Fizyka Formuły 1 w zadaniach

Przemysław Borys
Zakład Fizyki Chemicznej i Biofizyki
Politechnika Śląska

1. Obliczyć współczynnik docisku aerodynamicznego bolidu we wzorze $F_D = qv^2$ jeżeli wiadomo, że bolid Indy rozpędzony do v = 220 *mph* generuje docisk 5000 *lb* (funtów) [1] (jednostki jak w cytowanym źródle). Przy jakiej prędkości bolid Formuły 1 (masa m = 605 kg) mógłby jeździć po suficie?

Odpowiedź

$q = \frac{F_d}{v^2} = 2{,}3$ Ns^2/m^2. Bolid może jechać do góry nogami, jeśli siła docisku aerodynamicznego jest większa od ciężaru, a więc $v = \sqrt{\frac{mg}{q}}$ = 183 km/h.

2. Obliczyć współczynnik oporów powietrznych bolidu we wzorze $F_R = rv^2$, jeżeli wzór ogólny to $F_R = C_D A \rho v^2$ gdzie $C_D = 1$ – współczynnik oporów aerodynamicznych bolidu (dla normalnych samochodów jest to w przybliżeniu $C_D = 0{,}25 \div 0{,}5$!), $A = 1{,}2$ m^2 – powierzchnia frontalna bolidu, $\rho = 1{,}293$ kg/m^3 – gęstość powietrza. Jaka jest przy tych oporach prędkość maksymalna bolidu o mocy P = 750 KM?

Odpowiedź

$r = 0{,}77$ Ns^2/m^2, $v_{max} = \sqrt[3]{\frac{P}{r}}$ = 323 km/h.

3. Obliczyć, przy jakiej prędkości silnik może wykorzystać pełną moc bez poślizgu. Przyjąć współczynnik docisku we wzorze $F_D = qv^2$ jako $q = 2{,}3$. Moc silnika P = 750 KM, masa bolidu m = 605 kg. Czy konieczne jest uwzględnianie oporów powietrza?

Odpowiedź

Warunek równowagi sił zapisujemy jako

$$\frac{P}{v} = f(mg + qv^2)$$

Równanie trudno rozwiązać rachunkowo, więc wykreślamy graficznie lewą i prawą stronę równości poszukując punktu przecięcia. Jest nim v = 131,5 km/h.

Oporów powietrza nie uwzględniamy, bo zwiększone opory przy stałej sile generowanej z silnika zmniejszają jedynie przyspieszenie, a nie wpływają na siłę, jaką koła działają na asfalt (ta zależy tylko od silnika).

4. Wyznaczyć zależność $v(t)$ bolidu dla prędkości v < 131,5 km/h, gdy silnik nie może rozwinąć maksymalnej mocy, a siła napędowa równa jest dostępnemu w danym momencie tarciu. Siła docisku to $F_D = qv^2$, $q = 2{,}3$, siła oporów aerodynamicznych $F_R = rv^2$, $r = 0{,}77$, współczynnik tarcia $f = 1{,}7$, masa bolidu $m = 605$ kg.

Odpowiedź
Równanie ruchu bolidu w tym przypadku to:

$$m\frac{dv}{dt} = fmg + fqv^2 - rv^2$$

Porządkując wyrażenie, uzyskujemy:

$$\frac{dv}{1+\frac{fq-r}{fmg}v^2} = f\,g\,dt$$

Lewą stronę łatwo całkujemy do funkcji *arctg*, a prawą do fgt, uzyskując ostatecznie:

$$t = t_0 + \frac{m}{fq-r}\cdot\sqrt{\frac{fq-r}{fmg}}\operatorname{arctg}\left[v\sqrt{\frac{fq-r}{fmg}}\right]$$

gdzie stała całkowania $t_0 = 0$, bo prędkość $v = 0$ chcemy mieć w chwili $t = 0$.

5. Wyznaczyć zależność $v(t)$ bolidu dla prędkości v > 131,5 km/h. Przyjąć dane z zadania poprzedniego i dodatkowo moc bolidu $P = 750$ KM. Do stałej całkowania wykorzystać krzywą uzyskaną w zadaniu poprzednim.

