



## Spontaniczne złamanie symetrii na przykładach z mechaniki klasycznej

Henryk Arodź

*Institut Fizyki Uniwersytetu Jagiellońskiego*

### 1. Wstęp

Nie ulega wątpliwości, że pojęcie symetrii odgrywa niezwykle istotną rolę we współczesnej fizyce. Szczególnie mocno jest ono eksponowane w fizyce kwantowej, gdzie E. P. Wigner stworzył w latach 30. i 40. XX wieku piękną teorię symetrii. Trudno też znaleźć współczesny podręcznik elektrodynamiki klasycznej, w którym nie byłoby chociażby wzmianki o transformacjach Lorentza i symetrii relatywistycznej, lub podręcznik mechaniki klasycznej bez twierdzenia Noether. W latach 60. minionego stulecia, dzięki pionierskim pracom Y. Nambu oraz J. Goldstone'a, zwrócono uwagę na zjawisko spontanicznego złamania symetrii. Obecnie zjawisko to, wraz z odpowiednim, dość subtelnym, aparatem pojęciowym i matematycznym, leży u podstaw wielu działów fizyki, w tym znacznej części fizyki fazy skondensowanej oraz fizyki mikroświata. Znany teoretyk angielski T.W.B. Kibble w roku 1976 wysunął hipotezę, że jest ono istotne także dla zrozumienia ewolucji wczesnego Wszechświata.

W niniejszym artykule chcemy wyjaśnić Czytelnikowi, co to jest spontaniczne złamanie symetrii. Podajemy też kilka przykładów prostych układów mechanicznych, gdzie zjawisko to występuje.

### 2. Symetria i jej złamanie

Zacznijmy od określenia symetrii. Posłużymy się przykładem. W pustej przestrzeni, a więc bez żadnych pól lub cząstek, umieszczamy jedną cząstkę. Dla prostoty przyjmujemy, że jest ona punktowa. Pomijamy też efekty relatywistyczne. Wiemy, jakie stany takiej cząstki są **fizycznie możliwe**: spoczynek w dowolnym punkcie przestrzeni lub ruch jednostajny prostoliniowy. Jest to nikły podzbiór ruchów możliwych do pomyślenia. Na przykład cząstka nie będzie poruszać się wzdłuż żadnej zakrzywionej linii, chociażby okręgu. Fizycznie możliwy stan można przeprowadzić w inny taki stan za pomocą pewnych transformacji. Przesunięcie całej trajektorii o stały wektor (translacja) lub jej obrót o pewien kąt wokół jakiejś osi da fizycznie możliwą trajektorię naszej cząstki. Takie transformacje nazywamy transformacjami symetrii, a ich zbiór **symetrią** danego układu fizycznego. Obroty i translacje nie wyczerpują zbioru transformacji symetrii dla naszej cząstki. Pełny ich zbiór zawiera jeszcze tak zwane pchnięcia, tj. transformacje zmieniające prędkość cząstki o stały wektor, a także translacje czasowe. Ma on matematyczną stru-

kturę grupy zwanej grupą Galileusza (gdym uwzględnimy efekty relatywistyczne, będzie to grupa Poincarègo).

Jasne jest, że konkretna trajektoria cząstki jest na ogół zmieniana przez transformację symetrii (czyli nie jest niezmiennicza). Translacja przeprowadza cząstkę spoczywającą w jednym punkcie w cząstkę spoczywającą w innym punkcie. Natomiast obrót wokół dowolnej osi przechodzącej przez punkt, w którym cząstka spoczywa, nic nie zmienia.

Spośród wszystkich fizycznie możliwych trajektorii układu szczególnie istotne są te, które mają najniższą energię. Nazywane są one **stanami podstawowymi**. W wypadku naszej cząstki w pustej przestrzeni są to wszystkie trajektorie „punktowe”, odpowiadające cząstce spoczywającej w dowolnym punkcie, bo wtedy energia kinetyczna przyjmuje minimalną wartość równą zeru. Wyobraźmy sobie, że cząstka znajduje się w jednym ze stanów podstawowych. Mówimy, że dana symetria została **spontanicznie złamana**, gdy ten stan podstawowy nie jest niezmienniczy względem niektórych lub wszystkich transformacji symetrii. W naszym przykładzie spontanicznie złamana jest między innymi symetria translacyjna. Nie jest spontanicznie złamana symetria zawierająca obroty wokół dowolnej osi przechodzącej przez punkt, w którym cząstka spoczywa.

