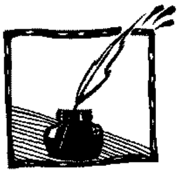


O analogii prawa Snelliusa w ruchu punktu materialnego z tarciem

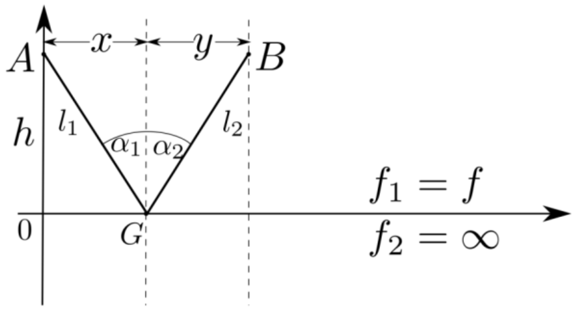
Jacek Ciborowski[1], *Marta Włodarczyk*[2]
[1]*Uniwersytet Warszawski, Instytut Fizyki Doświadczalnej*
[2]*Uniwersytet Łódzki, Katedra Fizyki Teoretycznej i VIII LO im. Adama Asnyka w Łodzi*

Rachunek wariacyjny to metoda znajdowania funkcji lub wartości parametrów, które minimalizują lub maksymalizują wartości pewnych wielkości fizycznych. Zagadnienia, w rozwiązaniu których pomocny jest rachunek wariacyjny, spotykamy we wszystkich działach fizyki. Dla przykładu, w mechanice klasycznej, do odpowiedzi na pytanie o kształt łańcucha zaczepionego na obu końcach w polu grawitacyjnym prowadzi zasada, u podstaw której leży wymóg minimum grawitacyjnej energii potencjalnej takiego łańcucha w stanie równowagi. W optyce geometrycznej najbardziej znaną zasadą wariacyjną jest zasada Fermata, która orzeka, że promień świetlny porusza się między dwoma punktami po takiej trajektorii spośród wszystkich możliwych, aby czas tego ruchu był najkrótszy. Zasada Fermata prowadzi do znanych ze szkoły praw odbicia i załamania dla promienia świetlnego; to drugie zwane jest prawem Snelliusa.

Analogia do prawa odbicia

Rozważmy na początek dwa punkty, A i B, leżące na półpłaszczyźnie o współczynniku tarcia f, graniczącej z półpłaszczyzną o nieskończonym współczynniku tarcia. Punkt materialny porusza się w kierunku granicy półpłaszczyzn (ośrodków). Dla jakiego toru praca sił tarcia na drodze od A do B będzie najmniejsza? Przyjmujemy, że wartość siły tarcia jest iloczynem wartości ciężaru ciała (w polu grawitacyjnym) i współczynnika tarcia.

Umieśćmy punkty A i B w kartezjańskim układzie współrzędnych, jak na rysunku 1.



Rys. 1. Trajektoria punktu materialnego, poruszającego się od A do B po drodze, na której siły tarcia wykonują najmniejszą możliwą pracę

Oś X jest granicą półpłaszczyzn (ośrodków) o różnych współczynnikach tarcia, $A=(0,h)$ oraz $B=(x+y,h)$. Tor ruchu składa się z dwóch odcinków, *AG* i *GB*, gdzie $G=(0,x)$ jest punktem toru leżącym na osi X.

Oznaczmy: $AG = l_1$ i $GB = l_2$. Niech $w(x)$ będzie pracą sił tarcia po drodze *AGB*, na jednostkę ciężaru:

$$w(x)=f_1\left(\sqrt{x^2+h^2}+\sqrt{y^2+h^2}\right)$$

Szukamy minimum funkcji $w(x)$. Z równania $\frac{dw(x)}{dx}=0$, mamy:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}}=\frac{y}{\sqrt{y^2+h^2}}$$

lub równoważnie:

$$\frac{x}{l_1}=\frac{y}{l_2}$$

z czego wynika, że

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}=1 \Rightarrow \alpha_1=\alpha_2$$

(co jest równoważne z warunkiem $x = y$). Uzyskaliśmy zatem prawo równoważne prawu odbicia dla światła – kąt padania i kąt odbicia są równe. Warto zaznaczyć w tym miejscu, że prawo odbicia będzie prawdziwe również wtedy, gdy ciało będzie poruszało się bez tarcia.

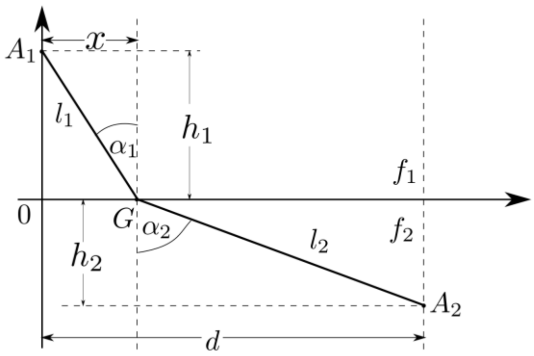
Analogia do prawa Snelliusa

Rozważmy teraz przypadek kolejny – dwa punkty, A_1 i A_2, leżące na półpłaszczyznach o różnych współczynnikach tarcia kinetycznego (odpowiednio f_1 i f_2). Po jakim torze powinien poruszać się punkt materialny od A_1 do A_2, aby praca sił tarcia była najmniejsza?

Ponownie przyjmujemy, że wartość siły tarcia jest iloczynem wartości ciężaru ciała i współczynnika tarcia. Umieśćmy punkty A_1 i A_2 jak na rys. 2.

