O wymiarze wielkości fizycznych (część 1)

Jerzy Karczmarczuk
Århus, Dania

Wstęp

Pojęcie wymiaru lub *miana* wielkości fizycznych, jak np. długości, momentu pędu, itp., zaistniało w sposób w miarę sformalizowany od roku 1822, od czasów Fouriera [1, 2], ale już wcześniej wiadomo było, że prawie wszystkie wielkości pomiarowe wymagają różnych od siebie jednostek miary, że niektóre są *ekstensywne*: dodają się jak masy składników układu złożonego, inne są *intensywne*, jak temperatura. Galileusz i Mersenne operowali wymiarami i jednostkami, a Descartes w roku 1644 suponował, że całkowita „ilość ruchu" we Wszechświecie jest stała. Potrafił mnożyć masę przez prędkość i zdawał sobie sprawę z umowności jednostek miary i z koniecznej dyscypliny w ich użyciu, aby operowanie liczbami wyrażającymi wielkości fizyczne miało sens i żeby można było mówić o prawach zachowania.

Teraz od dziecka operujemy wagami i odległościami, a już na początkowym etapie nauki fizyki poznajemy wymiar prędkości i przyspieszenia, później siły, ładunku elektrycznego, temperatury, itp. Dowiadujemy się jakie jednostki obowiązują w układzie SI [3, 4] i szybko przyzwyczajamy się do wymiarów i ich jednostek. Przyzwyczajenie wiąże się ze znieczuleniem. Pewnych pytań nie zadajemy. Co to *jest* długość? Nikt na to nie odpowie, nie definiujemy pojęcia przestrzeni ani czasu. Pomimo to, bez obawy dzielimy metr przez sekundę, aby otrzymać jednostkę prędkości. Ale czy my wiemy, co oznacza w tym kontekście, operacja dzielenia? Pytanie *co to jest metr* miało różne odpowiedzi: wielkość astronomiczna, wzorzec w Sèvres, wielkość atomowa (długość fali światła laserowego)... Od roku 1983 metr jest odległością, którą światło w próżni przemierza w 1/299 792 458 sekundy. Zwróćmy jednak uwagę, że odpowiedź, jakakolwiek, zawiera w sobie informację, że jest to jednostka długości, więc problem „o czym my mówimy?" pozostaje. Jednak w niniejszym tekście chcemy uniknąć wszelkich sporów doktrynalnych i filozoficznych.

Pewne aspekty jednostek wydają się oczywiste, np. każdy wie, że nie należy mieszać wartości podanych np.w stopach z długościami w centymetrach, co nie przeszkodziło zmarnować milionów dolarów na skutek katastrofy sondy Mars Climate Orbiter [5] wywołanej właśnie takim niespójnym oprogramowaniem...

Niniejszy, dwuczęściowy artykuł omawia szereg nieoczywistych problemów dotyczących sensu wielkości mianowanych i operacji na nich. Mimo sędziwego wieku tej dziedziny, fizycy (i metodologowie fizyki) nadal się spierają [6], a rozwój fizyki współczesnej sprawę tylko zaostrzył [7]. Zajmiemy się takimi kwestiami jak:

- *Analiza wymiarowa*, w jaki sposób zdyscyplinowane operowanie wielkościami mianowanymi pozwala nam unikać błędów we wzorach. Omówimy w przystępny sposób *algebraiczny* sens wielkości mianowanych i przedyskutujemy pokrótce ich użycie w programach komputerowych. Trochę miejsca poświęcimy problemowi miary kątowej, który mimo swojej banalności, potrafił wywołać sporo bałaganu.
- *Jednostki układu SI* [3, 4], podstawowe i pochodne. Zastanowimy się, jaki jest stosunek między protokołami pomiarowymi, a ustaleniami konwencjonalnymi. Nie mamy zamiaru omawiać dokładnie układu SI, ale zastanowienie się, dlaczego przyjęto takie jednostki, a nie inne, może być pożyteczne.
- *Wymiarowe stałe uniwersalne*, ich związek z konwersją jednostek. Poruszymy dość mętną kwestię „co właściwie zostało zmierzone". Nie mamy ambicji udzielić wyczerpującej odpowiedzi na to pytanie.
- *Znaczenie bezwymiarowych stałych w analizie układów fizycznych.* To jest szeroki temat, który dotyczy i tzw. niezmienniczości skalowania, i opisu układu zredukowanego, gdzie pojawiają się wielkości typu stałej Reynoldsa.