Określenie, że symetria została złamana „spontanicznie”, nawiązuje do tego, że większość układów fizycznych samorzutnie, a więc spontanicznie, zdąża do stanów o najniższej możliwej energii (między innymi, wskutek dysypacji energii).

Zauważmy, że układ, w którym nastąpiło spontaniczne złamanie symetrii, tzn. znalazł się on w jednym ze stanów podstawowych nie niezmienniczych względem transformacji symetrii, nadal ma symetrię: transformacje symetrii przeprowadzają trajektorie fizycznie możliwe w trajektorie fizycznie możliwe. Inaczej mówiąc, zbiór wszystkich fizycznie możliwych trajektorii układu nadal jest niezmienniczy względem transformacji symetrii – jedynie „wybrany” przez układ konkretny stan podstawowy nie jest niezmienniczy. Spontaniczne złamanie symetrii jest czymś zupełnie różnym od **jawnego złamania symetrii**, z którym mamy do czynienia, gdy przez włączenie jakichś sił (oddziaływań) zmieniamy zbiór transformacji symetrii. Oczywiście także zbiór fizycznie możliwych trajektorii na ogół ulega wtedy zmianie. Kontynuując przykład z cząstką w przestrzeni, włączenie stałej siły grawitacyjnej w całej przestrzeni powoduje, że fizycznie niemożliwe jest pozostawanie w spoczynku lub ruch prostoliniowy ze stałą prędkością. Zbiór transformacji symetrii nadal zawiera wszystkie translacje. Symetria względem translacji w dwu kierunkach prostopadłych do kierunku siły grawitacyjnej prowadzi do prawa zachowania odpowiednich składowych pędu cząstki, natomiast symetria względem translacji w kierunku do niej równoległym prowadzi do całki ruchu (tzn. wielkości zachowywanej) postaci  $p_{\parallel} - mgt$ , gdzie  $p_{\parallel}$  jest składową pędu równoległą do siły grawitacyjnej,  $g$  – przyspieszeniem grawitacyjnym,  $m$  – masą cząstki. Ponieważ  $dp_{\parallel}/dt = mg$  na mocy równania Newtona, powyższa wielkość

jest stała w czasie. Transformacjami symetrii są też obroty wokół osi równoległych do siły grawitacyjnej, ale nie wokół innych osi. Symetria względem dowolnych obrotów została jawnie złamana przez włączenie pola. Układ taki nie ma stanu o najniższej energii – energia potencjalna może być dowolnie mniejsza od zera. Nieco bardziej realna jest sytuacja, gdy cząstka znajduje się w części przestrzeni ograniczonej z dołu poziomą „podłogą”. Wtedy stany podstawowe istnieją – są to stany, w których cząstka spoczywa na owej „podłodze”<sup>1</sup>. Obecność „podłogi” ogranicza w oczywisty sposób zbiór transformacji translacji – jest to jawne złamanie symetrii translacyjnej.

Zbiór wszystkich trajektorii o najniższej energii nazywany jest **rozmaitością próżniową** danego układu fizycznego. Termin ten wprowadzono najpierw w kwantowej teorii pola, gdzie stan o najniższej energii jest nazywany stanem próżni. W wielu wypadkach transformacje symetrii nie zmieniają energii układu. Jeśli właśnie taka symetria jest spontanicznie złamana, to stosując transformacje symetrii do jednego stanu podstawowego, otrzymamy inne stany podstawowe, czyli rozmaitość próżniową lub przynajmniej jej część.

W wypadku gdy symetria nie jest spontanicznie złamana, stan podstawowy pozostaje niezmienny po dowolnej transformacji symetrii. Przykładem może być przestrzenne wahadło matematyczne, którego ruchomy, obciążony koniec może poruszać się po sferze o promieniu równym długości ramienia wahadła. Z powodu obecności jednorodnego pola grawitacyjnego, a także dlatego, że drugi koniec ramienia jest nieruchomy, symetrią tego układu są jedynie obroty wokół pionowej osi przechodzącej przez nieruchomy koniec ramienia wahadła. W stanie podstawowym wahadło jest nieruchome i jego obciążony koniec zajmuje najniższą możliwą pozycję. Obroty wokół owej osi nie zmieniają jego położenia, więc nie ma spontanicznego złamania symetrii.

