

Jak to drzewiej bywało

Obserwujemy, jak na naszych oczach stary patriarchalny porządek z elementami feudalizmu odchodzi w bólach do lamusa. Ten porządek przez długie stulecia trzymał się dobrze. Oczywiście, że panował również w nauce w XIX i XX wieku – na uczelniach i w ośrodkach badawczych. Miewał czasami dość nieładne oblicze relacji międzyludzkich. Czy były jednak ośrodki naukowe, gdzie lider, przewodnik nie wykorzystywał swoich młodszych współpracowników, asystentów, zwłaszcza tych prywatnych i z ojcowską troską popierał ich kariery, przyzwalając na indywidualny rozwój? Wydaje się, że można wskazać przynajmniej kilka przykładów: Szkołę Nielsa Bohra, Getyngę, szkołę Joffego, a w czasie II wojny światowej – Los Alamos. Każdy z przytoczonych przykładów jest zupełnie inny. W niektórych to zewnętrzne zagrożenie scalało grupę, w innych – jakaś idea.

Bardzo dużo zależało od lidera grupy. Przecież były przykłady, gdy lider otaczał swoich młodszych współpracowników przyjaźnią, bez spoufalania się, był ich opiekunem, który zezwalał i popierał ich wybory. Można domniemywać, że taki był prof. Konstanty Zakrzewski. Dla nas dydaktyków ważne jest to, że świecił on swoim osobistym przykładem. Możemy zadać sobie pytanie, czy mimo obecnie tak diametralnie innego świata możemy się czegoś od dawnych mistrzów – opiekunów nauczyć.

W bieżącym numerze Fotonu, oprócz historii szkoły fizyki prof. Konstantego Zakrzewskiego i życia samego mistrza, polecamy również (dość wymagający) artykuł o homologiach, a także przewodnik po aplikacji *phyphox* – nowoczesnym narzędziu wspomagającym nauczanie fizyki.

Z.G.-M.



Contents

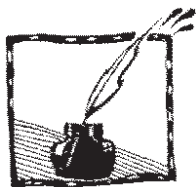
Editorial

<i>Zofia Gołqb-Meyer</i>	1
Homology in Italian cuisine and astrophysics <i>Radosław A. Kycia</i>	4
Prof. Konstanty Zakrzewski and his physics school in Krakow <i>Maria Pawłowska</i>	25
Phyphox – smartphone or tablet as a mobile lab <i>Tomasz Greczyło</i>	37
Museum of Textbooks	47
What to read	48



Spis treści

Jak to drzewiej bywało <i>Zofia Gołąb-Meyer</i>	1
Homologia we włoskiej kuchni i astrofizyce <i>Radosław A. Kycia</i>	4
Prof. Konstanty Zakrzewski i jego krakowska szkoła fizyki <i>Maria Pawłowska</i>	25
Phyphox – urządzenie pomiarowe w obudowie telefonu lub tabletu <i>Tomasz Greczyło</i>	37
Muzeum Podręcznika	47
Co czytać. Astronomia Ogólna	48



Homologia we włoskiej kuchni i astrofizyce

Radosław A. Kycia¹

*Faculty of Science, Masaryk University, Kotlářská 2,
602 00 Brno, Czechy.*

*Instytut Fizyki, Politechnika Krakowska im. Tadeusza
Kościuszki, Podchorążych 1, 30-084 Kraków, Polska.*

Czy zastanawialiście się kiedyś, jak odróżnić dwie powierzchnie? Jak udowodnić, że są one różne? W przypadku prostych dwuwymiarowych powierzchni wystarczy się dobrze przypatrzeć, jednak czasami jest to trudne zadanie – szczególnie, gdy mamy do czynienia z wielowymiarowymi przestrzeniami.

Żeby ten cel osiągnąć, matematycy na przestrzeni lat skonstruowali wiele obiektów zwanych „niezmiennikami”, które są powiązane z cechami charakterystycznymi powierzchni. Działają one na zasadzie kontrapozycji – jeżeli dwie powierzchnie (przestrzenie) mają różne wartości tych niezmienników, to możemy z całą pewnością powiedzieć, że są różne. Jednak, jeżeli powierzchnie mają takie same wartości niezmienników, to zazwyczaj nie upoważnia nas to do stwierdzenia, że są takie same – musimy szukać innych niezmienników, które potrafią „rozdzielić” te powierzchnie lub to my musimy udowodnić, że są one takie same. Jest to bardzo nieprecyzyjne stwierdzenie, gdyż nie powiedzieliśmy co oznacza „takie same”, czym jest „niezmiennik” i względem jakich przekształceń jest niezmienny. Postaramy się to naprawić, prezentując poniżej jedną z prostszych klas niezmienników zwanych grupami homologii.

Jednym z najbogatszych źródeł takich niezmienników jest topologia algebraiczna. Skupimy się na jednej z klas niezmienników zwanych grupą homologii dla rozważanej przestrzeni topologicznej. Żeby jednak wytłumaczyć ideę, należy rozpocząć od rozszyfrowania terminu „topologia algebraiczna”. Rozpocznijmy od słowa „topologia” – jest to nauka o własnościach obiektów, które nie zmieniają się pod wpływem przekształceń zwanych homeomorfizmami. Są to przekształcenia ciągłe, które posiadają przekształcenia odwrotne, które również są ciągłe. Mówiąc prościej, są to takie przekształcenia, które zachowują bliskość punktów i są bijektywne (tzn. odwzorowanie posiada odwzorowanie odwrotne). Takie przekształcenia nie rozrywają przestrzeni (nie generują dziur) oraz nie zaklejają ich – bliskie punkty po takim przekształceniu pozostają bliskie.

Bardzo znany matematyczny żart mówi, że dla Topologa kubek z uchem i precel są nierozróżnialne. Wynika to z faktu, że kubek z uchem możemy przekształcić przy użyciu homeomorfizmów (zdeformować jak model z plasteliny bez rozrywania powierzchni i zaklejania dziur w niej) w precel² (czyli kubek jest homeomorficzny z precelem) – zobacz rys. 1.

¹ Adres elektroniczny: kycia.radoslaw@gmail.com

² Z czym homeomorficzny jest człowiek? – zauważ, że układ pokarmowy i oddechowy to dziury których nie możesz rozrywać i sklejać. Dla uproszczenia możesz zaniedbać na początku naczynia krwionośne i inne, które też są dziurami.



Rys. 1. Dla topologa kubek i precel to to samo

Ta anegdota idealnie pokazuje to jak „czuła” jest topologia i do czego możemy jej użyć. Wskutek ciągłej deformacji może się zmienić pole powierzchni czy objętość (możemy obiekt rozciągnąć lub ścisnąć bez rozrywania i sklejanego), więc takie wielkości nie są niezmiennie z punktu widzenia topologii – nie są jej niezmiennikami. W naszych rozważaniach skupimy się tylko na niezmiennikach homeomorfizmów.