Wielkości wymiarowe i bezwymiarowe oraz ich sens pomiarowy

Intuicyjnie wszyscy wiemy, jaka jest różnica między „czystymi liczbami", jak 1, 3/8, czy π, a wielkościami posiadającymi miano. Te pierwsze są absolutne, $\pi = 3{,}14159265...$ niezależnie od własności fizycznych świata, który nas otacza i jedyne co się może zmienić, to notacja. Na pewno nie są to obiekty zależne od naszych jednostek miary. Ale nawet i tu można się pomylić i przesadzić z geometryczną interpretacją pewnych liczb, np. uczyć, że π to *jest* stosunek długości obwodu koła do jego średnicy, i tyle. Oczywiście geometria jest tu zbędna, wiemy, że 2π jest okresem funkcji trygonometrycznych, czy wykładniczej zespolonej: $\exp(ix)$. Funkcje te mają znane rozwinięcia w szereg i spełniają określone równania różniczkowe, nie ma tutaj żadnej dowolności. Przy takim, racjonalnym podejściu, w stwierdzeniu, że pełny kąt płaski zawiera 2π radianów, radian jako jednostka jest niepotrzebny i nie oznacza *niczego* (jest to jedynka). Tym niemniej, została ona „uprawomocniona" w układzie SI jako jednostka pomocnicza i tym samym nabrały prawa do istnienia i inne, jak stopnie czy rumby, i napotkamy zdania w rodzaju: „2π (radianów) to 360 stopni, albo 32 rumby". Pojęcie jednostki nie jest więc banalne... W czystej matematyce nikt, nigdy by nie wprowadził pojęcia „jednostki radian". Ale matematyka powstała przez destylację procedur pomiarowych, fizycznych i pojęcie kąta stało się dla nas dawno temu nieco zbliżone intuicyjnie do pojęcia długości. Możemy nawet skonstruować wzorzec radiana, albo stopnia (tyleż warty co „wzorzec tuzina"). Aby uniknąć nieporozumień, należy dobrze sprecyzować formalizm, którym operujemy, przyjąć całą arytmetykę, algebrę, analizę... Wtedy „jednostka stopnia" stanie się po prostu skrótem językowym liczby $\pi/180$, będziemy mogli nią operować tak, jak się operuje np. tuzinami, czy kopami, co nie neguje faktu, że kąty też są *mierzone*, mówi się o nich, więc nie ma powodu, aby SI ignorował ich istnienie. SI jest systemem pragmatycznym.

Przejdźmy do dyskusji prawdziwych wielkości mianowanych. Człowiek współczesny zdaje sobie sprawę, że jednostki pomiarowe, jak metr, paskal, itp. są konwencjonalne, dowolne. Żadna teoria fizyczna, która operuje wielkościami wymiarowymi, nie może zależeć od tych jednostek. Sekundy czy lata, teoria winna być taka sama, a wzory mogą się różnić jedynie notacją. Czy oznacza to, że można operować wzorami, w których nie ma żadnych jednostek pomiarowych? Odpowiedź na to pytanie jest zawikłana, z jednej strony mamy wspomnianą niezależność „prawdziwej fizyki" od umownych jednostek, z drugiej zaś wiemy, że wartości liczbowe siły, czy momentu pędu *zależą* od jednostek pomiaru, a bez danych doświadczalnych teorie są puste! Możemy więc się umówić, że pośrednikiem między konceptualną, uniwersalną teorią świata, a danymi doświadczalnymi, jest użyta przez nas notacja, która winna odpowiadać użytej matematyce, dawać się konfrontować z doświadczeniem i być społecznie akceptowalna (przede wszystkim w nauczaniu!).

Wzory będą w razie potrzeby zawierać *explicite* takie mnożniki, jak m/s dla prędkości, $\mathrm{m^2 \cdot kg \cdot s^{-2}}$ dla energii, itp. Mnożenia i dzielenia przez jednostki są intuicyjnie zrozumiałe i logicznie spójne. Przyzwyczailiśmy się, i to ma dobre strony, potrafimy szybko konwertować jednostki, potrafimy prawidłowo pisać programy komputerowe operujące liczbami interpretowanymi jako wielkości wymiarowe i opanowaliśmy skróty. Kontrola wymiarów pozwala nam uniknąć błędów we wzorach, zauważymy, że dodawanie odległości do czasu jest niespójne, nie wiemy jaki nadać sens takiemu wyrażeniu.

Co daje nam analiza wymiarowa

Techniki formalnego operowania wielkościami mianowanymi zwykle nazywa się analizą wymiarową [2, 8–10]. Narzuca ona szereg ograniczeń. Wiemy, iż nie należy np. dodawać masy do siły. Wzory winny być *jednorodne* względem potęg jednostek, co pozwoli np. uprościć $\mathrm{m \cdot kg \cdot s^{-2}}$ z obu stron równania Newtona $F = ma$. Jeśli jakiś wyprowadzony wzór okazuje się niejednorodny, jest to niewątpliwie skutek błędu. Dalej, wiemy, że argumentem x takich funkcji jak $\exp(x)$, czy $\sin(x)$ *musi* być wielkość bezwymiarowa, gdyż w rozwinięciu w szereg: $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots$ dodajemy do siebie różne potęgi. Analiza wymiarowa pozwala nam *konstruować* pewne wzory, np. wiemy, że ruch wahadła matematycznego: punktu o masie m [kg] na nitce o długości l [m] w polu ciążenia wyrażonym przyspieszeniem g $[\mathrm{m \cdot s^{-2}}]$, winno się dać opisać za pomocą tylko tych wielkości. Więc okres wahań musi się wyrażać zależnością $T \propto \sqrt{l/g}$, gdyż jest to jedyna multiplikatywna kombinacja tych wielkości, dająca wymiar czasu. Masa nie może się znaleźć w tym wzorze. Liczbowy współczynnik proporcjonalności jest dowolny. To uproszczenie masy jest oczywiście wynikiem faktu, że przyspieszenie ziemskie ma charakter *lokalnie* uniwersalny, że wszystkie masy spadają z tym samym przyspieszeniem. Weźmy teraz kulkę na sprężynie, dla której obowiązuje prawo Hooke'a dla siły: $F = kx$, gdzie x jest wychyleniem, a k [kg·s^{-2}] – stałą sprężystości. Pozwalamy jej drgać w polu przyciągania ziemskiego i próbujemy oszacować okres drgań. Problem zupełnie trywialny nie jest, np. czy długość sprężyny odgrywa jakąś rolę, czy nie? Jeśli jednak zauważymy – doświadczalnie – że przyspieszenie ziemskie jest nieistotne, wpływ długości sprężyny na okres musi być jakoś ukryty w stałej k, gdyż jedyną wielkością o wymiarze czasu będzie $\sqrt{m/k}$, długość nie może wystąpić w tym wzorze. Ponieważ okres drgań zależy jednak od długości sprężyny (z tego samego materiału), zasadne staje się pytanie jak k zależy od tej długości, jaka inna stała intensywna kryje się w środku. Rozważmy trzeci przykład, drgającej struny o długości l i o gęstości liniowej ρ [kg·m^{-1}]. Struna może być różnie napięta, a lokalne napięcie σ [kg·s^{-2}] określimy jako siłę na jednostkę długości. Struna drga z amplitudą A [m]. Stwierdzenie, że okres drgań będzie proporcjonalny do $\sqrt{\rho l/\sigma}$, nie wystarczy. Amplituda oraz długość pozwalają na skonstruowanie wielkości bezwymiarowej A/l, i wtedy okres, częstość, energia, itp. drgań, może zawierać dowolny czynnik $f(A/l)$, gdzie f jest nieznaną funkcją. Analiza wymiarowa nie powie nam nic o niej, ale stwierdzi, że jest to *jedyna* dowolna funkcja w opisie problemu. Oczywiście, jeśli mierzymy napięcie konkretnej struny jako siłę niezredukowaną do jednostki długości, stwierdzimy, że okres jest proporcjonalny do długości. Zauważymy ponadto zależność od gęstości masy i zrozumiemy, dlaczego basowe struny fortepianowe i gitarowe zawierają cienki rdzeń, wyznaczający sprężystość i otoczkę z miękkiego materiału (np. miedzi), która na napięcie nie wpływa, natomiast obciąża strunę.

