O momencie magnetycznym niepłaskiego obwodu

Jacek Ciborowski[*], *Maria Sobol*[**]

[*]*Uniwersytet Warszawski, Wydział Fizyki*

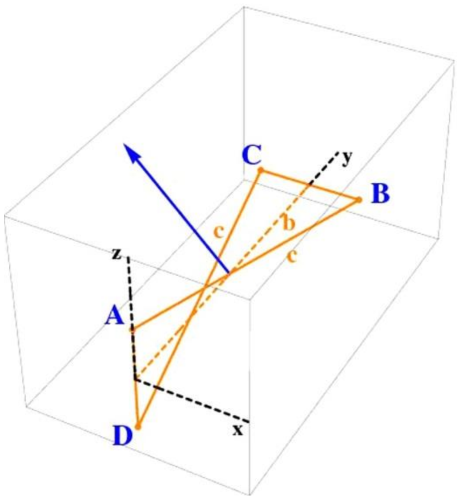
[**]*Warszawski Uniwersytet Medyczny, Zakład Biofizyki i Fizjologii Człowieka*

Na wykładach z elektryczności i magnetyzmu studenci uczą się, że płaski obwód (rozważa się zazwyczaj okrąg, trójkąt lub prostokąt), w którym płynie prąd o natężeniu I, jest dipolem magnetycznym posiadającym moment dipolowy o wartości $\mu = IS$, gdzie S jest powierzchnią tego obwodu. Wektor momentu dipolowego skierowany jest prostopadle do powierzchni obwodu, a jego punktem zaczepienia jest jego środek. Płaską ramkę z drutu można dowolnie zdeformować, zarówno tylko w jej pierwotnej płaszczyźnie (pozostawiając ją jako figurę płaską), jak również wyginając ją tak, aby powstała figura niepłaska. W pierwszym przypadku można łatwo pokazać, że powyższy wzór nadal opisuje moment magnetyczny takiej nieregularnej, lecz płaskiej ramki, a występująca w nim powierzchnia S jest jej powierzchnią. W drugim przypadku – a taki przestrzenny (trójwymiarowy) twór również musi posiadać moment magnetyczny, gdy w przewodniku płynie prąd – narzuca się pytanie, jaka jest interpretacja powierzchni S w powyższym wzorze, gdy obwód jest niepłaski.

Dla ilustracji rozważmy pewien szczególny przykład obwodu powstałego w opisany poniżej sposób. Niech będzie dana prostokątna ramka ze sztywnego przewodnika o bokach o długości: a (krótszy) i c (dłuższy). Ramkę uchwycono palcami obu rąk za krótsze boki i skręcono je, ustawiając prostopadle do siebie, jak pokazano na rys. 1. Wszystkie boki tak powstałej figury są oczywiście nadal odcinkami prostych. W ramce płynie prąd o natężeniu I. Policzmy wektor momentu magnetycznego tak powstałego obwodu i znajdźmy interpretację powierzchni S we wzorze $\mu = IS$ w tym przypadku.

Korzystamy ze wzoru na siłę elektrodynamiczną (zwaną siłą Ampère'a), która dla odcinka przewodnika o długości l w polu magnetycznym o indukcji $\vec{B}$ ma postać: $\vec{F} = I\,\vec{l} \times \vec{B}$. Siły te powodują powstanie momentu siły działającego na ramkę, który zgodnie z definicją wynosi: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$, gdzie $\vec{r}$ jest odpowiednim ramieniem działania siły do wyznaczenia z geometrii zagadnienia i całość wysumowana jest po wszystkich bokach ramki. Następnie korzystamy z definicji wektora momentu magnetycznego: $\vec{M} = \vec{\mu} \times \vec{B}$, gdzie $\vec{M}$ jest momentem siły działającym na dipol magnetyczny o momencie magnetycznym $\vec{\mu}$ w polu $\vec{B}$. Przyrównujemy powyższe wyrażenia dla momentu siły i z tej równości wyznaczamy współrzędne wektora momentu magnetycznego.