Kolejnym słowem jest „algebraiczna”. Algebra potocznie rozumiana kojarzy nam się z operacjami na wyrażeniach zawierających symbole, np. liczby i litery. W ogólnym przypadku te symbole reprezentują abstrakcyjne obiekty. Dla przykładu – używając znanych reguł dodawania, możemy obliczyć z równania

$$a+b=c, \quad (1)$$

czemu równe jest a , tzn. $a=c-b$.

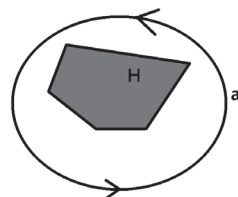
Zatem połączenie słów „topologia algebraiczna” oznacza naukę pozwalającą badać niezmienniki topologiczne przy użyciu metod rachunkowych znanych nam z algebry.

W tym momencie Czytelnik zapewne zastanawia się, co to za niezmienniki topologiczne, które można „dodawać”. Otóż jest ich cała gama. My skupimy się na jednym z nich, który nazywany jest grupą homologii. Jest ona jednym z głównych niezmienników topologii algebraicznej i jest matką innych niezmienników, jak np. zdefiniowana przez nas wkrótce charakterystyka Eulera. Inną dużą klasą niezmienników, które ma nam do zaoferowania topologia algebraiczna są grupy homotopii.

W przykładzie z kubkiem i precelem zauważyliśmy, że homeomorfizm nie zmieniał liczby dziur – ucho i środek precla. Dlatego dobrze byłoby skonstruować niezmiennik który informuje nas (między innymi) o liczbie wielowymiarowych dziur w powierzchni. Ten niezmiennik nazwiemy pierwszą grupą homologii i oznaczymy H_1 . Pierwsza grupa homologii jest bardzo podobna do pierwszej grupy homotopii. Ta druga bada możliwość ciągłego ściągnięcia krzywej zamkniętej („pętelki”) do punktu nie wychodząc poza przestrzeń. Takiemu ściągnięciu może przeszkadzać właśnie dziura którą pętelka otacza. Grupy homotopii to temat na osobny artykuł.

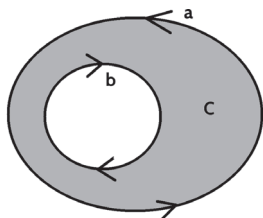
2. Pierwsza grupa homologii

Skupmy się na początku na dwumiarowej powierzchni, np. na płaszczyźnie i wytnijmy w niej dziurę oznaczoną na rys. 2 przez H .



Rys. 2. Płaszczyzna z dziurą H oraz krzywą zorientowaną a otaczającą dziurę

Otocza ją krzywa zamknięta a na płaszczyźnie, a strzałki na niej określają jej orientację – przeciwną do ruchu wskazówek zegara. W przypadku krzywej zamkniętej na płaszczyźnie orientację „dodatnią” (przeciwnie do wskazówek zegara) wybieramy tak, że idąc wzdłuż krzywej zgodnie z kierunkiem wskazanym przez tę orientację, wewnątrz obszaru ograniczonego przez krzywą mamy po stronie lewej. Przeciwna definicja (orientacja „ujemna”) jest z matematycznego punktu widzenia równoważna poprzedniej i równie dobrze możemy ją wybrać jako domyślną. Żeby więc ustalić jedną z nich stosujemy wskazanie „spoza matematyki” – kierując się sercem, a dokładniej, jego asymetrycznym położeniem w naszym ciele. Wracając do rys. 2, cechą charakterystyczną tej krzywej zamkniętej jest to, że nie można na niej rozpiąć powierzchni, która leży całkowicie w płaszczyźnie – przeszkodą jest dziura H . Jednocześnie krzywa zamknięta nie ma brzegu/końców. Takie krzywe, które nie mają brzegu nazywamy **cyklami** i jak zauważyliśmy pozwalają nam wykryć dziurę H .



Rodzi się więc naturalne pytanie – czy jest inna krzywa, która również opisuje H , a jeżeli tak, to czym się różni od a ? Spójrzmy na rys. 3.

Rys. 3. Zorientowane krzywe zamknięte a oraz b , które rozpinają brzeg powierzchni C

Widzimy dwie krzywe zamknięte a oraz b , które rozpinają/są brzegiem powierzchni C . Podkreślmy, że taką powierzchnię możemy rozpiąć na dwóch krzywych tylko dlatego, że pomiędzy nimi nie ma dziury, która przeszkodziłaby nam. Jeżeli operację brania brzegu oznaczymy ∂ , wówczas relację opisującą rys. 3 możemy zapisać tak:

$$\partial C = a - b. \quad (2)$$

Interpretacja tego wzoru jest następująca: powierzchnia C składa się z zamkniętej krzywej zorientowanej a przeciwnie do ruchu wskazówek zegara (orientacja „+”) oraz zamkniętej krzywej zorientowanej b zgodnie z ruchem wskazówek zegara (orientacja „-”). Znak minus przed b jest powiązany z orientacją. Możemy również popatrzeć na równanie (2) inaczej – krzywe a oraz b różnią się o brzeg. To jest właśnie to, o co nam chodziło – jeżeli dwie krzywe zamknięte różnią się o brzeg, to znaczy, że można na nich rozpiąć powierzchnię, czyli że pomiędzy nimi nie ma żadnych dziur!

Zatem to nie cykle nas interesują tylko takie zbiory cykli, które (nie)różnią się o brzeg. Chcemy wiedzieć, ile jest nierównoważnych, tzn. nie różniących się o krzywe brzegowe, cykli. Każda taka klasa opisuje jedną dziurę.

Matematycy opisaliby tę konstrukcję w taki oto sposób: wyobraźmy sobie przestrzeń, którą chcemy przeanalizować, np. powierzchnię. Na początku zdefiniujmy zbiór Z_1 wszystkich możliwych cykli, czyli zbiór takich krzywych d , które nie mają brzegu. Następnie zdefiniujmy zbiór wszystkich krzywych będących brzegiem jakiegokolwiek powierzchni zawierającej się w tej przestrzeni, którą rozważamy – nazywamy go B_1 . Innymi słowy krzywa b należy do zbioru B_1 , jeżeli

istnieje taka powierzchnia B , której brzegiem jest ta krzywa, tzn. $\partial B=b$. Ostatni krok to podzielenie zbioru Z_1 na klasy równoważności elementów. W każdej klasie są tylko te cykle, które różnią się o brzeg od siebie – możemy wybrać jednego reprezentanta, gdyż każdego kolejnego z tej samej klasy otrzymamy, dodając odpowiedni brzeg.

Taka operacja podziału oznaczana jest przez matematyków podobnie do operacji dzielenia, a rezultatem takiego „dzielenia” jest tzw. **przestrzeń ilorazowa**. Zatem w przypadku cykli Z_1 i brzegów B_1 jako rezultat otrzymamy **pierwszą grupę homologii H_1** , tzn.

$$H_1 = \frac{Z_1}{B_1}. \quad (3)$$

Podkreślmy jeszcze raz, że elementami zbioru H_1 są zbiory cykli (zwane klasami równoważności lub abstrakcji), które różnią się o brzeg. Dwie takie klasy nie mogą mieć wspólnego cyklu, bo inaczej przez ten cykl można połączyć te dwie klasy w jedną większą klasę. Klasę abstrakcji cyklu c oznaczamy przez $[c]$.

