Ruchy Księżyca

Jerzy Ginter
Uniwersytet Warszawski

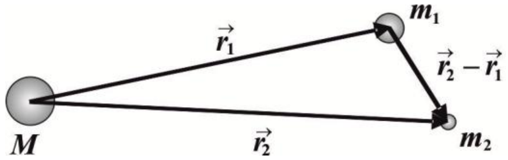
Postawienie zagadnienia

Kiedy uczy się o ruchach ciał niebieskich na poziomie I klasy liceum, omawia się najczęściej najpierw ruch Ziemi i innych planet wokół Słońca w układzie heliocentrycznym. Potem przechodzi się do omawiania ruchów Księżyca i sztucznych satelitów Ziemi w układzie geocentrycznym. Zwykle nie zadaje się jednak pytania, dlaczego taka procedura w ogóle jest możliwa? Dlaczego można opisywać ruch Księżyca wokół Ziemi niezależnie od ruchu Ziemi wokół Słońca? Musi to być opis przybliżony, ale na czym to przybliżenie polega? W gruncie rzeczy powinniśmy też spytać, dlaczego możemy opisywać ruch planet w układzie heliocentrycznym, zapominając o ruchu Słońca wokół centrum Galaktyki?

Model

Rozważmy uproszczony model naszego problemu (rys. 1).

1. Centralne pole wytwarza bardzo duża, nieruchoma masa *M*. Początek układu odniesienia pokrywa się ze środkiem tej masy.
2. W jej polu znajdują się dwa oddziałujące ze sobą grawitacyjnie ciała o masach m_1 i m_2. Ich wektory wodzące oznaczmy $\vec{r}_1$ i $\vec{r}_2$.



Rys. 1. Ilustracja modelu

Oddziaływanie grawitacyjne naszych ciał z masą centralną opisywać będą wektory $\vec{r}_1$ i $\vec{r}_2$. Natomiast ich wzajemne oddziaływanie – wektor $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$.

Współrzędne uogólnione

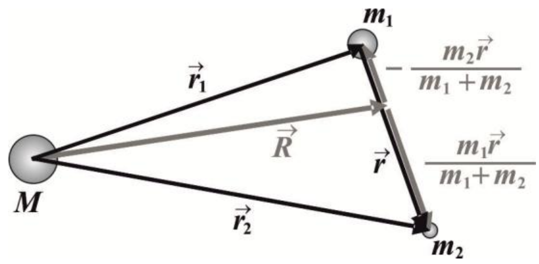
Aby można było w ogóle sformułować główna tezę tego artykułu, trzeba wprowadzić dwie pomocnicze wielkości (rys. 2):

1. wektor położenia środka masy

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}; \tag{1}$$

2. wektor względnego położenia ciał:

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 . \tag{2}$$



Rys. 2. Wektory $\vec{R}$ i $\vec{r}$

Współrzędne „prawdziwe” $\vec{r}_1$ i $\vec{r}_2$ wyrażają się przez te współrzędne „sztuczne” wzorami:

$$\vec{r}_1 = \vec{R} - \frac{m_2\vec{r}}{m_1 + m_2} ; \tag{3}$$

$$\vec{r}_2 = \vec{R} + \frac{m_1\vec{r}}{m_1 + m_2} . \tag{4}$$

Interpretacja nowych współrzędnych jest łatwiejsza, jeżeli jedna z poruszających się mas jest znacznie większa od drugiej. Jeżeli na przykład $m_1 \gg m_2$, wtedy $\vec{r}_1$ jest bliskie współrzędnej środka masy $\vec{R}$, a $\vec{r}$ określa położenie ciała 2 względem ciała 1.

Teza

Główna teza naszych rozważań jest następująca:

Jeżeli $r \ll R$ wtedy ruch każdej z poruszających się mas można przedstawić jako złożenie dwóch **niezależnych** ruchów;

– pierwszego zależnego tylko od $\vec{R}$,
– drugiego zależnego tylko od $\vec{r}$.

Pewną – choć dość daleką – analogię może stanowić rzut ukośny w jednorodnym polu grawitacyjnym. W takim ruchu współrzędna pozioma i współrzędna pionowa zmieniają się niezależnie od siebie.