Algebra wielkości wymiarowych i komputery

Mnożenie czy dzielenie metrów przez kilogramy ma charakter *formalny*. Jednostki we wzorach zachowują się jak „zmienne symboliczne", nieredukowalne; wyrażenie kg/m nie sprowadza się do żadnej innej postaci. Jednak matematyka jest spójna, m/m to jest jedynka, s·s zapiszemy jako s^2, itp. Czasami spotyka się twierdzenie, że matematycznie przestrzeń wielkości wymiarowych jest obiektem zwanym *torsorem* [11], który składa się z pewnych abstrakcyjnych nieredukowalnych pojęć, oraz grupy działań matematycznych nad nimi, spełniających znane własności. Są znane i inne torsory, np. punkty w przestrzeni: $\vec{x}$, nie powinny być nazywane wektorami! Można odjąć dwa punkty, dostaniemy wektor odległości między nimi, można dodać wektor do punktu, ale nie można dodać dwóch punktów... Punkt, element przestrzeni *afinicznej*, jest abstrakcją, tak jak długość, czy masa. W podobny sposób zachowuje się data kalendarzowa. W tych drugich torsorach nie ma sensu mówić o zerze (dla dodawania, nie o wektorze zerowym, tylko o „punkcie zerowym"). W torsorze mian nie ma jedności (względem mnożenia).

Możemy jednak skonstruować programy, które w sposób spójny i jednoznaczny operują wielkościami wymiarowymi, o ile nasz język programowania umożliwia definiowanie „prywatnej" arytmetyki, na dowolnych strukturach danych, które budujemy sami [12, 13]. Wyobraźmy sobie, że nasz program przedstawia wartości mianowanych wyrażeń arytmetycznych jako czwórki: `Q(x,n,p,q)`, gdzie `x` jest „właściwą" wartością liczbową, a `n,p,q`, są wykładnikami w mianie: $m^n \cdot kg^p \cdot s^q$. (Ograniczamy się do tych trzech, ale uogólnienie jest oczywiste).
Tak więc, prędkość światła to `Q(299792458,1,0,-1)`.
Dodawanie definiujemy jako:

`Q(x,n,p,q) + Q(y,n,p,q) = Q(x+y,n,p,q)`.

Program winien wykryć próbę niezgodności wykładników i zgłosić błąd. Mnożenie, to:

`Q(x,n,p,q) * Q(y,n1,p1,q1) = Q(x*y, n+n1, p+p1, q+q1)`,

pierwiastek, to:

`sqrt(Q(x,n,p,q)) = Q(sqrt(x),n/2,p/2,q/2)`, itp.

Wielkości niemianowane, to `Q(x,0,0,0)`. Tylko takie mogą się znaleźć jako argument sinusa, itp., w przeciwnym wypadku program zgłosi błąd.