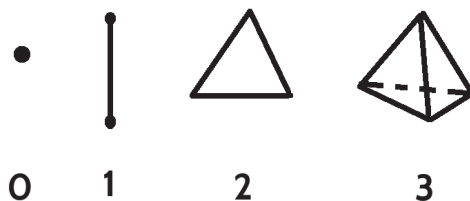
Zauważmy jeszcze, że klasa abstrakcji cyklu zerowego to zbiór wszystkich brzegów B_1 , ($0=[B_1]$), gdyż w H_1 interesują nas tylko te cykle, które się różnią o B_1 .

Czytelnik z pewnością zastanawia się, co oznacza indeks l przy H_l i czy mogą pojawić się inne liczby? Otóż l oznacza, że interesują nas jednowymiarowe cykle i brzegi – krzywe. Możemy jednak zdefiniować podobnie wielowymiarowe cykle i brzegi. Jest to proste, ale wymaga ściślejszych rozważań, które podamy w następnej części.

3. Sympleksy i homologie

Będziemy chcieli zdefiniować grupy homologii dla przestrzeni, które dają się zredukować do prostych tworów zwanych kompleksami symplecjonalnymi składającymi się z sympleksów. Takie przestrzenie nazywamy przestrzeniami triangulowanymi i za chwilę geneza tego terminu stanie się jasna. Nie jest to zbyt ograniczające założenie, gdyż wiele przestrzeni da się opisać w ten sposób.

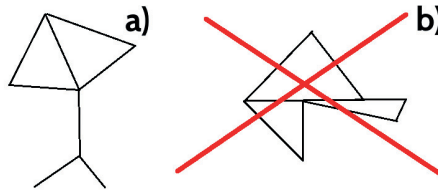
Zacznijmy od sympleksów – są to najprostsze figury geometryczne, które są wypukłe. Zerowymiarowe sympleksy to punkty, jednowymiarowe to odcinki, dwuwymiarowe to trójkąty, a trójwymiarowe to czworościany – zobacz rys. 4.



Rys. 4. Sympleksy różnych wymiarów

Sympleksy możemy ze sobą „kleić” tak, aby „pasowały do siebie”. Takie konstrukcje nazywamy **kompleksami symplecjonalnymi** – jest to zbiór sympleksów

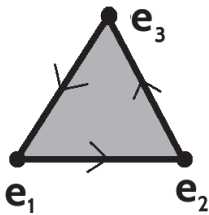
połączonych niżej wymiarowymi sympleksami tak, że przylegają one do siebie dokładnie – dla przykładu zobacz rys. 5.



Rys. 5. a) kompleks symplecjalny; b) figura nie jest kompleksem symplecjalnym, gdyż ściany trójkątów nie przylegają do siebie

Widzimy więc, że kompleksy symplecjalne mogą mieć bardzo skomplikowane kształty. Przestrzenie triangulowalne są takimi, które możemy „triangulować”, czyli odwzorować homeomorficznie na kompleksy symplecjalne. Innymi słowy, dla topologii takie przestrzenie są tożsame z kompleksami symplecjalnymi.

Dzięki sympleksom możemy podać łatwą kombinatoryczną definicję **operacji („operatora”) brania brzegu** ∂ . Popatrzmy na zorientowany dwuwymiarowy sympleks o wierzchołkach e_1 , e_2 oraz e_3 . Orientację/kierunek obiegu oznaczamy przez kolejność wierzchołków w zapisie:



$$[e_1, e_2, e_3], \quad (4)$$

co oznacza, że startujemy z wierzchołka e_1 , następnie poruszamy się do e_2 , a na końcu do e_3 – zobacz Rys. 6.

Rys. 6. Zorientowany sympleks dwuwymiarowy

Operacja brania brzegu jest odpowiednią sumą mniej wymiarowych sympleksów:

$$\partial[e_1, e_2, e_3] = [e_2, e_3] - [e_1, e_3] + [e_1, e_2] = [e_2, e_3] + [e_3, e_1] + [e_1, e_2]. \quad (5)$$

Zauważ, że operacja brania brzegu usuwa wierzchołek z oryginalnego sympleksu i dodaje znak powiązany z ilością przeskoków od początku listy wierzchołków do usuniętego elementu. W tym zapisie $[e_1, e_2]$ oznacza jednowymiarowy sympleks – zorientowany odcinek o orientacji od e_1 do e_2 . Jeżeli odwrócimy kolejność wierzchołków, to zmieni się orientacja, co skutkuje zmianą znaku, czyli $[e_1, e_2] = -[e_2, e_1]$. W ogólności, przestawiając parę wierzchołków, zmieniamy znak stojący przed sympleksem.

Podobnie, dla odcinka $[e_1, e_2]$ jego brzeg to $\partial[e_1, e_2] = e_1 - e_2$, czyli różnica jego punktów brzegowych.

W kolejnym kroku na sympleksach należących do kompleksu symplecjalnego zdefiniujemy operację mnożenia przez liczbę całkowitą oraz ich dodawania. Żeby zrozumieć to pojęcie, na początku zdefiniujemy **grupę**. Jest to zbiór z operacją dwuargumentową (działaniem grupowym) na elementach zbioru, która nie wyprzewadza poza ten zbiór, a także z wyróżnionym elementem, który jest elementem neutralnym operacji. Dodatkowo, każdy element w grupie ma element odwrotny. Przykładem grupy jest zbiór liczb całkowitych z dodawaniem jako operacją, a także zerem jako elementem neutralnym działania, tzn. trójka $(\mathbb{Z}, +, 0)$. Elementem

odwrotnym do danej liczby całkowitej jest liczba przeciwna, np. elementem odwrotnym do liczby 2 jest liczba -2 , gdyż ich suma daje nam element neutralny działania: $2 + (-2) = 0$. Grupa jest przemienna (abelowa³), gdy działanie grupowe jest przemienne – wynik nie zależy od kolejności argumentów. W naszym przykładzie działanie grupowe (dodanie liczb całkowitych) jest przemienne.

Grupę G , w której każdy element można otrzymać przez działanie grupowe ze skończonego zbioru elementów, nazywamy **grupą skończenie generowaną**. Przykładem takiej grupy jest również wspomniany zbiór liczb całkowitych z dodawaniem, gdyż startując z jedynki, poprzez jej sukcesywne dodawanie i odejmowanie potrafimy utworzyć dowolną liczbę całkowitą.

Do opisu grup homologii potrzebujemy definicji grupy abelowej wolnej. Konstruujemy ją w następujących krokach. Na początku definiujemy operację mnożenia elementu x grupy G przez liczbę całkowitą $n > 0$: $nx = \underbrace{x + \dots + x}_n$, podobnie dla $n < 0$: $nx = \underbrace{(-x) + \dots + (-x)}_{|n|}$, a także $0x = 0$ (po prawej stronie 0 jest elementem neutralnym grupy abelowej G , a nie liczbą całkowitą). Następnie, mówimy, że zbiór elementów x_1, \dots, x_k grupy G jest **liniowo niezależny**, jeżeli nietrywialna kombinacja liniowa tych elementów nie daje rozkładu elementu neutralnego, tzn. jeżeli z warunku $n_1x_1 + \dots + n_kx_k = 0$ otrzymujemy jedynie $n_1 = \dots = n_k = 0$. Jest to warunek analogiczny do liniowej niezależności wektorów dla przestrzeni wektorowych. Wiedząc to, definiujemy **grupę abelową wolną** jako grupę generowaną przez skończoną liczbę liniowo niezależnych elementów.

