Znikające grosze i rozkład Poissona

Paweł F. Góra
Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej UJ

Narodowy Bank Polski przymierza się do projektu wycofania z obiegu monet jedno- i dwugroszowych. Są kosztowne w produkcji (wybicie monety jednogroszowej kosztuje ponoć kilkadziesiąt groszy) i dość uciążliwe w użyciu (kłopoty z wydawaniem reszty!), tak dla sklepów, jak i dla klientów. Monetą obiegową o najmniejszym nominale byłoby 5 gr. Plan nie zakłada automatycznego zaokrąglania cen: zaokrąglana byłaby tylko końcowa płatność w kasie, dokonywana gotówką. Przy płatności kartą naliczana byłaby kwota niezaokrąglona. Podobnie postąpiło już wiele krajów (na przykład Australia, Czechy, Holandia, Szwecja, Węgry) i bardzo sobie to chwalą.

Jak miałoby to działać? Kwoty z cyfrą groszy 1, 2, 6, 7 byłyby zaokrąglane w dół do pełnych 5 gr, kwoty kończące się na 3, 4, 8, 9 byłyby zaokrąglane w górę. Na przykład 17,62 zł zaokrąglono by do 17,60 zł, ale 18,24 zł zaokrąglono by do 18,25 zł. Podobnie 25,69 zł zaokrąglono by do 25,70 zł. I tak dalej. Widać, że statystycznie byłoby tyle samo zaokrągleń w dół, co i w górę, przynajmniej na pierwszy rzut oka. Na pojedynczej transakcji (płatności w kasie) zysk lub strata nigdy nie przekroczą 2 gr.

Jednak handlowcy protestują, twierdząc, że „musieliby" zaokrąglić ceny i nie mogliby już sprzedawać towarów z końcówką 99 gr, na przykład po 14,99 zł. Klienci podobno interpretują taką cenę jako „14 z hakiem" i *wydaje* im się to znacznie bardziej atrakcyjne niż 15 zł, a więc chętniej taki towar kupują. Powtórzmy jeszcze raz: Plan Narodowego Banku Polskiego nie zakłada obowiązkowego zaokrąglania cen. Zaokrąglić – i to wyłącznie przy płatności gotówką – trzeba będzie dopiero końcową kwotę, a to się powinno uśrednić. Dla przykładu, chcemy kupić kilka batoników (i tylko batoników, nic więcej) po 1,99 zł sztuka. Jeśli kupimy jeden, będziemy musieli po zaokrągleniu zapłacić 2,00 zł – stracimy 1 gr. Jeśli kupimy dwa, zapłacimy nie 3,98 zł, ale 4,00 zł – stracimy 2 gr. Ale jeśli kupimy trzy batoniki, zapłacimy nie 5,97 zł, ale 5,95 zł – tym razem zarobimy 2 gr.

Także niektórzy klienci protestują przeciwko planowanym zmianom, upatrując w tym okazji do nienależnych zysków sklepów przy niekorzystnych dla klientów zaokrągleniach. Czy obawy te są uzasadnione? Innymi słowy, ile klienci mogą stracić (lub zarobić!) na zaokrągleniach płatności?

Żeby znaleźć odpowiedź na takie pytanie, fizyk ucieka się do symulacji. Symulacje przeprowadza się zawsze przy pewnych założeniach. Co przyjąć w tym wypadku? Duże sklepy oferują wiele towarów z końcówką ceny 9 gr. Klient za każdym razem wybiera pewną przypadkową liczbę tych produktów, które składać się będą na jedną płatność końcową, podlegającą zaokrągleniu. Zaraz, przypadkową, czyli jaką? Mówiąc ściśle, z jakiego rozkładu prawdopodobieństwa pochodzić będzie liczba produktów o końcówce ceny 9 gr, którą klient jednorazowo umieści w swoim koszyku? Otóż sądzę, że będzie to liczba losowa o rozkładzie Poissona.

Rozważmy pewną nieskończoną rodzinę zbiorów, które są parami rozłączne. Mogą to być odcinki czasu, wielokąty na płaszczyźnie, koszyki różnych klientów, właściwie wszystko jedno, co. W zbiorach tych umieszczamy losowo pewne elementy, przy czym domagamy się, aby w każdym była całkowita i nieujemna liczba elementów oraz żeby liczba elementów w różnych zbiorach była statystycznie niezależna. Można udowodnić [1], że te trzy wymagania – nieprzecinanie się zbiorów, liczba umieszczanych w nich elementów musi być liczbą całkowitą nieujemną, oraz statystyczna niezależność – wystarcza do tego, żeby liczba elementów w poszczególnych zbiorach zadana była rozkładem Poissona.