Równania ruchu

Napiszmy równania ruchu naszych dwóch ciał $(m\vec{a} = \vec{F})$. Musimy uwzględnić i oddziaływanie wzajemne, i oddziaływanie z masą centralną:

$$m_1 \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = +\frac{Gm_1 m_2(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} - \frac{Gm_1 M \vec{r}_1}{r_1^3}; \tag{5}$$

$$m_1 \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = -\frac{Gm_1 m_2(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} - \frac{Gm_2 M \vec{r}_2}{r_2^3}. \tag{6}$$

Podstawmy wzory (3) i (4) do równań (5) i (6), przy czym ostatnie człony (5) i (6) po prawej stronie pozostawimy na razie niezmienione. Dostaniemy:

$$m_1 \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} - \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = +\frac{Gm_1 m_2 \vec{r}}{r^3} - \frac{Gm_1 M \vec{r}_1}{r_1^3}; \tag{7}$$

$$m_2 \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{Gm_1 m_2 \vec{r}}{r^3} - \frac{Gm_2 M \vec{r}_1}{r_1^3}. \tag{8}$$

Ruch środka masy

Dodajmy teraz równania (7) i (8). Otrzymamy:

$$(m_1 + m_2)\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = -GM\left(\frac{m_1\vec{r}_1}{r_1^3} + \frac{m_2\vec{r}_2}{r_2^3}\right). \tag{9}$$

Założymy teraz, że $r \ll R$ i zastąpimy w mianownikach prawej strony wyrażenia (9) wielkości r_1 i r_2 przez R. Dostaniemy wtedy

$$\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = -\frac{GM}{R^3}\frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}, \tag{10}$$

czyli, korzystając z wyrażenia (1) na $\vec{R}$:

$$\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = -GM\frac{\vec{R}}{R^3}. \tag{11}$$

Założenie $r \ll R$ doprowadza do tego, że na ruch środka masy dostajemy zwykłe równanie dla ruchu pojedynczego ciała w polu dużej nieruchomej masy M. Zauważmy, że to równanie nie zależy od mas m_1 i m_2. Podobnie od masy nie zależy równanie pojedynczego ciała, poruszającego się w centralnym polu grawitacyjnym.

Ruch względny

Przekształćmy teraz równania (7) i (8) do postaci:

$$\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = +\frac{Gm_2\vec{r}}{r^3} - \frac{GM\vec{r}_1}{r_1^3}; \tag{12}$$

$$\frac{d^2\vec{R}}{dt^2}+\frac{m_1}{m_1+m_2}\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=-\frac{Gm_1\vec{r}}{r^3}-\frac{GM\vec{r}_1}{r_1^3}; \tag{13}$$

i odejmijmy pierwsze od drugiego. Dostaniemy:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=-\frac{G(m_1+m_2)\vec{r}}{r^3}+GM\left(\frac{\vec{r}_1}{r_1^3}-\frac{\vec{r}_2}{r_2^3}\right). \tag{14}$$

Jeżeli $r \ll R,$ w zerowym przybliżeniu można uznać, że drugi człon po prawej stronie jest równy zeru. Wtedy dla ruchu względnego uzyskujemy równanie

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=-\frac{G(m_1+m_2)\vec{r}}{r^3}. \tag{15}$$

Jest to zwykłe równanie ruchu pojedynczego ciała w polu grawitacyjnym, wytwarzanym przez masę równą $m_1 + m_2$.

Wnioski

Podsumujmy: Przy założeniu $r \ll R$ z dwóch równań ruchu (7) i (8) wynikają dwa niezależne od siebie równania ruchu: oddzielne dla ruchu środka masy (11) i oddzielne dla ruchu względnego (15). Oba te równania mają postać równań pojedynczego ciała, poruszającego się w centralnym polu grawitacyjnym.

Znamy rozwiązania takich równań. W szczególności mogą one odpowiadać ruchowi po okręgu albo ruchowi po elipsie. Jeżeli znamy zależności $\vec{R}(t)$ i $\vec{r}(t)$, zależności $\vec{r}_1(t)$ i $\vec{r}_2(t)$ znajdziemy za pomocą wzorów (3) i (4).

Ruch Księżyca w zerowym przybliżeniu

Nasze rozważania ogólne możemy zastosować do Ziemi i Księżyca.