Mając kompleks symplecjalny K , możemy zdefiniować **grupę łańcuchów** $C(K)$ dla tego kompleksu jako wolną grupę abelową na sympleksach tego kompleksu. Elementy tej grupy nazywamy **łańcuchami**. Innymi słowy, z sympleksów tego kompleksu możemy tworzyć kombinacje liniowe ze współczynnikami będącymi liczbami całkowitymi. Przykładem łańcucha dla grupy $C([e_1, e_2, e_3])$ może być np. $e_1 + 5[e_1, e_2]$.

Operację brania brzegu poprzez liniowość możemy rozszerzyć na łańcuchy, np. $\partial(2[e_1, e_2] + [e_3, e_1]) = 2\partial([e_1, e_2]) + \partial([e_3, e_1])$. Wiedząc to, czytelnik będzie potrafił udowodnić $\partial\partial[e_1, e_2, e_3] = 0$, czyli to, że brzeg brzegu dla łańcucha $[e_1, e_2, e_3]$ jest pusty⁴. Jest to ogólna własność operacji brania brzegu: $\partial\partial = 0$ dla dowolnych wielowymiarowych kompleksów symplecjalnych.

Mamy już wszystkie informacje potrzebne, żeby skonstruować grupy homologii. Daną powierzchnię możemy podzielić na kompleksy złożone z łańcuchów różnych wymiarów, np. C_2, C_1, C_0 . Wówczas operator (brania) brzegu odwzorowuje kompleksy według schematu

$$\dots \xrightarrow{\partial_3} C_3 \xrightarrow{\partial_2} C_2 \xrightarrow{\partial_1} C_1 \xrightarrow{\partial_0} 0, \quad (6)$$

gdzie strzałki wskazują kierunek działania operatora brzegu ∂ . Operatory te są ponumerowane, gdyż działają na różne kompleksy, więc nie są to te same operatory. Ostatnia strzałka wskazuje, że punkt nie ma brzegu, co jest oczywiste.

³ Niels Henrik Abel – matematyk norweski.

⁴ Matematycy powiedzieliby, że jest to operacja nilpotentna.

Spróbujmy teraz powiązać to z cyklami i brzegami. W tym celu dla operatora liniowego A zdefiniujemy jądro (od angielskiego słowa *kernel*) jako zbiór tych elementów, które operator odwzorowuje na element neutralny, tzn. $\ker(A) = \{x, Ax=0\}$. Z kolei obraz tego operatora oznaczany jako $\text{image}(A)$ (od angielskiego słowa *image*), to zbiór wartości tego operatora.

Zdefiniujmy cykl jako taki łańcuch, którego brzeg znika. Matematycy mówią więc, że cykle to elementy jądra operatora ∂ i zapisują je jako zbiór $\ker(\partial)$. Zatem zbiór k -wymiarowych cykli to $Z_k = \ker(\partial_k)$. Z kolei brzeg to taki łańcuch, który jest wynikiem działania operatora brzegu na inny łańcuch o indeksie/wymiarze o jeden większym od wymiaru rozważanego łańcucha. Matematycy powiedzieliby, że taki łańcuch należy do obrazu operatora brzegu oznaczanego przez $\text{image}(\partial)$. Czyli zbiór k -wymiarowych brzegów to $B_k = \text{image}(\partial_{k+1})$.

Teraz k -tą grupę homologii definiujemy uogólniając (3):

$$H_k = \frac{Z_k}{B_k} = \frac{\ker(\partial_k)}{\text{image}(\partial_{k+1})}. \quad (7)$$

Jeszcze raz podkreślamy, że tutaj znak dzielenia nie jest znanym nam dzieleniem liczb, a operacją tworzenia przestrzeni ilorazowej, w której mamy klasy cykli. Takie cykle, jeżeli różnią się o brzeg, czyli dowolny element ze zbioru B_k , należą do tej samej klasy równoważności.

Często sympleksy deformuje się przy użyciu odwzorowań ciągłych („bez rozrywania i bez zaklejania dziur”), np. trójkąt możemy przekształcić w sposób ciągły na okrąg, z kolei odcinek – na fragment krzywej. Dla ciągłego przekształcenia sympleksów również możemy zdefiniować teorię homologii zwaną **homologią singularną**. W podstawowych zastosowaniach, które będziemy rozpatrywać poniżej, nie ma znaczenia, czy będziemy rozpatrywać sympleks, czy jego zdeformowaną wersję, gdyż otrzymamy takie same wyniki.

Jak za chwilę zobaczymy grupy homologii mają następującą strukturę:

$$H_k = \mathbb{Z}[a_1] \oplus \mathbb{Z}[a_2] \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}[a_i] \oplus \mathbb{Z}_p[a_{i+1}] \oplus \mathbb{Z}_{p(n-i)}[a_n]. \quad (8)$$

Wyjaśnijmy ten zapis. Klasy abstrakcji generatorów oznaczane są przez $[a_i]$, a \mathbb{Z} to zbiór liczb całkowitych. Symbol $\mathbb{Z}[a_i]$ oznacza, że generator $[a_i]$ jest mnożony przez dowolną liczbę całkowitą – jeżeli jest to zero, to tego składnika nie piszemy. Symbol \oplus oznacza tzw. sumę prostą, która zachowuje się podobnie do zwykłej sumy – oznacza ona kombinację liniową generatorów. Natomiast \mathbb{Z}_p oznacza liczby całkowite modulo p . Dla przykładu, \mathbb{Z}_2 oznacza zbiór liczb $\{0, 1\}$, gdzie dodawanie „zapętla się”: $0+0=0$, $0+1=1+0=1$, natomiast $1+1=0$ (cykliczność).

Podajmy kilka przykładów elementów z $H_4 = \mathbb{Z}[a_1] \oplus \mathbb{Z}_2[a_2]$, np. $2[a_1] \oplus [a_1]$, $[a_1]$, $5[a_2] = [a_2]$.

Zanim przejdziemy do przykładów obliczeń grup homologii, zdefiniujmy jeszcze dwa ciekawe niezmienniki topologiczne oparte na grupach homologii.

Pierwszym z nich są liczby Bettiego⁵, które są liczbą powtórzeń składników z \mathbb{Z} w grupach homologii. Jeżeli nie ma żadnych wystąpień, to liczba Bettiego

⁵ Od nazwiska włoskiego matematyka Enrico Bettiego, który zajmował się topologią.

dla tej grupy homologii wynosi zero. Dla przykładu weźmy k -tą grupę homologii z równania (8). Widzimy, że mamy l wystąpień \mathbb{Z} , więc k -ta liczba Bettiego b_k wyniesie $b_k = l$.