Opieramy się na znanej aksjomatyce operacji algebraicznych i na niczym więcej. Odpowiedź na pytanie „czy istnieje pierwiastek z metra, i co to oznacza", odsyła pytającego do doświadczenia, aby sprawdził, czy takie wielkości się mierzy. Tym niemniej, istnieje różnica między potęgami wymiernymi, np. ½ i dowolnymi rzeczywistymi (przestępnymi), np. π, które we wzorach fizycznych się nie pojawiają, lecz temat jest zbyt skomplikowany, aby go tu omówić. Szereg pakietów programowania naukowego i inżynierskiego ma wbudowane możliwości operowania na liczbach mianowanych, upraszczania i konwersji jednostek. Wspomnimy tutaj system programowania algebraicznego Maple, oraz pakiet programowania wizualnego MathCad. Nie zawsze ich zachowanie odpowiada naszym potrzebom, np. Maple pozwoli nam dodać kilogramy do metrów, traktując wyrażenie czysto formalnie. Dopiero gdy zażądamy uproszczenia wzoru, sprowadzenia do wspólnych jednostek, wbudowane mechanizmy kontroli zgłoszą błąd. Wydaje się, że nic tu więcej nie ma do dodania... A jednak, nie tak dawno temu Huntley [9] zaproponował, aby w wielkościach wektorowych, np. odległościach, prędkościach, itp. przypisać poszczególnym składowym różne miana długości. Wydaje się to bezsensem, metry są metrami, wszystko jedno, czy chodzi o szerokość, czy głębokość. Fizyka jest niezmiennicza względem obrotów układu odniesienia, szerokość przejdzie w wysokość, co się stanie z jednostkami? A jednak pewien sens w tej procedurze jest, jeśli pomyśleć o niezmienniczości geometrycznej formuł. Nie chodzi tu o żadną rewolucję fizyczną, tylko o zwykły mechanizm kontroli wzorów. Normalnie nie spotkamy wyrażeń typu $v_x + v_y$. Ale mamy wyrażenia niezmiennicze, np. iloczyn skalarny $\vec{u}\cdot\vec{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$, co jest podobne, na pozór dostaniemy sumę o wymiarze $m^2_x + m^2_y + m^2_z$. Tym niemniej, we współczesnej geometrii odróżniamy wektory *kowariantne* i *kontrawariantne*, aby móc wykonać operację iloczynu skalarnego, oba wektory muszą należeć do różnych gatunków i ten drugi ma wymiary odwrotne. W przestrzeni euklidesowej tego nie widzimy, obliczamy bez problemów $\vec{v}^2 = \vec{v}\cdot\vec{v}$. To, co zostało ukryte, to istnienie implicite tensora metrycznego, którego składowe poprawiają wymiar, a który figuruje w euklidesowym iloczynie skalarnym jako mnożnik: $\vec{u}\cdot\vec{v} = g_{xx}u_x v_x + g_{yy}u_y v_y + {}$ $+ g_{zz}u_z v_z$, niewidoczny, gdyż euklidesowe składowe są numerycznie równe jedności. Rozszerzenie proponuje oczywiście szereg ustaleń wymiarów dla wielkości macierzowych, czy tensorowych w fizyce. Huntley zauważył, że pewnym mechanizmem kontroli spójności może być także przypisanie innych wymiarów masie inercyjnej (z wzoru Newtona) i masie określającej ilość materii.

Omówione zagadnienie jest raczej anegdotyczne, propozycja nie została zaakceptowana, gdyż notacja staje się kłopotliwa. Tym niemniej, nie można wykluczyć, że pewne nowe pakiety automatycznego programowania uwzględnią ją, może zmodyfikowaną [14] jako mechanizm kontroli błędów w czasie kompilacji programów.

Układ SI

Nie zamierzamy go omawiać dokładnie, materiały dostępne w Internecie i w literaturze są bardzo bogate. W systemie SI mamy oczywiście metr, kilogram i sekundę jako jednostki bazowe. W naszym rozumieniu fizyki, pomiary długości, czasu i masy są od siebie niezależne. Jednak ich definicje są od siebie koncepcyjnie niezwykle różne, nie ma żadnej symetrii między nimi.

Jedna sekunda, to 9 192 631 770 okresów drgań fali elektromagnetycznej odpowiadającej przejściu między poziomami nadsubtelnego rozszczepienia stanu podstawowego cezu 133 w temperaturze zera bezwzględnego. Jest to definicja uniwersalna, którą możemy przekazać na odległość np. naszemu kuzynowi z mgławicy Andromedy, który nie ma dostępu do naszych obiektów materialnych. Jest ona oparta o konkretny protokół pomiarowy, wiadomo jak mierzyć częstość fali radiowej.

Metr moglibyśmy zdefiniować podobnie, jako wielokrotność pewnej atomowej długości fali i tak też było (pewne promieniowanie kryptonu 86). Zdecydowano jednak inaczej i, jak wspomnieliśmy, metr będąc jednostką podstawową, posiada definicję opartą na sekundzie. Jest to odległość, którą światło w próżni przemierza w 1/299 792 458 sekundy. Stała liczbowa w tym wzorze jest *dokładna*. Definicja metra wiąże ze sobą jednostkę długości z *dokładną* wartością liczbową prędkości światła i należy zrozumieć wagę i paradoksalność tego sformułowania!

Wtedy, gdy dysponowaliśmy inną definicją metra, np. opartą na wzorcu z Sèvres, dokonaliśmy pomiaru prędkości światła i odpowiednie liczby znalazły się w tablicach. Następnie odcięliśmy się od procedur pomiarowych. Żaden nowy pomiar prędkości światła już jej nie może zmienić, wszelkie zmiany spowodują tylko przeskalowanie metra! Paradoks wiąże się z następującym pytaniem: czyżby więc prędkość światła była wielkością czysto konwencjonalną, a nie pomiarową? Czyżby nam nic nie mówiła o świecie, gdyż została ustalona przez komitet? Oczywiście jest to nonsens. My *musieliśmy* wiedzieć, co to jest metr całkowicie niezależnie od prędkości światła i pomiar tej prędkości był rzetelną procedurą doświadczalną. Ponieważ jednak c jest uznane za uniwersalną stałą Wszechświata, fundamentalną dla wszystkich wyobrażalnych (na razie) teorii fizycznych, metodologicznie „zdrowiej" wydało się oprzeć jednostkę długości o tę stałą, niż wyrażać prędkość w sposób przybliżony poprzez jednostki czysto umowne, oparte o wzorzec, czy o rozmiar Ziemi.