Oś X jest granicą półpłaszczyzn (ośrodków) o różnych współczynnikach tarcia, $A_1=(0,h_1)$ oraz $A_2=(d,-h_2)$. Tor ruchu składa się z dwóch odcinków, A_1G i GA_2, gdzie $G = (x,0)$ jest punktem toru leżącym na osi X. Oznaczmy: $A_1G = l_1$ i $GA_2 = l_2$. Niech $w(x)$ będzie pracą sił tarcia po drodze A_1GA_2, na jednostkę ciężaru:

$$w(x)=f_1\sqrt{x^2+h_1^2}+f_2\sqrt{(d-x)^2+h_2^2}$$



Rys. 2. Trajektoria ruchu ciała przechodzącego przez granicę ośrodków o różnych współczynnikach tarcia taka, że praca sił tarcia osiąga minimum

Szukamy minimum funkcji $w(x)$. Z równania $\frac{dw(x)}{dx}=0$, mamy:

$$\frac{f_1 x}{\sqrt{x^2+h_1^2}}=\frac{f_2(d-x)}{\sqrt{(d-x)^2+h_1^2}}$$

lub równoważnie:

$$f_1\frac{x}{l_1}=f_2\frac{d-x}{l_2}$$

Druga pochodna funkcji $w(x)$ jest zawsze dodatnia:

$$\frac{d^2w(x)}{dx^2}=\frac{f_1h_1^2}{\left(x^2+h_1^2\right)^{3/2}}+\frac{f_2h_2^2}{\left((d-x)^2+h_2^2\right)^{3/2}}>0$$

a więc funkcja $w(x)$ osiąga minimum dla tej wartości x, którą można wyznaczyć z równania $f_1\frac{x}{l_1}=f_2\frac{d-x}{l_2}$. Oznaczając przez α_1 i α_2 kąty, jakie odcinki A_1G i GA_2 tworzą z osią Y (normalną), powyższy wzór możemy przepisać następująco:

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}=\frac{f_2}{f_1}$$

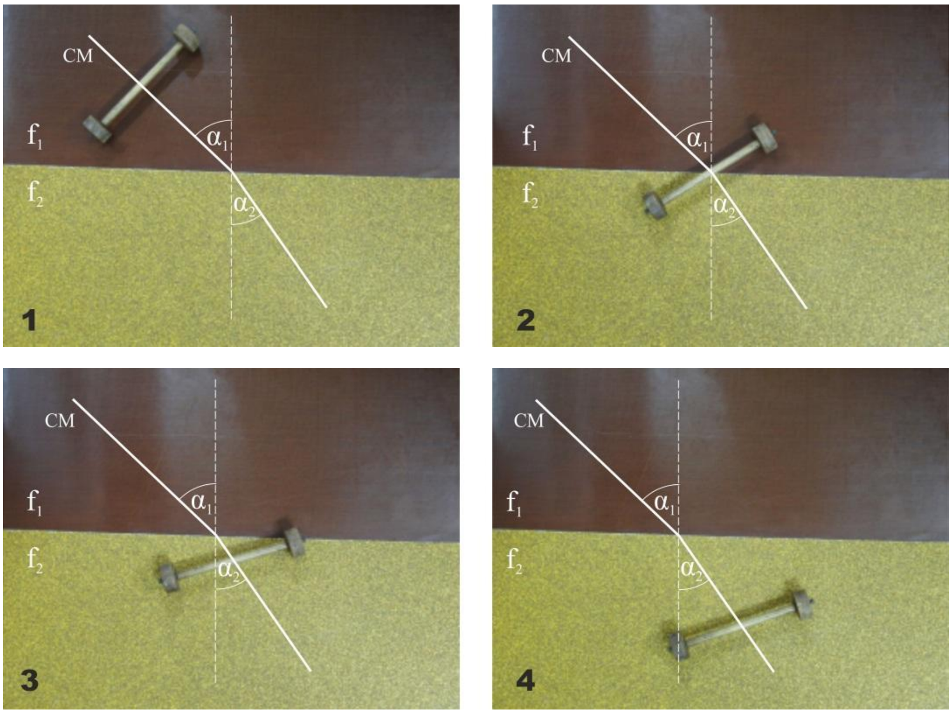
Otrzymujemy zatem wyrażenie podobne do tego, jakie opisuje przechodzenie promienia świetlnego przez granicę ośrodków o różnych współczynnikach załamania: $\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}=\frac{n_2}{n_1}$, gdzie n_i oznacza współczynnik załamania światła i-tego ośrodka.

Pamiętajmy jednak, że prawo odbicia i załamania światła otrzymuje się z innych założeń fizycznych, lecz również znajdując minimum: wielkością minimalizowaną w tym wypadku jest czas przejścia promienia świetlnego (czoła fali elektromagnetycznej) pomiędzy dwoma punktami. Widzimy więc daleko posuniętą analogię z optyką. Zawiera się nie tylko w tej samej postaci prawa wiążącego kąt padania i załamania, lecz również w tym, że współczynnik tarcia pełni tę samą rolę w omawianym zagadnieniu, co w optyce współczynnik załamania.

Doświadczenie ze zbiorów IF UJ

Marek Gołąb
Instytut Fizyki Uj

Klocek na kółkach zjeżdża po równi pochyłej, która składa się z dwóch powierzchni o różnych współczynnikach tarcia. Widać wyraźnie, że trajektoria środka CM masy klocków załamuje się ku normalnej.



Kolejne fazy ruchu (fot. Marek Gołąb)