Stąd już bardzo łatwo obliczymy charakterystykę Eulera⁶ oznaczaną przez grecką literę χ (wymawiaj „chi”). W tym celu musimy wyznaczyć wszystkie niezerowe liczby Bettiego i je odpowiednio zsumować, stawiając przed liczbami Bettiego o nieparzystym indeksie dodatkowy znak minus, czyli

$$\chi = b_0 - b_1 + b_2 - b_3 + \dots \quad (9)$$

Ta suma kończy się, gdyż grupy homologii – a wraz z nimi liczby Bettiego – znikają od pewnego miejsca w sumie jeżeli mamy do czynienia z przestrzeniami wymiaru skończonego.

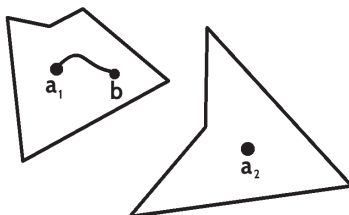
Definicje zawarte w tym rozdziale wyglądają dosyć abstrakcyjnie, dlatego dobrze jest przyjrzeć się kilku przykładom.

3.1 H_0

Na rozgrzewkę sprawdźmy, jak wygląda zerowa grupa homologii.

Wiemy już, że C_0 jest zbiorem punktów i ich kombinacji ze współczynnikami będącymi liczbami całkowitymi. Wiemy również, że punkty nie mają brzegu, więc jądro operatora ∂_0 jest całą przestrzenią C_0 . Pozostaje nam jedynie sprawdzić, jaki jest obraz operatora ∂_1 .

Zwróćmy uwagę na fakt, że jeżeli dwa punkty A oraz B możemy połączyć krzywą deformowalną do odcinka $[A, B]$, to różnią się one o brzeg, gdyż $\partial[A, B] = A - B$. Zatem punkt z każdej składowej łukowo spójnej (składnika przestrzeni, w którym każde dwa punkty możemy połączyć krzywą nie wychodzącą poza ten składnik) jest reprezentantem tej składowej – zobacz rys. 7.



Rys. 7. Przestrzeń składająca się z dwóch składowych łukowo spójnych. W pierwszej z nich wybieramy punkt a_1 , który reprezentuje tę samą klasę równoważności co punkt b_1 . W drugiej składowej na reprezentanta wybierzemy punkt a_2

Załóżmy, że mamy przestrzeń składającą się z k składowych spójnych. Wybierzmy w każdej z tych składowych jeden punkt reprezentujący ją a_1, \dots, a_k . Wówczas zerowa grupa homologii to

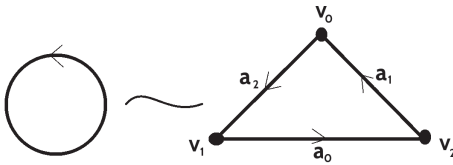
$$H_0 = \mathbb{Z}[a_1] \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}[a_k]. \quad (10)$$

Liczba składników w tej sumie prostej jest równa liczbie składowych spójnych rozważanej przestrzeni. Jest to również ważny niezmiennik topologiczny.

⁶ Leonhard Euler – szwajcarski matematyk, który większą część życia pracował w Prusach i Rosji.

3.2 OKRĄG

Okrąg (który matematycy oznaczają przez S^1) jest przestrzenią spójną i posiada jedną dwuwymiarową dziurę w środku, której cyklem jest cały okrąg. Zatem od razu możemy powiedzieć, jak wyglądają grupy homologii.



Rys. 8. Deformacja okręgu do sympleksu

Przyjmijmy jednak bardziej edukacyjne podejście i spróbujmy obliczyć homologię przy wykorzystaniu sympleksów. Zatem okrąg to zdeformowany trójkąt pusty w środku – rys. 8.

Mamy więc trzy wierzchołki v_0 , v_1 oraz v_2 stanowiące bazę C_0 oraz trzy odcinki

$$a_0 = [v_1, v_2], a_1 = [v_2, v_0], a_2 = [v_0, v_1], \quad (11)$$

stanowiące bazę C_1 . C_2 oraz wyższe kompleksy są puste, gdyż nie ma sympleksów wyższego wymiaru niż 1. Możemy więc zapisać formalne kombinacje w poszczególnych łańcuchach jako

$$C_0 = \mathbb{Z}v_0 \oplus \mathbb{Z}v_1 \oplus \mathbb{Z}v_2, \quad (12)$$

$$C_1 = \mathbb{Z}a_0 \oplus \mathbb{Z}a_1 \oplus \mathbb{Z}a_2.$$

Sytuacja z braniem brzegu wygląda następująco

$$0 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0. \quad (13)$$

Na początek obliczmy brzegi krawędzi trójkąta (1-sympleksy):

$$\partial_1 a_0 = v_2 - v_1, \partial_1 a_1 = v_2 - v_0, \partial_1 a_2 = v_1 - v_0. \quad (14)$$

Chcemy teraz powiedzieć, jakie jest jądro operatora ∂_1 . Jest algorytmiczny sposób na jego obliczenie, który działa dla dowolnie skomplikowanych przypadków, wymagałby on jednak pewnego dłuższego wprowadzenia do algebry liniowej, więc rozważmy prostsze podejście. Zauważmy, że jeżeli odpowiednio dodamy stronami te trzy równania (14), to po kilku próbach dojdziemy do wniosku, że

$$\partial_1 (a_0 - a_1 + a_2) = (v_2 - v_1) - (v_2 - v_0) + (v_1 - v_0) = 0, \quad (15)$$

więc kombinacja $a_0 - a_1 + a_2$ jest elementem jądra operatora: $\ker(\partial_1)$. Możemy również sprawdzić (co bez znajomości algebry liniowej jest trudniejsze), metodą prób i błędów, że to jedyna kombinacja, która pod wpływem brania brzegu zeruje się. Zatem jądro zawiera tylko ten element i jego całkowite wielokrotności, tzn. $\ker(\partial_1) = \mathbb{Z}(a_0 - a_1 + a_2)$.