Odpowiedź
Równanie ruchu bolidu w tym przypadku to:

$$m\frac{dv}{dt} = \frac{P}{v} - rv^2$$

Doprowadzając prawą stronę do wspólnego mianownika i rozdzielając zmienne, uzyskujemy

$$\frac{vdv}{P/r - v^3} = \frac{r}{m}dt$$

oznaczając $\sqrt[3]{P/r} = w,$ mamy

$$\frac{vdv}{v^3 - w^3} = -\frac{r}{m}dt$$

Mianownik ma miejsce zerowe dla $v = w$, więc dzieląc go przez $(v - w)$, uzyskujemy $v^2 + vw + w^2$, zatem mamy:

$$\frac{vdv}{(v-w)(v^2+vw+w^2)} = -\frac{r}{m}dt$$

Lewą stronę rozbijamy na ułamki proste, uzyskując:

$$\frac{1}{3w}\left[\frac{1}{v-w} - \frac{v-w}{v^2-vw+w^2}\right]dv = -\frac{r}{m}dt$$

Rozbijamy ułamek z trójmianem:

$$\frac{1}{3w}\left[\frac{1}{v-w} - \frac{1}{2}\frac{2v-w}{v^2-vw+w^2} + \frac{1}{2}\frac{w}{v^2-vw+w^2}\right]dv = -\frac{r}{m}dt$$

Dwa pierwsze ułamki po scałkowaniu dają logarytm. Ułamek drugi przepisujemy wprowadzając w mianowniku wzór skróconego mnożenia $(v + w/2)^2 = v^2 + vw + w^2/4$ i wyciągając $3/4w^2$ przed nawias:

$$\frac{1}{3w}\left[\frac{1}{v-w} - \frac{1}{2}\frac{2v-w}{v^2-vw+w^2} + \frac{2}{3w}\frac{1}{\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(v-\frac{w}{2}\right)\right]^2+1}\right]dv = -\frac{r}{m}dt$$

Stosując całkowanie przez podstawianie $u = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(v - \frac{w}{2}\right)$, drugi ułamek możemy scałkować do funkcji *arctg*. Tym samym, uzyskujemy rozwiązanie o strukturze danej w tablicach matematycznych ([2], całka (85)):

$$t = t_0 + \frac{m}{6wr}\log\left[\frac{w^2+wv+v^2}{(w-v)^2}\right] - \frac{m}{wr\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left[\frac{2v+w}{w\sqrt{3}}\right]$$

$$w = \sqrt[3]{\frac{P}{r}}$$

gdzie stałą całkowania $t_0 = 3{,}85$ s dobieramy tak, aby połączyć krzywą z zadania poprzedniego i krzywą aktualnie uzyskaną dla prędkości $v = 131{,}5$ km/h.

Literatura

[1] IndyCar, http://www.indycar.com
[2] I.N. Bronsztejn, K.A. Siemiendiajew, Matematyka – poradnik encyklopedyczny, PWN, 1972.

Od Redakcji:

Załączamy zadanie z Olimpiady Fizycznej w Singapurze z 31 października 1990 roku i przekazane Redakcji przez śp. Waldemara Gorzkowskiego. Podajemy je w oryginalnym brzmieniu, aczkolwiek na lekcji można ciężar zastąpić grubym wujkiem, a wagę sprężynową sprężynami siedzenia fotela. Na Olimpiadzie uczniowie na rozwiązanie zadania mieli 40 min.

A oto zadanie: Podstawa wagi sprężynowej przymocowana jest sztywno do podłogi samochodu. Sprężyna wagi ma stałą sprężystość $k = 10\,000$ N/m. Masa $m = 100$ kg jest sztywno przymocowana do szalki wagi (patrz rysunek). Masa szalki jest znacznie mniejsza od masy m, można ją zaniedbać. W sytuacji, kiedy samochód parkuje na poziomej drodze, waga wskazuje m, to jest 980 N. Samochód jedzie teraz po lekko sfalowanej drodze ze stałą prędkością poziomą v.

Profil drogi jest przedstawiony na rysunku 2, $\lambda = 100$ m zaś A = 1 m. Zwróć uwagę, że lambda jest też znacznie większa niż długość samochodu. Kształt drogi można przedstawić sinusoidą. Naszkicuj wykres przedstawiający wskazania wagi w funkcji czasu, jeśli v stałe i równe 15 m/s. Oznacz skalę na osiach. Uzasadnij wynik, załącz odpowiednie rachunki. Jak zmieni się wykres, gdy zmieni się v? Pamiętaj, że maksymalna szybkość samochodu wynosi 200 km/h.