Brak spontanicznego złamania symetrii jest typowy dla układów kwantowych zawierających zadaną skończoną liczbę cząstek. Z kolei w kwantowych układach teoriopolowych, mogących zawierać cząstki w dowolnej liczbie, spontaniczne złamanie symetrii występuje dość często, podobnie jak w układach niekwantowych (czyli klasycznych).

Wróćmy do przykładu z cząstką w pustej przestrzeni. Mamy tutaj bardzo dużą rozmaitość próżniową, równą całej przestrzeni – cząstka, spoczywając w dowolnym punkcie przestrzeni, ma minimalną energię. Dodając takiej cząstce dowolnie małą ilość energii kinetycznej, spowodujemy, że cząstka będzie się przemieszczać dowolnie daleko w rozmaitości próżniowej. Ruchy tego typu są nazywane **modami Goldstone’a** (od angielskiego *mode*). W przypadku stanu podstawowego wahadła przestrzennego dodanie małej porcji energii kinetycznej umożliwi jedynie

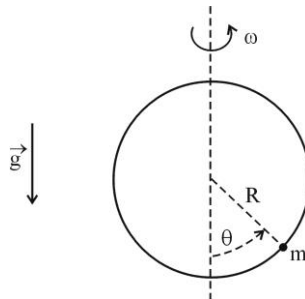
---

<sup>1</sup> *Nota bene*, jest jedną z tajemnic natury, że wszystkie zaobserwowane dotychczas układy fizyczne mają stany podstawowe.

ruch w małym zakresie odchyłeń wahadła od położenia równowagi trwałej. Tutaj nie ma modów Goldstone'a.

### 3. Przykład spontanicznego złamania symetrii dyskretnej $Z_2$

Koralik o masie  $m$  znajduje się na sztywnej obręczy o promieniu  $R$ , wirującej ze stałą prędkością kątową  $\omega$  wokół nieruchomej, pionowej osi leżącej w jej płaszczyźnie i przechodzącej przez jej środek.



Rys. 1. Koralik na obręczy

Stala siła ciężkości jest skierowana pionowo w dół. Koralik ślizga się po obręczy bez tarcia. Jedynym efektem ruchu obrotowego obręczy jest pojawienie się siły odśrodkowej, działającej na koralik. Sile tej odpowiada energia potencjalna równa  $-\frac{1}{2}mR^2\omega^2 \sin^2 \theta$ , gdzie  $\theta$  jest kątem z przedziału  $[-\pi, \pi]$ , określającym położenie koralika na okręgu (patrz rysunek 1).  $\theta = 0$  odpowiada najniższemu położeniu koralika. Dodając energię potencjalną grawitacyjną, otrzymujemy następujące wyrażenie dla całkowitej energii potencjalnej koralika

$$V_1(\theta) = mgR(1 - \cos \theta) - \frac{1}{2}mR^2\omega^2 \sin^2 \theta. \quad (1)$$

Koralik w stanie podstawowym ma zerową energię kinetyczną i minimalną całkowitą energię potencjalną. Minimum funkcji  $V_1(\theta)$  znajdujemy, rozwiązując równanie  $dV_1/d\theta = 0$ . Różniczkując obie strony wzoru (1), przyrównując stronę lewą do zera i dzieląc przez  $mgR$ , otrzymujemy następujące równanie

$$0 = \sin \theta(1 - \alpha \cos \theta), \quad (2)$$

gdzie

$$\alpha = \frac{R\omega^2}{g}.$$

Równanie to ma oczywiste rozwiązanie

$$\theta = 0. \quad (3)$$

Jednakże gdy  $\alpha > 1$ , istnieją też dwa inne rozwiązania

$$\theta = \pm\theta_0, \quad (4)$$

gdzie  $\theta_0$  jest dodatnim kątem wyznaczonym z warunku

$$\cos \theta_0 = \alpha^{-1}. \quad (5)$$

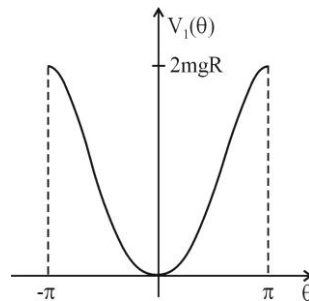
Z warunku tego wynika, że kąt  $\theta_0$  zawarty jest w przedziale  $(0, \pi/2)$ . Aby stwierdzić, dla którego z tych rozwiązań funkcja  $V_1(\theta)$  ma minimum, można zastosować standardową procedurę ze sprawdzaniem znaku drugiej pochodnej. Można też zauważyć, iż

$$V_1(\theta) = 2mgR \sin^2 \frac{\theta}{2} \left( 1 - \alpha + \alpha \sin^2 \frac{\theta}{2} \right). \quad (6)$$