1. Założenie $r \ll R$ jest w tym przypadku dobrze spełnione. Orbita Ziemi w jej ruchu wokół Słońca ma promień równy $R \approx 150\,000\,000$ km. Odległość od Księżyca do Ziemi jest równa $r \approx 385\,000$ km. Zatem stosunek $r/R \approx 0{,}0026$.
2. Masa Ziemi m_1 jest około 82 razy większa od masy Księżyca m_2. Zatem z niezłą dokładnością można przyjąć, że ruch Ziemi wokół Słońca jest zgodny z ruchem środka masy.

Nasze dotychczasowe rozważania pokazują, że prymitywny „szkolny” opis ruchu Księżyca jest dobrze uzasadniony.

Większa dokładność

Spójrzmy jeszcze na nasz problem troszkę dokładniej – z dokładnością do pierwszego rzędu w potędze r. Będziemy mogli w ten sposób oszacować, jakiego rzędu poprawki mogłyby wnieść do naszych rozważań opuszczone człony w równaniach ruchu.

Zacznijmy od członu $\frac{\vec{r}_1}{r_1^3}$. Obliczmy najpierw r_1^2 (wzór 3):

$$r_1^2 = \left(\vec{R} - \frac{m_2 \vec{r}}{m_1 + m_2}\right)^2 \approx R^2 - \frac{2m_2 \vec{R}\vec{r}}{m_1 + m_2} = R^2\left(1 - \frac{2m_2}{m_1 + m_2}\frac{\vec{R}\vec{r}}{R^2}\right). \tag{16}$$

Teraz obliczmy $\frac{1}{r_1^3}$ i przybliżmy go, rozwijając nawias na szereg z dokładnością do pierwszego wyrazu:

$$\frac{1}{r_1^3} = \frac{1}{R^3}\left(1 - \frac{2m_2}{m_1 + m_2}\frac{\vec{R}\vec{r}}{R^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \approx \frac{1}{R^3}\left(1 + \frac{3}{2}\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\frac{\vec{R}\vec{r}}{R^2}\right) = \frac{1}{R^3} + \frac{3m_2}{m_1 + m_2}\frac{\vec{R}\vec{r}}{R^5}. \tag{17}$$

I dalej:

$$\begin{aligned} \frac{\vec{r}_1}{r_1^3} &= \left(\vec{R} - \frac{m_2 \vec{r}}{m_1 + m_2}\right)\left(\frac{1}{R^3} + \frac{3m_2}{m_1 + m_2}\frac{\vec{R}\vec{r}}{R^5}\right) \approx \\ &\approx \frac{\vec{R}}{R^3} - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\frac{\vec{r}}{R^3} + \frac{3m_2}{m_1 + m_2}\frac{\vec{R}(\vec{R}\vec{r})}{R^5}. \end{aligned} \tag{18}$$

Czyli

$$\frac{\vec{r}_1}{r_1^3} \approx \frac{\vec{R}}{R^3} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\frac{1}{R^3}\left[3\frac{\vec{R}}{R}\left(\frac{\vec{R}}{R}\vec{r}\right) - \vec{r}\right]. \tag{19}$$

Podobnie wykażemy, że

$$\frac{\vec{r}_2}{r_2^3} = \frac{\vec{R}}{R^3} - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\frac{1}{R^3}\left[3\frac{\vec{R}}{R}\left(\frac{\vec{R}}{R}\vec{r}\right) - \vec{r}\right]. \tag{20}$$

Wyrażenie na ruch środka masy

Powróćmy do wyrażenia na ruch środka masy. Obliczmy poprawioną sumę we wzorze (9):

$$\begin{aligned} \frac{m_1 \vec{r}_1}{r_1^3} + \frac{m_2 \vec{r}_2}{r_2^3} &\approx m_1\left\{\frac{\vec{R}}{R^3} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\frac{1}{R^3}\left[3\frac{\vec{R}}{R}\left(\frac{\vec{R}}{R}\vec{r}\right) - \vec{r}\right]\right\} + \\ &+ m_2\left\{\frac{\vec{R}}{R^3} - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\frac{1}{R^3}\left[3\frac{\vec{R}}{R}\left(\frac{\vec{R}}{R}\vec{r}\right) - \vec{r}\right]\right\} = (m_1 + m_2)\frac{\vec{R}}{R^3}. \end{aligned} \tag{21}$$

Poprawki rzędu pierwszego w r redukują się. Uwzględnienie ich nie wnosi niczego nowego, wzór (11) pozostaje w mocy.