Widzimy również, że operator ∂_2 jest tu nieistotny, gdyż nie ma łańcuchów wymiaru 2, ponieważ trójkąt ma dziurę w środku. Zatem korzystając z naszej definicji homologii, $\text{image}(\partial_2) = \emptyset$ (zbiór pusty):

$$H_1 = \ker(\partial_1) = \mathbb{Z}[a_0 - a_1 + a_2]. \quad (16)$$

W celu obliczenia H_0 musimy znaleźć $\text{image}(\partial_2)$, gdyż wiemy już, że operator ∂_0 zeruje wszystkie łańcuchy (kombinacje linowe punktów) z C_0 , czyli $\ker(\partial_0) = C_0 = \mathbb{Z}(a_0 - a_1 + a_2)$. Spójrzmy na $\ker(\partial_1) = \mathbb{Z}(a_0 - a_1 + a_2)$. To równanie

mówi, że jeden spośród sympleksów a_0, a_1, a_2 jest zależny od pozostałych (bo suma trzech ma zerowy brzeg, a dowolna kombinacja dwóch nie). Zatem możemy wybrać dowolne dwa spośród trzech i będą one stanowiły bazę obrazu $image(\partial_1)$, gdyż ich brzegi (a także ich kombinacja) nie zerują się. Zatem $image(\partial_1) = \mathbb{Z}\partial_1 a_1 \oplus \mathbb{Z}\partial_1 a_2 = \mathbb{Z}(v_2 - v_1) \oplus \mathbb{Z}(v_2 - v_0)$. Możemy więc napisać

$$H_0 = \frac{ker(\partial_0)}{image(\partial_1)} = \frac{\mathbb{Z}v_0 \oplus \mathbb{Z}v_1 \oplus \mathbb{Z}v_2}{\mathbb{Z}(v_2 - v_1) \oplus \mathbb{Z}(v_2 - v_0)}. \quad (17)$$

Żeby uprościć notację, musimy zrobić małą dygresję. Załóżmy, że mamy $\mathbb{Z}v_1 \oplus \mathbb{Z}v_2$. Zapis ten mówi, że jest to zbiór wszystkich kombinacji, w których v_1 i v_2 mnożone są przez liczby całkowite i dodawane do siebie, np. $2v_1 \oplus 4v_2$. Możemy to również zapisać jako $2(v_1 - v_2) \oplus 6v_2$ i wówczas jest to element $\mathbb{Z}(v_1 - v_2) \oplus \mathbb{Z}v_2$. Zatem generatory v_1, v_2 możemy dowolnie ze sobą dodawać, odejmować i mnożyć przez liczby całkowite, ale ważne jest to, żeby ich w tych operacjach nie „gubić” – żeby zawsze można było odtworzyć ich oryginalny zapis $\mathbb{Z}v_1 \oplus \mathbb{Z}v_2$, robiąc operacje odwrotne. Matematycy nazwaliby to „zakazem” zmiany wymiaru bazy przestrzeni rozpiętej na v_1 i v_2 .

Po tej dygresji możemy wrócić do obliczeń H_0 . W liczniku wyrażenia (17) zamiast v_0 użyjemy $-v_0 + v_2$ (zauważmy, że pomnożyliśmy v_0 przez -1 , co jest również liczbą całkowitą, a następnie dodaliśmy v_2), a zamiast v_1 użyjemy $-v_1 + v_2$, czyli otrzymamy

$$H_0 = \frac{ker(\partial_0)}{image(\partial_1)} = \frac{\mathbb{Z}(v_2 - v_0) \oplus \mathbb{Z}(v_2 - v_1) \oplus \mathbb{Z}v_2}{\mathbb{Z}(v_2 - v_1) \oplus \mathbb{Z}(v_2 - v_0)}. \quad (18)$$

Zauważmy teraz, że w liczniku i mianowniku znajdują się dwa te same elementy: $\mathbb{Z}(v_2 - v_0)$ oraz $\mathbb{Z}(v_2 - v_1)$. Operacja brania przestrzeni ilorazowej („dzielenie” w tym wzorze) mówi, że te kombinacje licznika, które występują również w mianowniku, są nieistotne (gdyż są brzegami), zatem upraszczając, mamy

$$H_0 = \mathbb{Z}[v_2]. \quad (19)$$

Uważny czytelnik zauważy, że zmieniając nasze wybory w powyższym rachunku, moglibyśmy równie łatwo dostać, że $H_0 = \mathbb{Z}v_1$ lub, że $H_0 = \mathbb{Z}v_0$. To tak naprawdę nie jest istotne, gdyż interesuje nas tylko liczba generatorów (w tym przypadku jeden), a nie jego dokładna postać. Ten rachunek mówi, że niezależnie od wyboru podczas obliczeń, zawsze skończymy z jednym generatorem. Odzwierciedla to fakt, że brzeg naszego trójkąta jest spójny – każde dwa punkty można połączyć krzywą leżącą na brzegu. Z tego powodu matematycy często pomijają generatory i piszą w skrócie

$$H_1 \cong \mathbb{Z}, H_0 \cong \mathbb{Z}. \quad (20)$$

Teraz możemy wyznaczyć liczby Bettiego, licząc wystąpienia \mathbb{Z} w grupach homologii. Mamy więc zerową liczbę Bettiego $b_0 = 1$ oraz pierwszą $b_1 = 1$, czyli charakterystyka Eulera okręgu S^1 to

$$\chi(S_1) = 1 - 1 = 0. \quad (21)$$

Warto zauważyć, że dla wielokątów wpisanych w okrąg różnica pomiędzy liczbą wierzchołków (zerowymiarowych sympleksów) oraz krawędzi (jedno-

wymiarowych sympleksów) daje zero, czyli obliczoną właśnie charakterystykę Eulera. Dla trójkąta dowód tego faktu przedstawia rys. 8 i powyższe obliczenia. Dla wielokątów z większą liczbą wierzchołków dowód przeprowadza się zauważając, że podział okręgu na większą liczbę sympleksów (w tym przypadku dodajemy kolejne punkty podziału boków trójkąta, czyli sympleksu z rys. 8, a każdy dodatkowy punkt generuje dodatkową krawędź podziału) nie zmienia niezmienników topologicznych – sposób liczenia nie wpływa na wynik.

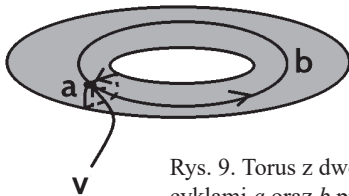
Dla wielościanów opisanych na sferze zachodzi podobny wynik pod nazwą *Twierdzenia Eulera o wielościanach*, które wiąże sumę odpowiednich sympleksów (liczba wierzchołków minus liczba krawędzi plus liczba ścian) z charakterystyką Eulera równą dla sfery 2. Wynika ono z analogicznych rozważań dla sfery, jak te podane wyżej dla okręgu.

Przykład ten był długi, ale dzięki niemu poznaliśmy większą część technik używanych w obliczeniach grupy homologii. Przejdźmy więc do bardziej skomplikowanych przykładów.

3.3 TORUS

Spróbujmy naszych sił na torusie. Możemy go sobie wyobrażać jako nadmuchiwaną oponę (np. samochodową, rowerową) lub obwarzanek pusty w środku (tylko jego brzeg).

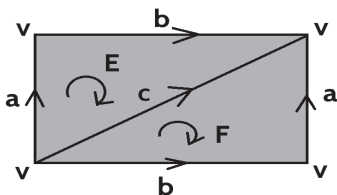
Na początku zastanówmy się co nam podpowiada intuicja na temat grup homologii. Z pewnością przestrzeń jest spójna (jeden kawałek), więc podejrzewamy, że $H_0 = \mathbb{Z}$. Zastanówmy się teraz, ile możemy znaleźć krzywych zamkniętych, których nie można przeprowadzić jedna w drugą i nie są brzegami obszaru zawartego na torusie? Po chwili zastanowienia możemy wskazać, że to te dwie oznaczone na rys. 9 przez a oraz b .