Ze wzoru (6) natychmiast wynika, że gdy  $\alpha \leq 1$ , całkowita energia potencjalna osiąga minimum dla  $\theta = 0$ . Z sytuacją taką mamy do czynienia, gdy prędkość kątowa nie jest zbyt duża: warunek  $\alpha \leq 1$  można zapisać w postaci

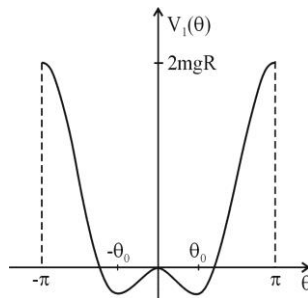
$$\omega \leq \sqrt{\frac{g}{R}}.$$

W tym wypadku wykres całkowitej energii potencjalnej ma kształt przedstawiony na rysunku 2.



Rys. 2. Energia potencjalna koralika, gdy  $\alpha \leq 1$

Przy większych prędkościach kątowych, tzn. gdy  $\alpha > 1$ , wykres funkcji  $V(\theta)$  ma kształt przedstawiony na rysunku 3. Łatwo można go uzyskać, korzystając ze wzoru (6).

Rys. 3. Energia potencjalna koralika, gdy  $\alpha > 1$ 

Teraz całkowita energia potencjalna przyjmuje minimalną wartość dla  $\theta = \pm\theta_0$ . Punkt  $\theta = 0$  stał się położeniem równowagi niestabilnej. Położeniami równowagi stabilnej są  $\theta = \pm\theta_0$ .

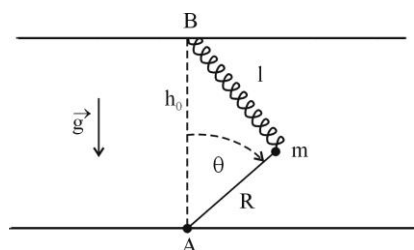
Przyjrzyjmy się teraz symetrii tego układu fizycznego. O ruchu obrotowym obręczy można „zapomnieć”, jeśli tylko uwzględnimy siłę odśrodkową, bo jedynym efektem wprowadzanym przez ten ruch jest pojawienie się owej siły. Siła ta działa w kierunku prostopadłym do osi obrotu i jest zwrócona od osi. Zauważmy też, że koralik nie „czuje” pełnej siły ciężkości, lecz jedynie jej składową styczną do okręgu. Zarówno siła odśrodkowa jak i ta składowa styczna zależą od położenia koralika na obręczy. Jasne jest więc, że przesuwanie koralika wzdłuż okręgu nie jest transformacją symetrii. Symetrią jest natomiast przeniesienie koralika na drugą część obręczy, symetrycznie względem osi obrotu – chodzi o zmianę kąta  $\theta$  na  $-\theta$ . Dwukrotne wykonanie tej transformacji daje powrót do położenia wyjściowego, czyli tzw. transformację identycznościową. Te dwie transformacje:  $\theta \rightarrow -\theta$  oraz identycznościowa (czyli  $\theta \rightarrow \theta$ ) tworzą grupę zwaną  $Z_2$ . Obecność tej symetrii ma odzwierciedlenie w tym, że funkcja  $V_1(\theta)$  jest parzysta,  $V_1(\theta) = V_1(-\theta)$ . Położenie koralika  $\theta = 0$  jest niezmiennicze względem transformacji symetrii, położenia  $+\theta_0$  i  $-\theta_0$  zaś nie są. Wyniki te oznaczają, że przy dostatecznie dużych prędkościach kątowych ( $\omega > \sqrt{g/R}$ ) następuje spontaniczne złamanie symetrii  $Z_2$ . Rozmaitością próżniową jest wtedy zbiór dwuelementowy  $\pm\theta_0$ . Ponieważ niemożliwy jest ruch wzdłuż takiej rozmaitości próżniowej, nie ma tutaj możliwości pojawienia się modów Goldstone’a. Dodajmy, że symetrią naszego układu fizycznego zawsze jest  $Z_2$  – jest oczywiste, że zmiana prędkości kątowej  $\omega$  jej nie zmienia.