Nie powiemy kuzynowi z Andromedy, że nie musi zmierzyć c. Zrobi to przy użyciu swoich jednostek długości, i wtedy się dowie, ile w tych jednostkach wynosi metr, bez żadnych pomiarów. A prędkość światła pozostając ważną stałą Przyrody, operacyjnie stanie się zwykłym współczynnikiem konwersji jednostek, pozwalającym przeliczać dokładnie sekundy na metry.

Jedyną wielkością, która w systemie SI pozostała zdefiniowana poprzez wzorzec (IPK, *International Prototype Kilogram*, irydowo-platynowy, przechowywany w Sèvres) pozostał kilogram. Z definicji kilograma poprzez litr wody zrezygnowano, za dużo problemów z warunkami pomiaru, a i tak IPK jest niestabilny i kilkadziesiąt kopii wzorca na całym świecie wykazuje zmienne w czasie odchylenie wagi (rzędu mikrogramów na rok). Procedura pomiarowa, która określa sposoby czyszczenia wzorca i warunki środowiskowe, jest niezwykle drobiazgowa. Aktualnie rozwija się tzw. Projekt Avogadro [15], zbiorowa inicjatywa kilku krajów, mająca zastąpić wzorzec z Sèvres bardzo dokładną kulą z monokryształu krzemu 28 o prawie dokładnie określonej liczbie atomów. Oczywiście, wiedząc ile atomów przypada na kilogram, kuzyn z Andromedy będzie mógł odtworzyć kilogram bez potrzeby dysponowania naszym wzorcem. Możliwym rozwiązaniem uniwersalnym byłoby ustalenie dokładnej wartości stałej Plancka $h = 6{,}62\ 606\ 896 \times 10^{-34}$ J·s i zdefiniowanie kilograma jako masy odpowiadającej energii fotonów o sumarycznej częstości

1,356 392 733 × 10^{50} Hz. Wtedy, podobnie jak z metrem, wszelkie zmiany doświadczalne wielkości *h* pójdą w przedefiniowanie kilograma. Ta propozycja, aczkolwiek koncepcyjnie ciekawa, doświadczalnie wydaje się na razie dość niepraktyczna. Zarówno do liczby Avogadra, jak i do stałej Plancka jeszcze wrócimy. Przejdźmy do jednostek elektrycznych.

W układzie CGS (lub MKS), popularnym w czasie, gdy autor uczęszczał do szkoły, wielkości związane z elektrycznością miały miana wyrażające się przez wymienione trzy (kilogram, metr i sekunda), Prawo Coulomba zapisywaliśmy jako $F = \kappa \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}$, gdzie wartość $\kappa = 1/(4\pi\varepsilon)$, a ε jest przenikalnością dielektryczną. Wartość tę dla próżni przyjęto za 1. Wtedy ładunek ma wymiar

$$m^2 \cdot kg^{-1/2} \cdot s^{-1},$$

(stała bezwymiarowa 1/4π, która mnoży prawą stronę, nic nie zmienia; ta stała zresztą w innych układach była przyjmowana jako równa jedności).

Ale w SI jednostka natężenia prądu, amper, jest podstawowa, nieredukowalna, jednostka ładunku kulomb to jest amper razy sekunda. Nie da się go sprowadzić do masy, długości i czasu. To stwierdzenie może mocno uderzyć: jak to, to dane liczbowe dotyczące elektryczności sprzed kilkudziesięciu lat nie mają sensu? Jaki jest „naprawdę" wymiar ładunku? Oczywiście nic się nie zmieniło, za wyjątkiem *konwencji* dotyczących jednostek. Dla przenikalności próżni tablice podają wymiarową wartość liczbową: ε_0 = 8,854 187 817 × 10^{-12} F/m. Mamy tu nową jednostkę pojemności: farad, który jest równy F = C^2/J, gdzie C jest kulombem. (Albo: F = $A^2 \cdot m^{-2} \cdot kg^{-1} \cdot s^4$). Nie ma żadnej redukcji miana do m–kg–s, natomiast jednostka ładunku i ε_0 zwane niegdyś „stałą dielektryczną próżni" a współcześnie po prostu „stałą elektryczną", stają się ze sobą liczbowo związane. Ale po co my w ogóle wprowadzamy trudną do zapamiętania wartość liczbową dotyczącą próżni? Przecież nie będziemy sugerować, że tam jest jakiś „eter" o istotnych własnościach fizycznych?

Odpowiedź jest związana z rozsądną zasadą metodologiczną dającą się rozpoznać w pracach BIPM [4]. Definiowane jednostki winne być oparte o spójne protokoły pomiarowe wyrażane prostym językiem i używające jednostek już znanych. Jeśli jednostka jest wtórna i nie wymaga pomiarów, jej definicja winna być prosta i używać *dokładnych* liczb wiążących ją z innymi. Jeśli teoria opisująca mierzone zjawiska kojarzy ze sobą różne wielkości, o różnych wymiarach, komplikacja numeryczna zostaje raczej ukryta w stałych współczynnikach proporcjonalności, niż w specyfikacjach jednostek. I tak, amper jest natężeniem prądu, który płynąc w dwóch nieskończonych, równoległych przewodnikach o znikomej średnicy, umieszczonych w próżni i odległych od siebie o metr, generuje między nimi siłę 2 × 10^{-7} N na metr długości. Proste i łatwe do zapamiętania.

