O nauczaniu oceny niepewności standardowej

Henryk Szydłowski
Wydział Fizyki UAM, Poznań

PROBLEM

Od lat 90. ubiegłego wieku istnieją międzynarodowe normy oceny niepewności pomiarowych [1, 2], zawierające jednolitą terminologię i propozycje metod obliczania niepewności całkowitych. Parametrem ilościowym określającym dokładność pomiarów jest niepewność standardowa $u(x)$ wielkości mierzonej x. Dla wyników wykazujących rozrzut statystyczny zgodny z rozkładem normalnym niepewność standardowa jest równa odchyleniu standardowemu średniej

$$u_N(x) = s_{\bar{x}} \ , \tag{1}$$

gdzie dolne wskaźniki przy $u(x)$ oraz $U(x)$, stosowane wyłącznie w tej pracy, określają typ rozkładu statystycznego: N oznacza rozkład normalny, J rozkład jednostajny, a Z jednostajny z błędnym określeniem niepewności standardowej.

Interpretacja graficzna zwykłego odchylenia standardowego s_x w rozkładzie normalnym znana jest powszechnie. Wiadomo również, że w przedziale domkniętym

$$\left\langle \bar{x} - s_x, \quad \bar{x} + s_x \right\rangle \tag{2}$$

mieści się tylko 68% wszystkich wyników pomiarowych, a prawdopodobieństwo, że wynik nie mieści się w tym przedziale, wynosi aż 32%. Stąd w normach jako faktyczną miarę niepewności przyjmuje się niepewność rozszerzoną [1], zdefiniowaną wzorem:

$$U_N(x) = k \, u_N(x) \ , \tag{3}$$

w którym użytkownik wyników decyduje o wartości współczynnika rozszerzenia k, dobierając go z przedziału między $k = 2$ a $k = 3$

$$(2 < k < 3) \, . \tag{4}$$

W przypadku przyjęcia bezpiecznej wartości $k = 3$ przedział (reguła trzech sigm)

$$\left\langle \bar{x} - U_N(x), \quad \bar{x} + U_N(x) \right\rangle, \ \text{czyli} \ \left\langle \bar{x} - 3\,u_N(x), \quad \bar{x} + 3\,u_N(x) \right\rangle \tag{5}$$

zawiera wartość rzeczywistą z prawdopodobieństwem 99,7%, a ryzyko wyniku spoza tego przedziału jest rzędu 0,3% (tab. 1). Zwróćmy jeszcze uwagę na to, że zgodnie z wzorem (1) niepewność standardowa jest równa odchyleniu standardowemu średniej $s_{\bar{x}}$, a nie odchyleniu standardowemu s_x, zatem przedziały określone przez niepewności standardowe są faktycznie mniejsze, niż to ilustruje rysunek 1a. Zgodnie z normami niepewność standardowa określona z rozkładu normalnego nazywa się niepewnością standardową typu A. W przypadkach gdy wyniki nie wykazują rozkładu normalnego, wielkość przyjętej niepewności standardowej powinna przybliżać odchylenie standardowe w rozkładzie normalnym. Przybliżona wartość niepewności standardowej jest nazywana niepewnością standardową typu B.

Zajmijmy się przypadkiem, w którym wyniki pomiarów nie wykazują rozrzutu statystycznego, czyli wielokrotnie powtarzany pomiar daje zawsze taki sam wynik, a spośród wszystkich przyczynków niepewności standardowej największą wartość ma przyczynek od niepewności wzorcowania stosowanych przyrządów [3]. Oznaczmy przez $\Delta_d x$ wartość najmniejszej działki elementarnej stosowanego przyrządu, którą interpretuje się jako niepewność maksymalną, co oznacza, że przedział domknięty

$$< x-\Delta x, \quad x+\Delta x > \tag{6}$$

zawiera wartość rzeczywistą z prawdopodobieństwem 100% lub inaczej mówiąc, że wartość rzeczywista nie może znaleźć się poza tym przedziałem. Ponadto przyjmuje się najbardziej niekorzystny przypadek, w którym gęstość prawdopodobieństwa jest stała w całym przedziale (6), czyli rozkład prawdopodobieństwa jest rozkładem jednostajnym, zwanym inaczej prostokątnym, co zilustrowano rysunkiem 1b[1]. Przez analogię do rozkładu normalnego, w którym miarą niepewności standardowej jest odchylenie standardowe średniej, również w rozkładzie jednostajnym przyjmuje się, że niepewność pomiarowa jest równa odchyleniu standardowemu