Model ten stanowi analogię do przejść fazowych: zmiana parametru zewnętrznego, w tym wypadku prędkości kątowej  $\omega$ , wywołuje zmianę stanu podstawowego układu. W przejściach fazowych parametrem zewnętrznym jest najczęściej

temperatura, ale może też nim być ciśnienie, pole magnetyczne itd. W wielu przejściach fazowych następuje spontaniczne złamanie jakiejś symetrii.

#### 4. Przykład spontanicznego złamania symetrii ciągłej $U(1)$

Układ przedstawiony na rysunku 4 zawiera odwrócone wahadło przestrzenne, zamocowane do podłogi w punkcie A. Ruchomy koniec o masie  $m$  i nieważkie ramię o długości  $R$  są podtrzymywane sprężyną o długości własnej  $l_0$ , zamocowaną do sufitu w punkcie B, dokładnie nad punktem A. Odległość sufitu od podłogi wynosi  $h_0$ . Zakładamy, że  $l_0 + R < h_0$ . Zatem gdy wahadło znajduje się w pozycji pionowej, sprężyna jest rozciągnięta: ma wtedy długość  $l = h_0 - R > l_0$ . Koniec wahadła może poruszać się po górnej połowcy sfery o promieniu  $R$  i środku w punkcie A.



Rys. 4. Wahadło podtrzymywane sprężyną

Układ ten ma symetrię złożoną z transformacji obrotów wokół osi przechodzącej przez punkty A i B. Z matematycznego punktu widzenia zbiór ten jest tzw. grupą  $U(1)$  (co czyta się, że jest to jednowymiarowa grupa unitarna).

Położenie wahadła możemy określać, podając kąt  $\theta$ , dający odchylenie od pionu, oraz kąt azymutalny  $\phi$  (niezaznaczony na rysunku 4), dający położenie na płaszczyźnie podłogi pionowego rzutu ramienia wahadła. Energia potencjalna układu zależy jedynie od kąta  $\theta$  (co ma związek z symetrią  $U(1)$ ). Jest ona dana wzorem

$$V_2(\theta) = mgR \cos \theta + \frac{1}{2}k(l - l_0)^2, \quad (7)$$

gdzie

$$l = \sqrt{h_0^2 + R^2 - 2h_0R \cos \theta} \quad (8)$$

jest długością sprężyny,  $k$  zaś charakteryzuje jej sprężystość. Kąt  $\theta$  może zmieniać się w przedziale  $[0, \pi/2]$ .

Minima energii potencjalnej  $V_2(\theta)$  znajdujemy, analizując warunek  $dV_2/d\theta = 0$ . Prowadzi on do równania

$$\sin \theta \left[ \left( 1 - \frac{m}{\mu} \right) l - l_0 \right] = 0, \quad (9)$$

gdzie

$$\mu = \frac{kh_0}{g}.$$

Oczywistym rozwiązaniem jest

$$\theta = 0. \quad (10)$$

Czy istnieją inne rozwiązania zgodne z warunkiem  $0 \leq \theta \leq \pi/2$ ? Przyrównując do zera wyrażenie w nawiasie kwadratowym i stosując wzór (8), otrzymujemy równanie

$$\cos \theta_0 = \frac{1}{2h_0R} \left( h_0^2 + R^2 - \frac{l_0^2 \mu^2}{(\mu - m)^2} \right). \quad (11)$$

Rozwiązanie istnieje, gdy strona prawa ma wartość w przedziale  $[0,1]$ , tzn. gdy

$$0 \leq h_0^2 + R^2 - \frac{l_0^2 \mu^2}{(\mu - m)^2} \leq 2h_0R.$$

Rozwiązując te nierówności, otrzymujemy następujący warunek na  $m$

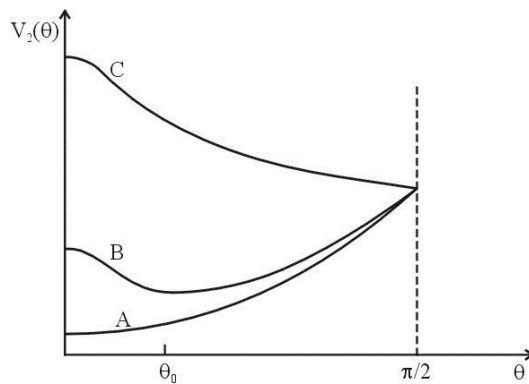
$$m_* \leq m \leq m^*, \quad (12)$$

gdzie

$$m_* = \mu \left( 1 - \frac{l_0}{h_0 - R} \right), \quad m^* = \mu \left( 1 - \frac{l_0}{\sqrt{h_0^2 + R^2}} \right).$$