Rys. 9. Torus z dwoma jednowymiarowymi cyklami a oraz b przecinającymi się w punkcie v

Zatem podejrzewamy, że $H_1 = \mathbb{Z}[a] \oplus \mathbb{Z}[b]$. Torus jest powierzchnią dwuwymiarową, ale nasza intuicja nie podpowie nam, ile wynosi H_2 , więc musimy przejść do obliczeń.

W celu wyłuskania kompleksu symplecjajnego rozetniemy torus wzdłuż cykli a i b . Otrzymamy prostokąt widoczny na rys. 10,



gdzie mamy cztery kopie punktu v oraz dwie kopie a oraz b , które musimy skleić. Ze względu na to, że używamy sympleksów, prostokąt ten musieliśmy podzielić krzywą c i zorientować.

Rys. 10. Rozcięty torus. Orientacja jest zadana przez strzałki

Na początek zapiszmy, jakie mamy zbiory łańcuchów:

$$\begin{aligned} C_0 &= \mathbb{Z}v, \\ C_1 &= \mathbb{Z}a \oplus \mathbb{Z}b \oplus \mathbb{Z}c, \\ C_2 &= \mathbb{Z}E \oplus \mathbb{Z}F. \end{aligned} \tag{22}$$

Mamy więc następującą sytuację

$$0 \xrightarrow{\partial_3} C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0 \tag{23}$$

Sprawdźmy teraz, jak działa operator ∂_1 . Otrzymujemy bardzo prosto

$$\partial_1 a = v - v = 0, \partial_1 b = v - v = 0, \partial_1 c = v - v = 0. \tag{24}$$

To zerowanie wynika z faktu, że musieliśmy rozciąć torus, żeby zrobić z niego kompleks symplecjalny, a wynikowy prostokąt ma wierzchołki, które po sklejeniu dają ten sam punkt v . Zatem jądro $\ker(\partial_1) = \mathbb{Z}a \oplus \mathbb{Z}b \oplus \mathbb{Z}c$, a ponieważ wykorzystaliśmy już wszystkie jednowymiarowe sympleksy, obraz jest pusty: $\text{image}(\partial_1) = \emptyset$.

Teraz zobaczymy, jak działa ∂_2 na E oraz F . Aby obliczyć brzegi tych dwóch zorientowanych trójkątów, musimy iść po brzegu zgodnie z orientacją, notując krawędzie ze znakami w zależności, czy orientacja krawędzi jest zgodna z obiegiem (+1) lub przeciwna (-1):

$$\partial_2 E = a + b - c, \partial_2 F = c - a - b \tag{25}$$

Zauważmy, że $\partial_2(E+F) = 0$ i jest to jedyna kombinacja E oraz F , która się zeruje. Zatem $\ker(\partial_2) = \mathbb{Z}(E+F)$, natomiast do obrazu możemy wybrać jeden z brzegów (gdyż drugi dodany do pozostałego jest w jądrze), np. $\text{image}(\partial_2) = \mathbb{Z}(a+b-c)$.

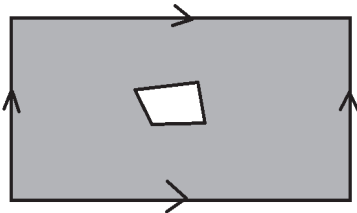
Mamy więc, analogicznie jak poprzednio,

$$\begin{aligned} H_2 &= \ker(\partial_2) = \mathbb{Z}[E+F] \cong \mathbb{Z}, \\ H_1 &= \frac{\mathbb{Z}a \oplus \mathbb{Z}b \oplus \mathbb{Z}c}{\mathbb{Z}(a+b-c)} = \frac{\mathbb{Z}a \oplus \mathbb{Z}b \oplus \mathbb{Z}(a+b-c)}{\mathbb{Z}(a+b-c)} = \mathbb{Z}[a] \oplus \mathbb{Z}[b] \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \\ H_0 &= \ker(\partial_0) = \mathbb{Z}[v] \cong \mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{26}$$

Możemy teraz wyznaczyć liczby Bettiego $b_0 = 1$, $b_1 = 2$ oraz $b_3 = 1$, więc charakterystyka Eulera torusa to

$$\chi(T^2) = 1 - 2 + 1 = 0.$$

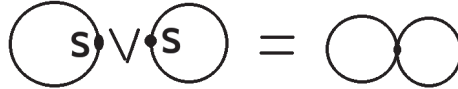
3.4 TORUS Z DZIURĄ I „BUKIET” OKRĘGÓW



Chcielibyśmy teraz zobaczyć, jak wyglądają grupy homologii dla torusa z dziurką przedstawionego w „rozciętej” formie na rys. 11, który oznaczmy sobie jako $T^2 \setminus D$ (torus minus mały dysk deformowalny do kształtu naszej dziurki). W tym celu musimy uzupełnić naszą wiedzę.

Rys. 11. Dziura w torusie

Pierwsza informacja, która jest nam potrzebna to definicja operacji zwanej po angielsku *wedge sum*, a w języku polskim przetłumaczona jako **bukiet**. Wyobraźmy sobie dwie przestrzenie, np. dwa okręgi S^1 z wyszczególnionymi punktami. Bukiet tych przestrzeni $S^1 \vee S^1$ polega na sklejeniu ich w tych wyszczególnionych punktach – otrzymujemy przestrzeń w kształcie cyfry 8, zobacz rys. 12.



Rys. 12. Bukiet dwóch okręgów

Analogicznie dla większej ilości przestrzeni – w każdej z nich wybieramy punkt, a następnie tworzymy bukiet sklejąc wszystkie te punkty w jeden (utożsamiając je). Czytelnik może przećwiczyć takie tworzenie bukietów na modelach z plasteliny.

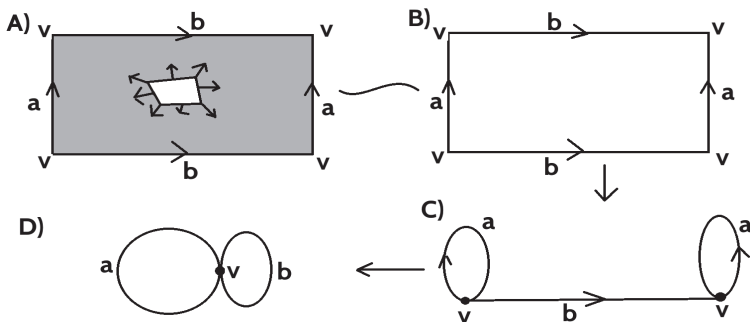
Drugą ważną informacją, którą wkrótce wykorzystamy, jest zachowanie grupy homologii pod wpływem deformacji. Jeżeli w sposób homeomorficzny (przypominamy, że to oznacza ciągle, czyli bez rozrywania i sklejanego, a także w sposób odwracalny) przekształcamy jedną przestrzeń w drugą, to grupa homologii jest zachowana. Co więcej, jeżeli ustalimy sobie parametr, który pokazuje, jak taka ciągła deformacja zmienia przestrzeń – rodzina takich ciągłych odwzorowań zadana przez parametr nazywa się homotopią – to również grupa homologii jest taka sama na każdym etapie deformacji. Homotopie możemy sobie wyobrazić patrząc na lot ptaka – w każdej chwili czasu jego położenie jest zadane przez wskazanie zegara, a jego kształt w tej chwili jest dany przez kształt w poprzedniej chwili oraz deformację jego ciała w czasach pośrednich. Cofając się w czasie otrzymujemy operację odwrotną. Jeżeli przestrzeń X jest homotopijna z przestrzenią Y to oznaczać to będziemy przez $X \sim Y$.