Wyrażenie na ruch względny

Inaczej jest dla wyrażenia na ruch względny. Powróćmy do różnicy we wzorze (14):

$$\frac{\vec{r}_1}{r_1^3}-\frac{\vec{r}_2}{r_2^3}\approx\frac{\vec{R}}{R^3}+\frac{m_2}{m_1+m_2}\frac{1}{R^3}\left[3\frac{\vec{R}}{R}\left(\frac{\vec{R}}{R}\vec{r}\right)-\vec{r}\right]+$$
$$-\frac{\vec{R}}{R^3}+\frac{m_1}{m_1+m_2}\frac{1}{R^3}\left[3\frac{\vec{R}}{R}\left(\frac{\vec{R}}{R}\vec{r}\right)-\vec{r}\right]=\frac{1}{R^3}\left[3\frac{\vec{R}}{R}\left(\frac{\vec{R}}{R}\vec{r}\right)-\vec{r}\right]= \tag{22}$$
$$=\frac{1}{R^3}[3\vec{n}(\vec{n}\,\vec{r})-\vec{r}];$$

gdzie $\vec{n}$ jest wersorem wektora $\vec{R}$.

Poprawione wyrażenie na ruch względny ma więc postać:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=-\frac{G(m_1+m_2)\vec{r}}{r^3}+\frac{GM}{R^3}[3\vec{n}(\vec{n}\,\vec{r})-\vec{r}]. \tag{23}$$

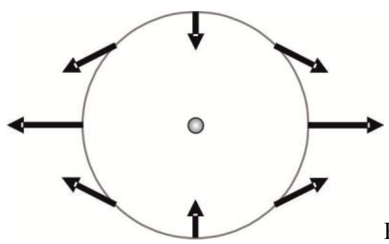
Dyskusja

Przedyskutujmy otrzymany wynik. Ze wzoru (23) wynika, że teraz ruch względny, opisany współrzędną $\vec{R}$, nie jest już niezależny od ruchu środka masy.

1. Poprawkowy człon we wzorze (23) zależy jak R^{-3} od odległości środka masy od masy centralnej.
2. Aby ustalić, jaki charakter kątowy ma poprawka, załóżmy dla uproszczenia, że:
   a) orbita ruchu opisanego zmienną $\vec{r}$ leży w płaszczyźnie ruchu środka masy, mamy więc do czynienia z ruchami w ustalonej płaszczyźnie.
   b) w wybranej chwili wektor $\vec{R}$ ma tylko składową x-ową, czyli $\vec{R}$ = [R,0]. Wtedy $\vec{n}$ = [1,0]. Wektor $\vec{r}$ = [x,y]. Nawias we wzorze (23) ma więc postać:

$$3\vec{n}(\vec{n}\,\vec{r})-\vec{r}=[3x-x,-y]=[2x,-y]. \tag{24}$$

Dla ustalonej wartości r poprawkowa siła ma charakter przedstawiony na rys. 3. Maksymalna wartość poprawkowego przyspieszenia we wzorze (23) jest równa $\frac{2GMr}{R^3}$.



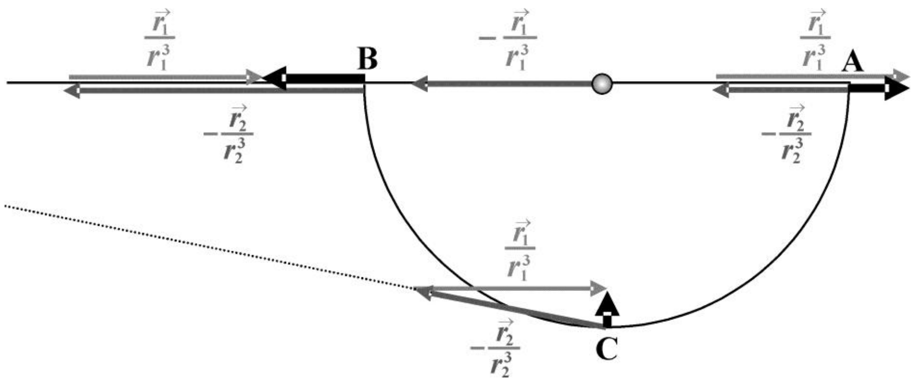
Rys. 3. Siły poprawkowe

Poprawkowa siła prowadząca do wyrażenia (23) ma dość prosty sens fizyczny. Do dyskusji tej sprawy przyjmijmy dla uproszczenia, że $m_1 \gg m_2$. Wyrażenie na dodatkową siłę wynika z bezpośredniego oddziaływania ciała lżejszego z masą centralną. Przyjmijmy też, że ciało lżejsze obiega ciało cięższe w przybliżeniu po okręgu. Rozpatrzmy trzy sytuacje (rys. 4):

a) Ciało lżejsze znajduje się dalej od masy centralnej, niż ciało cięższe (punkt A). Wtedy wartość $\frac{\vec{r}_2}{r_2^3}$ jest mniejsza, niż wartość $\frac{\vec{r}_1}{r_1^3}$. Wektor w nawiasie wzoru (14) ma kierunek osi *x*, a zwrot dodatni.