$$u_P(x)=\frac{1}{\sqrt{3}}\,\Delta_d x\,. \tag{7}$$

Przy tym podkreśla się wyraźnie, że jest to niepewność typu B. W rozkładzie jednostajnym przedział

$$\left\langle x-u_N(x),\ x+u_N(x)\right\rangle \text{ czyli } \left\langle x-\frac{1}{\sqrt{3}}\,\Delta_d x,\quad x+\frac{1}{\sqrt{3}}\Delta_d x\right\rangle \tag{8}$$

[1] W normach [1] dopuszcza się przyjęcie innych rozkładów na przykład trójkątnego, w których niepewność standardowa jest mniejsza niż w rozkładzie jednostajnym.

zawiera wartość rzeczywistą z prawdopodobieństwem 57% (tab. 1), czyli niższym niż w rozkładzie normalnym. Z tego powodu niektórzy autorzy i wykładowcy przyjmują wbrew normom [1], że niepewność standardowa w rozkładzie jednostajnym wyraża się wzorem

$$u_Z(x) = \sqrt{\frac{2}{3}}\Delta x\,. \tag{9}$$

Wtedy przedział

$$\left\langle x - \sqrt{\frac{2}{3}}\,\Delta x, \quad x + \sqrt{\frac{2}{3}}\Delta x \right\rangle \tag{10}$$

zawiera wartość rzeczywistą z prawdopodobieństwem 82% , a więc zdecydowanie wyższym niż przedział (2) w rozkładzie normalnym.

BŁĄD PRZYJĘCIA WZORU (9)

W zasadzie, gdyby niepewność standardowa była ostateczną miarą niepewności wyniku pomiaru, mimo sprzeczności wzoru (9) z normami [1] nie byłoby istotnego błędu, bo normy dopuszczają możliwość określenia niepewności uzyskanego wyniku przez samego eksperymentatora. Jednakże niepewność standardowa, zgodnie z nazwą, jest tylko pewnym standardem i jak już wspomnieliśmy, w rozkładzie normalnym zawiera wartość rzeczywistą tylko z prawdopodobieństwem 68%. Użytkownik, np. konstruktor, absolutnie nie może przyjąć odchylenia standardowego jako „przedziału tolerancji", bo wtedy godziłby się na 32% ryzyka katastrofy! Jest on zmuszony przyjąć niepewność rozszerzoną. Oczywiście im większy jest współczynnik rozszerzenia, tym mniejsze jest ryzyko katastrofy, ale równocześnie ze zmniejszeniem ryzyka wzrasta ciężar konstrukcji i koszty. Wpływ wartości współczynnika k na wynik dla rozkładu normalnego i dla obydwu przypadków rozkładu jednostajnego pokazano w tabeli 1. Jak widać z tabeli 1, w przypadku gdy niepewność wzorcowania jest jedynym przyczynkiem niepewności rozszerzonej, dla k = 3 $U_J(x) = 2{,}44\Delta_d x$, gdzie $\Delta_d x$ jest niepewnością maksymalną. Podkreślmy! Przyjmując niepewność standardową w postaci (9), otrzymujemy dla niepewności rozszerzonej przy k = 3 wartość 2,44 raza większą od niepewności maksymalnej. Który z eksperymentatorów lub użytkowników wyniku może zgodzić się na takie zwiększenie niepewności wyniku? Przecież nawet w przypadku przyjęcia rozkładu jednostajnego i niepewności standardowej w postaci (7) niepewność rozszerzona przy k = 3 jest 1,73 raza większa od niepewności maksymalnej ($U_Z(x) = 1{,}73\Delta_d x$).

WNIOSEK

Przybliżenie niepewności pomiarowej rozkładem jednostajnym według norm [1] jest przyjęciem najmniej korzystnego przypadku, w którym niepewność standardowa ma postać (7). Natomiast przyjęcie niepewności standardowej w postaci (9) jest zarówno wykroczeniem przeciw obowiązującym normom, jak i poważnym błędem, szczególnie w obliczeniowych programach komputerowych i w nauczaniu.

Literatura

[1] *Guide to expression of the uncertainty of measurement*, International, Organization for Standardization (ISO), Switzerland 1995.