Ramkę po skręceniu umieśćmy w kartezjańskim układzie współrzędnych, jak pokazano na rys. 1. Wierzchołki ramki *ABCD* znajdują się w punktach o następujących współrzędnych: A (0, 0, $a/2$), B ($a/2$, b, 0), C ($-a/2$, b, 0) oraz D (0, 0, $-a/2$), gdzie b ($b < c$) jest odległością środków boków *AD* i *BC* (patrz niżej). Przyjmijmy, że prąd płynie w kierunku zgodnym z powyższą kolejnością wierzchołków. Przyjmijmy również, że ramka umieszczona jest w polu magnetycznym o indukcji $\vec{B} = \left[B_x,\ B_y, B_z\right]$.



Rys. 1. Trójwymiarowy, zamknięty obwód (ramka), w którym płynie prąd o natężeniu I, jest dipolem magnetycznym. Jaka jest w takim przypadku interpretacja powierzchni S, występującej we wzorze na moment magnetyczny $\mu = IS$?

- Na każdy z boków ramki działa siła Ampère'a, której punkt zaczepienia przyjmiemy w środku danego boku. Środki boków, czyli odcinków *AB*, *BC*, *CD* i *DA*, mają następujące współrzędne:

  O_{AB} ($a/4$, $b/2$, $a/4$), O_{BC} (0, b, 0), O_{CD} ($-a/4$, $b/2$, $-a/4$) oraz O_{DA} (0, 0, 0);

- Środek całej figury znajduje się w punkcie leżącym w połowie odległości między środkami boków *AB* i *CD*, czyli ma współrzędne: O_s(0, $b/2$, 0);

- Wektory reprezentujące poszczególne boki są następujące: $\vec{l}_{BA}$ = [$a/2$, b, $-a/2$], $\vec{l}_{CB}$ = [$-a$, 0, 0], $\vec{l}_{DC}$ = [$a/2$, $-b$, $-a/2$] i $\vec{l}_{AD}$ = [0, 0, a];

- Wektory, będące ramionami działania sił Ampère'a, zaczepione w środku figury i o strzałce w punkcie środkowym danego boku, są następujące:

$\vec{r}_{AB}$ = [$a/4$, 0, $a/4$], $\vec{r}_{BC}$ = [0, $b/2$, 0], $\vec{r}_{CD}$ = [$-a/4$, 0, $-a/4$] i $\vec{r}_{DA}$ = [0, $-b/2$, 0];

- Długości boków AB i CD wynoszą c i stąd możemy obliczyć b:

$$b = \sqrt{c^2 - a^2 / 2}$$

Wektor momentu magnetycznego wyznaczamy z równania:

$$\sum_i \vec{M} = I \sum_i \vec{r}_i \times \left(\vec{l}_i \times \vec{B} \right) = \vec{\mu} \times \vec{B} \tag{1}$$

gdzie $\sum_i$ oznacza sumowanie po wszystkich bokach figury, a $\vec{r}_i$ i $\vec{l}_i$ – odpowiednie wielkości określone powyżej. W rachunkach wygodnie jest skorzystać z tożsamości:

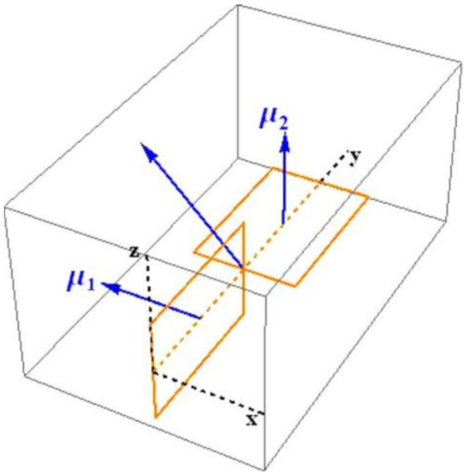
$$\vec{r} \times (\vec{l} \times \vec{B}) = \vec{l}\,(\vec{r} \bullet \vec{B}) - \vec{B}(\vec{r} \bullet \vec{l}\,).$$