Gdy  $m \leq m^*$ , energia potencjalna osiąga minimum dla  $\theta = 0$ , co odpowiada pionowemu ustawieniu wahadła. Z kolei dla  $m$  z przedziału otwartego  $(m_*, m^*)$  wahadło w stanie podstawowym jest odchylone od pionu o kąt  $\theta_0$  z przedziału  $(0, \pi/2)$ , wyznaczony z równania (11). W końcu gdy  $m \geq m^*$ , wahadło w stanie podstawowym leży nieruchomo na podłodze,  $\theta_0 = \pi/2$ . Wykresy energii potencjalnej są przedstawione na rysunku 5.





Rys. 5. Wykresy energii potencjalnej  $V_2(\theta)$ . Krzywa A odpowiada sytuacji  $m \leq m_*$ , krzywa B sytuacji  $m_* < m < m^*$ , zaś krzywa C  $m \geq m^*$

Aby uwzględnić kąt azymutalny  $\phi$ , należy powyższy wykres obrócić dookoła osi pionowej, co da trzy powierzchnie obrotowe. Powierzchnia otrzymana z krzywej B nazywana jest często kapeluszem meksykańskim. Przez analogię powierzchnię generowaną przez obracanie krzywej C można by nazywać kapeluszem podhalańskim.

W przypadkach B i C mamy oczywiście spontaniczne złamanie symetrii  $U(1)$ . Rozmaitość próżniowa jest teraz okręgiem o promieniu  $R \sin\theta_0$ . Ruchy końca wahadła po tym okręgu są modami Goldstone'a. Dodajmy na wszelki wypadek, że gdy wahadło spoczywa wychylone, to taki stan układu nie jest niezmienniczy względem obrotów wokół osi danej przez ramię wahadła. Chodzi o to, że wprawdzie przy tych obrotach ramię nie zmienia swego położenia, ale inne części naszego układu fizycznego, mianowicie sufit i podłoga, przemieszczają się.

### Zakończenie

Pojęcia spontanicznego złamania symetrii, rozmaitości próżniowej i modów Goldstone'a grają podstawowe role w opisach powstawania i własności tzw. defektów topologicznych. Należą do nich na przykład wiry w nadprzewodnikach i w nadciekłym helu, różnego typu ścianki domenowe, a także jeże w ciekłych kryształach. Spontaniczne złamanie symetrii jest odpowiedzialne za niezerową masę spoczynkową wielu cząstek elementarnych. Z kolei istnienie modów Goldstone'a wyjaśnia, dlaczego niektóre występujące w fizyce fazy skondensowanej kwazicząstki mają masę równą zero. Niezwykle interesujący jest też tzw. mechanizm Higgsa, dzięki któremu w pewnych sytuacjach mody Goldstone'a znikają, tzn. stają się niemożliwe do zaobserwowania. Są to tematy do innych opowieści o spontanicznym złamaniu symetrii.

**Literatura**

Przykłady spontanicznego złamania symetrii w prostych układach mechanicznych są omawiane na przykład w następujących artykułach:

- [1] G. Fletcher, *Am. J. Phys.* **65** (1997), 74.
- [2] R. V. Mancuso, *Am. J. Phys.* **68** (2000), 271.
- [3] F. Charru, *Eur. J. Phys.* **18** (1997), 417.

Przykład przytoczony w §3 pochodzi z pracy [1]. W pracy [2] przykład ten rozszerzono, rozważając jednostajny obrót obręczy wokół pionowej osi leżącej w płaszczyźnie okręgu, jak w §3, lecz nieprzechodzącej przez środek okręgu. Wtedy minima widoczne na rysunku 3 mają różne głębokości. Układ omawiany w §4 istotnie różni się od rozważanego w pracy [3], niemniej ta właśnie praca zainspirowała niniejszego autora.

W artykule A.M.J. Schakela, opublikowanym w *Fotonie* 73 (2001), str. 15–21, poruszone są niektóre z zagadnień wspomnianych w Zakończeniu.