[2] Wyrażanie niepewności pomiaru; przewodnik, Główny urząd Miar, Polska 1999.

[3] H. Szydłowski, Niepewności w pomiarach,; międzynarodowe standardy w praktyce, Wyd. UAM, Poznań 2001.

[4] H. Szydłowski, *Międzynarodowe normy oceny niepewności pomiarów*, Postępy Fizyki 51, str. 92, 2000.

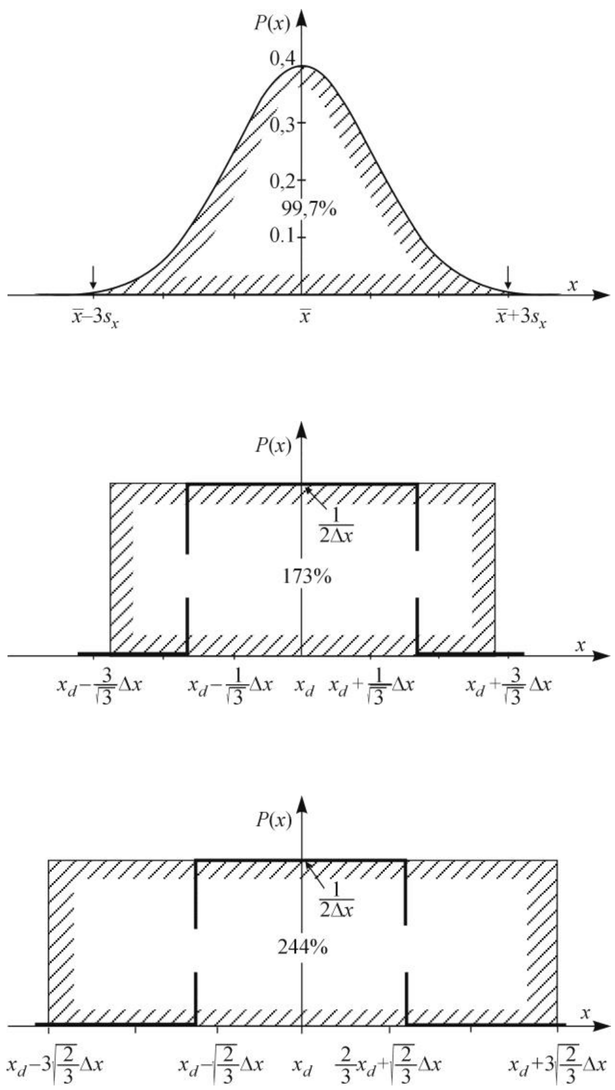
Tabela 1
Relacje między niepewnością rozszerzoną a niepewnością standardową w różnych rozkładach statystycznych.

	Rozkład normalny N			**Rozkład jednostajny J**			**Rozkład jednostajny Z**		
k	$U_N(\bar{x}) =$	Pow. pod krzywą w %	Relacja $U_N(x) = z\ s_x$	$U_J(\bar{x}) =$	Pow. pod krzywą w %	Relacja $U_J(x) = z\ \Delta_d x$	$U_Z(\bar{x}) =$	Pow. pod krzywą w %	Relacja $U_Z(x) = z\ \Delta_d x$
1	s_x	68,3	s_x	$\frac{1}{\sqrt{3}}\Delta_d x$	0,57	$0{,}57\Delta_d x$	$\sqrt{\frac{2}{3}}\Delta_d x$	0,82	$0{,}82\Delta_d x$
2	$2\,s_x$	95,5	$2s_x$	$\frac{2}{\sqrt{3}}\Delta_d x$	>100	$11{,}5\Delta_d x$	$2\sqrt{\frac{2}{3}}\Delta_d x$	>100	$1{,}63\Delta_d x$
3	$3\,s_x$	99,7	$3s_x$	$\frac{3}{\sqrt{3}}\Delta_d x$	>100	$1{,}73\Delta_d x$	$3\sqrt{\frac{2}{3}}\Delta_d x$	>100	$2{,}44\Delta_d x$

a)

b)

c)



Rysunek 1
Ilustracja niepewności rozszerzonej w rozkładach: normalnym (a), jednostajnym z prawidłowo zdefiniowaną niepewnością standardową (b) oraz z błędnie zdefiniowaną niepewnością standardową (c)