$

a więc dla kąta $\varphi_0 < 0$. Przy obrocie wskaźnika od $\varphi = -\pi/2$ do $\varphi = \pi/2$, prędkość plamki zawsze zaczyna się od ujemnej wartości prędkości światła i maleje do $\upsilon = -\infty$ w punkcie $\varphi = \varphi_0$, następnie przeskakuje do $+\infty$, a dalej maleje do prędkości światła przy $\varphi = \pi/2$, Przebieg krzywej w obszarze dodatnich wartości prędkości zależy jednak od parametru p. Gdy $p < 2$, prędkość plamki maleje od prędkości nieskończonej dla $\varphi = \varphi_0$ do wartości minimalnej $\upsilon_{min} = 4p/(4 + p^2)$ gdy $\sin\varphi = p/2$, aby następnie wzrastać ponownie do prędkości światłą, gdy kąt φ dąży do $\pi/2$. Gdy $p > 2$, to prędkość maleje monotonicznie od wartości nieskończonej do prędkości światła.



Intrygująca jest ujemna wartość prędkości plamki. Rozważmy to bliżej. Ustalmy pomiar czasu tak, że w chwili $t = 0$, wskaźnik świeci pod kątem $\varphi = -\pi/2$ i będzie świecił do momentu $t = \pi/\omega$, co odpowiada ustawieniu wskaźnika pod kątem $\varphi = \pi/2$. Jeśli wskaźnik świeci pod kątem φ, co dzieje się w chwili $t_0 = (\pi/2 + \varphi)/\omega$ od momentu, kiedy zaczął się obracać, to foton wysłany w tym momencie będzie podróżował do ekranu przez czas

$$t = \frac{h}{c\cos\varphi}$$

i znajdzie się w punkcie

$$y = h\,\mathrm{tg}\,\varphi$$

po czasie

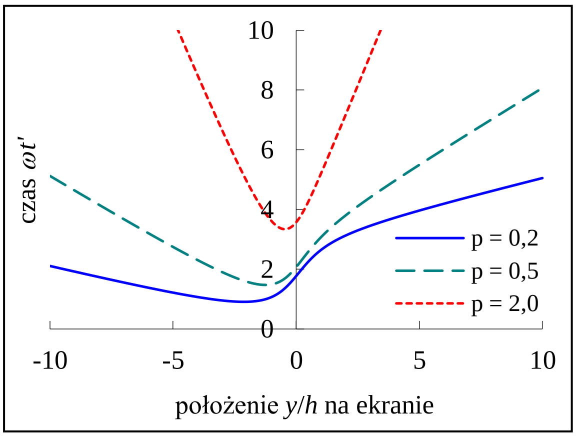
$$t' = t_0 + t = \frac{\pi}{2\omega} + \frac{\varphi}{\omega} + \frac{h}{c\cos\varphi}$$

lub też:

$$\omega t' = \frac{\pi}{2} + \varphi + \frac{p}{\cos\varphi}.$$

od chwili startu obrotu wskaźnika. Równanie to, wraz z równaniem na położenie y plamki, to parametryczne równania, które możemy połączyć, eliminując z wyrażenia na t' kąt $\varphi = \mathrm{arctg}(y/h)$:

$$\omega t' = \frac{\pi}{2} + \mathrm{arctg}\frac{y}{h} + \frac{p}{\cos\left(\mathrm{arctg}\frac{y}{h}\right)} = \frac{\pi}{2} + \mathrm{arctg}\frac{y}{h} + p\sqrt{1+\frac{y^2}{h^2}}.$$



Z wykresu zależności $\omega t'$ od y znajdujemy, że przez pewien czas od momentu uruchomienia obrotu wskaźnika, na ekranie nie będziemy nic widzieli, aż w pewnym momencie w pewnym punkcie ekranu pojawi się plamka świetlna. Następnie plamka ta rozdwoi się i obie plamki zaczną oddalać się w przeciwne strony do nieskończoności. Punkt y_0, w którym pojawi się plamka, zdefiniowany jest wyrażeniem:

$$\omega\frac{dt'}{dy} = \frac{1}{h\left(1+\frac{y^2}{h^2}\right)} - \frac{p\sin\left(\mathrm{arctg}\frac{y}{h}\right)}{h\left(1+\frac{y^2}{h^2}\right)\cos^2\left(\mathrm{arctg}\frac{y}{h}\right)} = 0,$$

i określony współrzędną $y_0 = h\,\mathrm{tg}\varphi_0$, a nastąpi to w chwili:

$$t_0' = \frac{1}{\omega}\left(\frac{\pi}{2} + \varphi_0 + \frac{p}{\cos\varphi_0}\right).$$

Redakcja poleca filmik SciFun na YouTube:
http://www.youtube.com/watch?v=Nu7n1WFS6T4&feature=plcp