Ten pomiar dotyczy istotnie innej fizyki, niż czysta mechanika, ale jest z nią związany. Więc skoro jednostkę ładunku definiujemy poprzez C = A·s, stała elektryczna próżni staje się liczbowo konieczna, ale nie jest to żadna poważna „stała uniwersalna Przyrody", tylko czynnik normalizacyjny związany z konwencjonalnie przyjętą „prostą" liczbą 2×10^{-7} i użyciem „po prostu" metrów w powyższej definicji.

Tylko, że teraz powiedzieliśmy półprawdę... Jeśli z maxwellowskiej elektrodynamiki zrekonstruujemy prawo Ampera, czy Biota-Savarta, zauważymy, że *z konieczności* pojawi się we wzorach prędkość światła, jako jedyna stała uniwersalna. Zostanie ona związana we wzorach z innymi współczynnikami i między innymi z przenikalnością magnetyczną próżni, μ_0. Ponieważ teoria wymaga spełnienia zależności $\mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot c^2 = 1$, przyjęta konwencja odnośnie ładunku, wymaga, aby μ_0 było równe $4\pi \times 10^{-7}$ N·A^{-2}, co banalizuje trochę tę wartość liczbową, trudno się spodziewać, aby taka liczba miała jakieś poważne znaczenie... Dobrze jest więc sobie przyswoić już na poziomie szkoły średniej, że tak „ścisła" nauka jak fizyka, jest oparta o sporą ilość konwencji, które ingerują nawet w wartości liczbowe[1] i wymiary wielkości fizycznych. Dobrze jest także zauważyć, że system CGS powstał jeszcze w XIX wieku i że Giorgi zaproponował wprowadzenie jednostki elektrycznej jako niezależnej już w 1901 roku, aczkolwiek międzynarodowe instancje usankcjonowały system MKSA dopiero w roku 1946.

Powoli zaczynamy rozumieć, dlaczego SI zawiera tyle jednostek, po prostu mamy różne protokoły doświadczalne i różne teorie, niekoniecznie fundamentalne! Oprócz m–kg–s–A mamy jeszcze jednostkę temperatury – kelwina, jednostkę światłości – kandelę, a także mol – jednostkę ilości materii.

Pojawiają się nowe stałe

Wiadomo, że „fizycy mikroskopowi" często wyrażają temperaturę w jednostkach energetycznych, np. w elektronowoltach. Pojęcie stopnia jest teoretycznie zbędne. Ale temperaturę mierzymy od setek lat i ustaliliśmy jednostki niezależnie od termodynamiki teoretycznej. Najpierw mieliśmy skalę Celsjusza opartą na doświadczalnych pomiarach własności wody. Jej wadą jest między innymi jej względność, określamy właściwie tylko różnicę temperatur, a skala absolutna, z zerem w punkcie krzepnięcia wody, jest okropnie nieuniwersalna.

Od czasów Celsjusza (1701–1744) dowiedzieliśmy się między innymi, że istnieje zero absolutne. Tak więc dzisiaj jednostką temperatury jest kelwin, zdefiniowany jako ułamek 1/273,16 temperatury punktu potrójnego wody. Dokładniejsze pomiary własności wody nie ruszą już tej liczby. Nie będziemy dysku-

[1] To zdanie należy dobrze zrozumieć, stwierdzenie, że *mierzone* wielkości zależą od „widzimisię" byłoby oczywiście nonsensowne. Przykładem jego zasadności jest ustalona *dokładnie* prędkość światła i konwencja, że pomiar ustala jednostki.

tować więcej tej jednostki, natomiast interesuje nas jak się ma miano temperatury do innych jednostek, a konkretnie do mechaniki. Potrzebne nam będą wzory z termodynamiki, np. równanie Clapeyrona: $PV = nRT$. Po lewej mamy wielkość o wymiarze energii, po prawej – temperaturę, więc musimy wprowadzić nietrywialną stałą gazową: $R = 8{,}314$ J/(mol·K). Bardziej podstawową niż R jest stała Boltzmanna k_B, która pozwala konwertować jednostki temperaturowe i energetyczne, bez angażowania ilości materii: $k_B = 1{,}3\,806\,505 \times 10^{-23}$ J/K. Czy dobrze rozumiemy sens tej stałej? Czy dotyczy ona fizyki, czy jest czystą konwencją?

Odpowiedź narzuca się sama. Jest to po prostu zwykły przelicznik jednostek, nie ma żadnej wielkości fizycznej o takim wymiarze. Teoretycznie więc można zdefiniować jednostkę K jako dżul podzielony przez (ustaloną raz na zawsze) stałą Boltzmanna, tylko na razie nikogo to nie uszczęśliwi. Przejdźmy z termodynamiki fenomenologicznej do fizyki statystycznej, która jest rekonstrukcją makrofizyki z własności mikroskopowych, z takimi stałymi, parametrami i jednostkami, jakie mamy w danym modelu mikroskopowym: masy, prędkości, ładunki, itp. *Musimy* zainwestować konkretny model dynamiczny, klasyczny lub kwantowy, do rozważań statystycznych i jedynym nowym pojęciem, jakim operujemy, jest prawdopodobieństwo, co pozwala zastosować do fizyki neutralną, matematyczną teorię miary. Więc żadne nowe stałe ani nowe jednostki nie powinny się już pojawić. Uniwersalne wzory fizyki statystycznej zawierają jedynie stałą Boltzmanna, gdyż energia jest tam niezbędna, a temperatura pojawia się jako czynnik Lagrange'a, albo jako stała wymiarowa pozwalająca operować wzorem Gibbsa na prawdopodobieństwo stanu s w funkcji jego energii $E(s)$: $p(s) = \exp\left(-\frac{E(s)}{k_B T}\right)$.