Rozpiszmy dla przykładu składową x-ową w (1):

$$I \sum_i \left[l_{i_x} (r_{i_x} B_x + r_{i_y} B_y + r_{i_z} B_z) - B_x (r_{i_x} l_{i_x} + r_{i_y} l_y + r_{i_z} l_{i_z}) \right] = \mu_y B_z - \mu_z B_y .$$

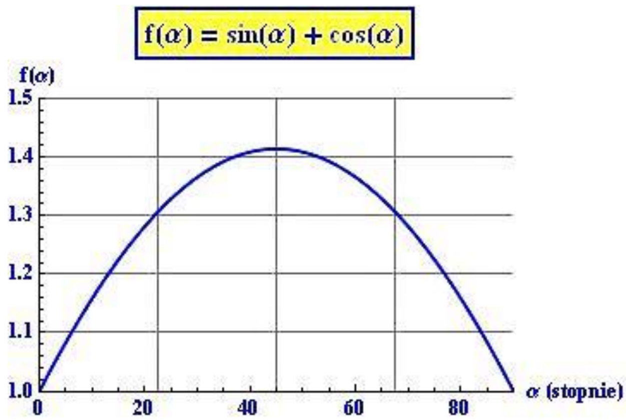
Z porównania współczynników w równaniach dla wszystkich trzech składowych otrzymujemy następujący wynik dla wektora momentu magnetycznego skręconej ramki oraz jego długości:

$$\vec{\mu} = I \frac{ab}{2}(-1, 0, 1) \qquad\qquad |\,\vec{\mu}\,| = \frac{Iab\sqrt{2}}{2} \tag{2}$$



Rys. 2. Ramka z prądem, pokazana na rys. 1, jest dipolem magnetycznym, który można przedstawić równoważnie jako układ dwóch wzajemnie prostopadłych dipoli, utworzonych z ramek o bokach a i $b/2$

Wynik ten, jak łatwo można sprawdzić, jest identyczny z wynikiem, który otrzymalibyśmy zastępując skręconą ramkę z rys. 1 dwiema płaskimi, prostokątnymi ramkami o bokach a i $b/2$, ustawionymi pod kątem prostym, jak pokazano na rys. 2. Każda taka ramka ma moment magnetyczny o wartości równej $Iab/2$, a wektory ich momentów magnetycznych ustawione są względem siebie pod kątem prostym, więc wypadkowy wektor momentu magnetycznego zgodny jest z (2). Poszukajmy teraz interpretacji powierzchni S we wzorze opisującym wartość momentu magnetycznego, $\mu = IS$, w odniesieniu do skręconej ramki z rys. 1. W tym celu obróćmy ramkę w naszym układzie współrzędnych o kąt α, wokół osi Y. Rzut boków ramki na płaszczyznę XY tworzy w ogólności trapez o podstawach $a \cdot \sin\alpha$ i $a \cdot \cos\alpha$ oraz wysokości b. Pole powierzchni tego trapezu, w funkcji kąta α, wynosi: $S(\alpha) = ab(\sin\alpha + \cos\alpha)/2$. Powierzchnia trapezu osiąga maximum, gdy $\alpha = \pi/4$ i wynosi $S_{\max} = \dfrac{ab\sqrt{2}}{2}$ (rzut boków w tym przypadku tworzy prostokąt). Jest to wartość, którą otrzymaliśmy w rezultacie przeprowadzonych wyżej drobiazgowych rachunków. Tak więc powierzchnia S wchodząca do wzoru na moment magnetyczny $\mu = IS$ stanowi maximum powierzchni rzutu rozważanej figury na płaszczyznę. Funkcja $f(\alpha) = (\sin\alpha + \cos\alpha)$ przedstawiona jest na rys. 3 w funkcji kąta α wyrażonego w stopniach.



Rys. 3. Funkcja $f(\alpha) = \sin\alpha + \cos\alpha$ osiąga maximum dla $\alpha = \pi/4$ i jej wartość w maximum wynosi: $f(\pi/4) = \sqrt{2}$