b) Ciało lżejsze znajduje się bliżej masy centralnej, niż ciało cięższe (punkt B). Wtedy wartość $\frac{\vec{r}_2}{r_2^3}$ jest większa, niż wartość $\frac{\vec{r}_1}{r_1^3}$. Wektor w nawiasie wzoru (14) ma kierunek osi *x*, a zwrot ujemny.

c) Ciało lżejsze znajduje się w przybliżeniu w tej samej odległości masy centralnej, co ciało cięższe (punkt C). Wektory $\frac{\vec{r}_2}{r_2^3}$ i $\frac{\vec{r}_1}{r_1^3}$ mają te same wartości, ale różne kierunki. Wektor w nawiasie wzoru (14) ma w przybliżeniu kierunek osi *y* i zwrot do wnętrza okręgu.



Rys. 4. Wyjaśnienie pochodzenia sił poprawkowych ($r = 0{,}2\ R$)

Siły te zaburzają ruch masy lżejszej. Na przykład hamują go na łuku BC, a rozpędzają na łuku CA. O tych poprawkach wspomina się zwykle marginesowo w typowych podręcznikach astronomii[1].

[1] Patrz np. Eugeniusz Rybka, *Astronomia ogólna*, §66 Orbita Księżyca.

Ruch Księżyca z poprawkami

Wszystko, co powiedzieliśmy wyżej, można odnieść do ruchu Księżyca. Warto jednak zapytać, jak silny może być wpływ tych efektów na jego ruch. Miarą tego może być stosunek największej wartości siły poprawkowej, wynikającej ze wzoru (23), do wartości siły grawitacyjnego oddziaływania Księżyc–Ziemia. Stosunek ten jest w przybliżeniu równy:

$$\frac{2GMr}{R^3} : \frac{Gm_1}{r^2} = 2\frac{M}{m_1}\left(\frac{r}{R}\right)^3 \approx 2 \cdot \frac{2 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}}{6 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}}\left(\frac{0{,}38 \cdot 10^6\,\mathrm{km}}{150 \cdot 10^6\,\mathrm{km}}\right)^3 \approx 0{,}01. \qquad (25)$$

Nie jest to więc efekt bardzo silny. Dlatego najprostsze przybliżenie (15) było zupełnie dobre.

Siły Księżyc–Słońce i Księżyc–Ziemia

Jeżeli stosunek *r/R* będzie dostatecznie mały, wtedy oddziaływanie Ziemia–satelita Ziemi będzie silniejsze niż oddziaływanie Słońce–satelita. Można więc zapytać, czy to właśnie nie jest powodem, że lokalny ruch satelity względem Ziemi można opisywać niezależnie od ruchu Ziemi wokół Słońca. Odpowiedź jest przecząca. Jak powiedzieliśmy wyżej, prawdziwy stosunek $r/R \approx 0{,}0026$ dla układu Słońce–Ziemia–Księżyc wystarcza do omówionego wyżej przybliżonego opisu ruchu.

Obliczmy stosunek wartości siły F_{KS} oddziaływania Księżyc–Słońce do wartości siły F_{KZ} oddziaływania Księżyc–Ziemia. Jest on równy w przybliżeniu:

$$\frac{F_{KS}}{F_{KZ}} = \frac{M}{m_1}\left(\frac{r}{R}\right)^2 \approx \frac{2 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}}{6 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}}\left(\frac{0{,}38 \cdot 10^6\,\mathrm{km}}{150 \cdot 10^6\,\mathrm{km}}\right)^2 \approx 2. \qquad (26)$$

Dla parametrów omawianych torów stosunek ten nie tylko nie jest znacznie mniejszy od jedności, ale wręcz od jedności większy.

Ale co z tego wszystkiego można przekazać uczniom I klasy liceum?