Jak już jesteśmy przy termodynamice, wypada zauważyć jedną „krzyczącą niesprawiedliwość". Jest pewna wielkość fizyczna, która ma swoją specyficzną metodykę pomiarową i którą wszyscy znamy. Jest ona równoważna energii, ale nie jest intuicyjnie z nią tożsama. Każdy dorosły wymienia nazwę odpowiedniej jednostki dość często, czasami kilka razy dziennie, a jednostka ta nigdy nie znalazła się w SI. Chodzi o ciepło i o jednostkę: kalorię. Jedna kaloria dla fizyka, to po prostu 4,184 J, nic więcej. Dlaczego ta jednostka została zlekceważona? Definiuje się ją jako ciepło potrzebne, aby podgrzać 1 gram wody o jeden stopień i to zależy od temperatury początkowej. Jest to więc definicja daleka od uniwersalności, mająca kilka wariantów czysto konwencjonalnych. Nie warto jej „nobilitować" przez umieszczenie w systemie SI, nawet jeśli się przydaje w kuracjach odchudzających...

Z kandelą nie ma dużo problemów. Jednostka ta jest zbędna, możemy ją sprowadzić do mocy emitowanej w jednostkę kąta bryłowego, ale światło to jest światło, odbieramy je inaczej niż energię mechaniczną. Mamy inne protokoły pomiarowe, więc definiujemy kandelę *ab ovo*, jest to nowa jednostka, *światłości*, określająca znormalizowane źródło, emitujące promieniowanie monochromatyczne o częstości 540 × 10^{12} Hz, o natężeniu kierunkowym (mocy) 1/683 watów na steradian[2].

Ten sektor fizyki nie doczekał się żadnych stałych „uniwersalnych", nie są one potrzebne, gdyż niewielu ludzi potrzebuje na co dzień mierzyć światłość obiektów. Zresztą nie ma tutaj nowej teorii podstawowej, więc żadnej stałej naprawdę uniwersalnej być nie może. Nie można jednak wykluczyć, że sytuacja ulegnie pewnej zmianie (wprowadzi się inne *konwencje*), gdyż coraz większą rolę w symulowaniu świata wizualnego, np. w efektach specjalnych w filmach, odgrywają techniki komputerowe. Precyzyjne określenie własności podstawowych: spektralnych, energetycznych, statystycznych itp. światła i jego źródeł, z *perspektywy odbioru ludzkiego oka*, stało się niezbędne, organizacja CIE (*Commission Internationale d'Eclairage*) zajmuje się tym od osiemdziesięciu lat. Co to jest *barwa*? Czy można przypisać jej jakieś miano? Ten temat prosi się o osobny artykuł.

Reasumując: wielość jednostek wymiarowych wiąże się ze specyfiką pewnych pomiarów, a także z naszymi ludzkimi przyzwyczajeniami. Dla „czystej fizyki" nie ma to znaczenia.

Czy każda jednostka ma wymiar?

Poprzedni rozdział pomija pewną „wątpliwą" jednostkę podstawową: mol. Możemy się zgodzić, że taka wielkość jak długość, natężenie prądu, czy światłość, to jest „coś" nieredukowalnego do innych, gdyż pomiar tych wielkości jest specyficzny, a jeśli je redukujemy do innych parametrów, to wyskakuje nam jak chochlik jakaś stała uniwersalna. Ale ilość materii? To wygląda jak zwykła liczba bezwymiarowa, podobnie jak 10, czy π. Jeden mol to 6,0 221 415 × 10^{23} cząstek. To jest po prostu N_a, bezwymiarowa liczba Avogadra (1776–1856).

I teraz mamy konflikt z poprzednimi rozważaniami: *bezwymiarowa stała uniwersalna*? Jeśli te stałe, niezależnie od podstawowej roli w formułowaniu teorii, operacyjnie dotyczą konwersji jednostek, to tutaj mamy bezsens. Zastanówmy się więc jak przekazać informację o tym sektorze systemu SI naszemu kuzynowi z Andromedy. Od razu zauważymy, że definicja N_a się zapętla, zawiera w sobie odnośnik do mola. Więc stwierdzamy, że ta stała nie ma w sobie nic uniwersalnego, mogłaby być dowolna (z odpowiednim przedefiniowaniem innych wielkości). Kuzyn zapisze: „Ziemianie lubią pewną dziwną liczbę, 6,0 221 415 × 10^{23}. Dlaczego akurat tyle?"