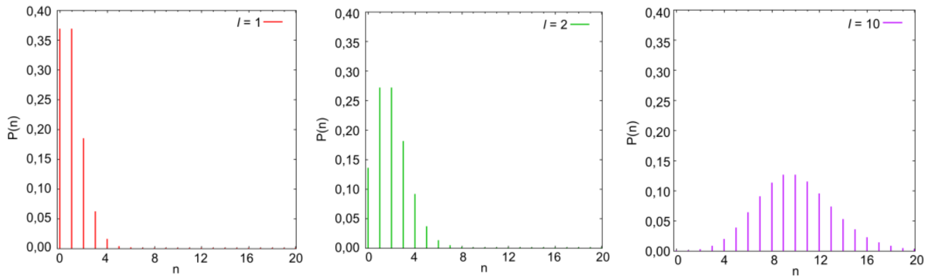
Jeśli mamy substancję promieniotwórczą, zawierającą wiele atomów promieniotwórczego pierwiastka, liczba rozpadów promieniotwórczych zachodzących w kolejnych przedziałach czasu (na przykład w kolejnych sekundach) dana jest rozkładem Poissona. Podobnie za pomocą rozkładu Poissona opisujemy liczbę gwiazd widocznych w różnych obszarach nieboskłonu lub też liczbę ziarenek piasku naniesionych przez wiatr na poszczególne poletka.

Rozkład Poissona – to znaczy prawdopodobieństwo, że w badanym zbiorze znajdzie się n elementów – dany jest wzorem

$$P(n) = \frac{l^n}{n!} e^{-l} .$$

Ma on jeden parametr, l, równy wartości średniej (oczekiwanej) tego rozkładu:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot P(n) = l .$$



Rysunek przedstawia rozkłady Poissona dla *l* równego, odpowiednio, 1, 2 oraz 10.

Parametr *l* nie musi być liczbą całkowitą. Warto zauważyć, że rozkład Poissona jest dosyć szeroki: jeśli *l* jest całkowite, prawdopodobieństwa że we wskazanym zbiorze jest *l*–1 lub *l*+1 elementów mogą być niewiele mniejsze od prawdopodobieństwa, że elementów jest dokładnie *l*, a w dostatecznie dużej próbce wystąpią też zbiory, w których liczba elementów będzie znacząco różnić się od wartości oczekiwanej *l*. Zauważmy, że dla małych *l* rozkład Poissona jest też wyraźnie niesymetryczny.

Zmienne losowe o rozkładzie Poissona można generować na komputerze za pomocą następującego algorytmu [2]:

P = -1, S = 1,0, q = exp(-l)
While S > q
    *Generuj U o rozkładzie U(0,1), S=S*U, P=P+1*
Return P

W powyższym algorytmie *U(0,1)* oznacza liczbę o rozkładzie jednorodnym na przedziale (0,1). Do jej wygenerowania można użyć generatora wbudowanego w język programowania, ale można też czegoś bardziej wyrafinowanego. Na przykład ja zawsze używam generatora Mersenne Twister [3].

Jesteśmy zatem gotowi do przeprowadzenia symulacji. Aby uczynić ją nieco bardziej realistyczną, zauważmy, że końcówki groszowe, oprócz „promocyjnych” cen typu 14,99, pojawiają się także przy zakupach „na wagę”. W tym ostatnim przypadku załóżmy, że rozkład ostatniej cyfry groszy (0,1,...,9) jest równomierny. Mamy więc *N* klientów (w symulacji przyjąłem *N* = 1024), z których każdy kupuje *średnio l* produktów o „promocyjnych” końcówkach 99 gr oraz jakieś towary „na wagę”. Aby uzyskać bardziej wiarygodne statystycznie wyniki, załóżmy, że każdy z klientów odbył *M* = 32 wizyty w sklepie. (Nie jest ważne, ile stracimy lub zyskamy na pojedynczej operacji, ważne jest, jak na tym wyjdziemy długoterminowo.) Wyniki symulacji przedstawia poniższa tabela:

l	średni zysk klienta (zł)	średni zysk sklepu (zł)
1	–0,14	146,48
2	–0,09	92,54
3	–0,01	13,75
4	0,02	–15,90
5	0,01	–13,06
6	0.00	–3,04
7	0,00	1,23
8	0,00	1,60
9	0,00	0,10
10	0,00	–0,58

Jak widzimy, jeśli *średnio* kupujemy tylko jeden lub dwa artykuły o „promocyjnych" końcówkach cen, możemy na tym po wielu transakcjach stracić kilka- kilkanaście groszy, zaś obsługujący wielu klientów sklep na tym zarabia. Jeśli kupujemy więcej artykułów o „promocyjnych" końcówkach cen, wychodzimy na tym na zero, a zyski/straty sklepu też stają się nieistotne. Myślę, że ta symulacja przekonuje, iż obawy przed straszliwymi stratami, jakie poniosą klienci, jak i nieuzasadnionymi zyskami sklepów, jakie miałyby wyniknąć z wycofania monet o nominałach 1 i 2 gr, są nieuzasadnione. Podobne wnioski płyną z doświadczenia krajów, które już wprowadziły analogiczne zmiany.

Na wycofaniu monet o najniższych nominałach zarobi natomiast Narodowy Bank Polski, a więc my wszyscy (NBP całe swoje zyski odprowadza do budżetu państwa), nasze portmonetki staną się dosłownie lżejsze, zniknie też uciążliwa konieczność szukania i liczenia drobniaków przy płaceniu gotówką. Zdecydujmy się zrobić ten krok!

Bibliografia

[1] Kingman J.F. (1993). *Poisson Processes.* Oxford: Oxford University Press.
[2] Matsumoto M., Nishimura T. (1988). Mersenne twister: a 623-dimensionally equidistributed uniform pseudo-random number generator. *ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation 8 (1)*, pp. 3–30.
[3] Wieczorkowski R., Zieliński R. (1997). *Komputerowe generatory liczb losowych.* Warszawa: WNT.