Prawo Avogadra zawiera w sobie dwa elementy. Po pierwsze, samo prawo, uniwersalne: w tych samych warunkach fizycznych, w równych objętościach

[2] Dawniejsza definicja, jako źródła równoważnego 1/600 000 m^2 ciała doskonale czarnego, w temperaturze krzepnięcia platyny, jest po prostu dość niewygodna.

różnych gazów (zbliżonych do doskonałych) znajduje się taka sama liczba molekuł. Litr wodoru i litr tlenu zawierają z grubsza tyle samo cząsteczek, więc operowanie ilością gazu wyrażoną przez liczbę cząsteczek ma pewien głębszy sens, nawet w innej galaktyce. Po drugie, i tu jest istota zagadnienia, Avogadro interesował się wyznaczaniem mas atomowych i cząsteczkowych, wiedział, że wodór (molekularny) jest 6 razy lżejszy od węgla i dysponował całym bagażem fizyki swoich czasów, w szczególności wielkościami wymiarowymi, jak np. gram. Cóż więc dziwnego, że mol został zdefiniowany jako liczba gramów odpowiadająca względnej masie atomowej, w stosunku do najlżejszej substancji, tj. 2 g dla wodoru (H_2), 12 g dla węgla (C), itp.? Było to o tyle uniwersalne, że niezależne od właściwej masy cząsteczek, od jednostki nazwanej później daltonem i równej $1{,}66\,054 \times 10^{-27}$ kg, 1/12 masy atomu węgla. 1 mol gazu to ok. 22,4 litra, niezależnie od gazu. Tak więc odpowiedź kuzynowi brzmi, że my lubimy pojęcie grama.

Podsumowanie

Temat będzie kontynuowany w drugiej części artykułu. Omówimy niezmiernie interesujące dla fizyka zagadnienie niezmienniczości skalowania, które odgrywa fundamentalną rolę w teorii przejść fazowych i w fizyce fundamentalnej, a które zawiera istotne własności zmiennych wymiarowych. Pominęliśmy dyskusję wielu bezwymiarowych liczb w fizyce np. stałej Reynoldsa, które wydają się mieć olbrzymie znaczenie, mimo, iż nie są fundamentalne.

Rozpoczęliśmy temat, który kwalifikuje się na głębszą dyskusję. Relacja między wielkościami wymiarowymi i niemianowanymi, dotyczącymi naszego życia codziennego jest zdradliwa. Każdy się zgodzi, że *cena* wymaga jednostek, jest inna w złotówkach, euro, koronach... Ale co to jest „wymiar pieniądza”? Ma to coś wspólnego z wymiarami fizycznymi? A liczbowa wartość „mocy magicznej” w grach komputerowych typu Fantasy? Można ją przeliczać na odporność na strzały wroga, odległość lub prędkość teleportacji, itp.

Czytelnik, który teraz się żachnie i powie: „no, to jest dopiero czysta konwencja, do fizyki tu daleko!”, nie musi mieć racji. Jeśli jakaś waluta ma parytet w złocie, to można – umownie, ale obiektywnie – przypisać określonej liczbie dukatów pewną masę. Z kolei w zamkniętym świecie, gdzie nie ma żadnych innych walut poza jedyną oficjalną, cena staje się czystą liczbą, gdyż nie ma jednostki z czym porównać (a bywało tak, że nie dało się jej wymienić na żaden towar...). A w magii mamy zarówno pewne „protokoły pomiarowe”, jak i „teorię”. Zauważmy, ile książek musiał przeczytać biedny Harry P.

Daleko do fizyki? A może nie, może w ekstremalnych warunkach Big-Bangu, gdy nie było żadnych znanych cząstek, świat był opisywany przez teorię, w które wszystkie wielkości należało traktować jak bezwymiarowe, albo zawierające miano jakiejś kompletnie nieznanej wielkości fizycznej, którą odkryjemy dopiero w przyszłości? Spekulacji na ten temat jest mnóstwo, jak zawsze, gdy nie ma nowych, istotnych danych doświadczalnych i różnica między teorią, a zwykłą gimnastyką umysłową się zaciera. Polecamy fascynującą dyskusję [7] dostępną w Internecie.

Literatura

[1] J. Fourier, *Théorie analytique de la chaleur*, Firmin-Didot, Paryż, 1822.
[2] E. Buckingham, *On physically similar systems; illustrations of the use of dimensional equations*, Phys. Rev. 4, 1914, 345–376.
[3] National Institute of Standards and Technology, URL: http://physics.nist.gov/cuu/Units/index.html
[4] Bureau International des Poids et Mesures, URL: http://www.bipm.org/
[5] CNN, rok 1999. URL: http://www.cnn.com/TECH/space/9909/30/mars.metric/index.html
[6] G.D. Yarnold, *Note on electric and magnetic dimensions*, Proc. Phys. Soc. 54, 1942, 46–50, URL: http://www.iop.org/EJ/article/0959-5309/54/1/305/prv54i1p46.pdf?request-id=mGznJkLW3BG581T92wi7Kg
[7] M.J. Duff, L.B. Okun i G. Veneziano, *Trialogue on the number of fundamental constants*, JHEP 0203, 023 (2002), URL: http://arxiv.org/PS_cache/physics/pdf/0110/0110060v3.pdf.
[8] J.W.S. Rayleigh. *The principle of similitude*. Nature, 95(66), s. 591 i 644, 1915.
[9] G.I. Barenblatt, *Dimensional Analysis*, Gordon and Breach, 1987.
[10] H.E. Huntley. *Dimensional Analysis*, Dover, (1967).
[11] J. Baez, URL: http://math.ucr.edu/home/baez/torsors.html
[12] G. Baldwin, *Implementation of Physical Units*, SIGPLAN Notices 22, 1987, 45–50.
[13] M. Wand, P.M. O'Keefe, *Automatic Dimensional Inference*, w: *Computational Logic*, MIT Press, 1991, 479–486.
[14] D. Siano, *Orientational Analysis – A Supplement to Dimensional Analysis*, J. Franklin Institute (320), 1985.
[15] Australian Centre for Precision Optics, URL: http://www.acpo.csiro.au/avogadro.htm