Ostatnią użyteczną dla nas własnością jest to, jak grupy homologii zachowują się na bukietach. Otóż dla grup homologii począwszy od pierwszej mamy

$$H_k(X \vee Y) = H_k(X) \oplus H_k(Y), k \geq 1. \quad (28)$$

Co natomiast zachodzi dla H_0 ? Musimy zauważyć, że operacja tworzenia bukietu z kilku kawałków (składowych spójnych) tworzy jeden. Zatem, ze względu na to, że H_0 numeruje liczbę składowych spójnych, to tę grupę musimy obliczyć niezależnie od wyższych grup, po utworzeniu bukietu. Dowód tych faktów jest trudny, a literatura, w której mogą być takie dowody znalezione, zostanie podana na końcu. Są to jednak podstawowe własności grup homologii.

Wyposażeni w te narzędzia wróćmy do naszego torusa z dziurką – rys. 11. Na początku zdeformujemy go, rozszerzając dziurę do brzegu i wykorzystując fakt, że jeżeli robimy to homotopijnie („bez rozrywania i sklejanego” i wzajemnie jednoznacznie), to grupa homologii nie zmienia się – przedstawia to rys. 13.



Rys. 13. Sekwencja operacji prowadząca od torusa z dziurką do bukietu dwóch okręgów – $S^1 \vee S^1$.
 A) oryginalny torus z dziurką (rozcięty); B) homotopia polegająca na rozszerzeniu dziury do krawędzi prostokąta; C) sklejenie krawędzi a ; D) sklejenie krawędzi b

Czytelnik proszony jest o wykonanie takiego eksperymentu na modelu z plasteliny lub innego „deformowalnego” materiału.

Teraz możemy już przystąpić do liczenia grup homologii. Na początek druga grupa homologii:

$$H_2(T^2 \setminus D) = H_2(S^1 \vee S^1) = H_2(S^1) \oplus H_2(S_1) \cong 0 \oplus 0 = 0, \quad (29)$$

gdyż okręgi są tworami jednowymiarowymi. W pierwszej równości wykorzystaliśmy fakt, że $T^2 \setminus D \sim S^1 \vee S^1$, więc grupy homologii tych dwóch przestrzeni są takie same. Wykorzystaliśmy również wzór (28) w drugiej równości.

Kolejna grupa

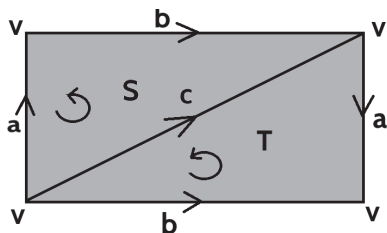
$$H_1(T^2 \setminus D) = H_1(S^1 \vee S^1) = H_1(S^1) \oplus H_1(S_1) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}. \quad (30)$$

Ostatnia grupa homologii $H_0(T^2 \setminus D) \cong \mathbb{Z}$, gdyż $S^1 \vee S^1$ ma tylko jedną składową spójną. Kolejny nasz punkt to liczby Bettiego $b_1 = 2$, $b_0 = 1$, zatem charakterystyka Eulera $\chi(T^2 \setminus D) = 1 - 2 = -1$.

Czytelnik może wykonać prosty rachunek, próbując obliczyć grupy homologii dla torusa z dwoma lub większą liczbą dziur – rozwiązanie zostanie podane w dalszej części.

3.5 BUTELKA KLEINA

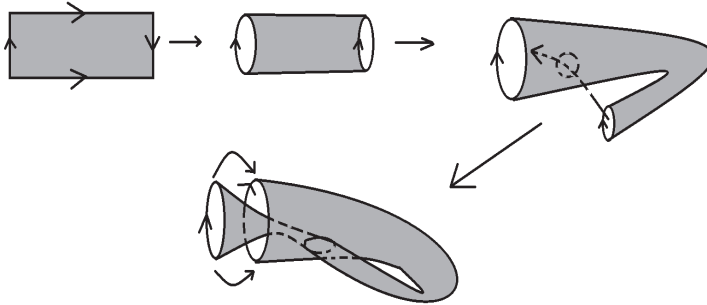
Nasz ostatni przykład jest odrobinę na uboczu, gdyż nie wykorzystamy go po-



Rys. 14. Butelka Kleina

nież. Pokazuje on jednak, że oprócz współczynników całkowitych w sumie prostej dla grupy homologii mogą występować inne, „cykliczne”, np. wspomniane wcześniej \mathbb{Z}_2 . Zaprezentujemy butelkę Kleina oznaczaną przez K . „Rozcięty” model (analogiczny do powierzchni torusa) jest zaprezentowany na rys. 14.

Powierzchni tej nie możemy skleić bez samoprzecięć w trójwymiarowej przestrzeni, ale jeżeli dodamy jeden dodatkowy wymiar, to możemy to zrobić. Czytelnik jest proszony o sklejenie tego modelu w wyobraźni. W przypadku problemów rozwiązanie zostało podane na rys. 15.



Rys. 15. Butelka Kleina

Policzmy teraz grupy homologii. Ze względu na to, że już znamy ogólną ideę, będziemy to robić sprawniej. Łańcuchy mają następującą postać

$$\begin{aligned} C_0 &= \mathbb{Z}v \\ C_1 &= \mathbb{Z}a \oplus \mathbb{Z}b \oplus \mathbb{Z}c \\ C_2 &= \mathbb{Z}T \oplus \mathbb{Z}S \end{aligned} \quad (31)$$

Podobnie jak w przypadku torusa otrzymamy

$$\partial_1 a = v - v = 0, \partial_1 b = 0, \partial_1 c = 0, \quad (32)$$

co daje $\ker(\partial_1) = \mathbb{Z}a \oplus \mathbb{Z}b \oplus \mathbb{Z}c$, a także $\text{image}(\partial_1) = \emptyset$. Kolejny operator ∂_2 daje

$$\partial_2 T = b - a - c, \partial_2 S = c - b - a. \quad (33)$$

Zauważmy, że żadna kombinacja $\partial_2 T$ z $\partial_2 S$ nie daje nam zera, więc $\ker(\partial_2) = \emptyset$. Teraz obliczamy grupy homologii:

$$H_0 = \ker(\partial_0) = \mathbb{Z}[v] \cong \mathbb{Z}; \quad (34)$$

Druga grupa homologii znika, gdyż $\ker(\partial_2) = \emptyset$, tzn.

$$H_2 = 0 \quad (35)$$

Skupmy się teraz dokładniej na pierwszej grupie homologii. Korzystając z definicji otrzymujemy

$$H_1 = \frac{\ker(\partial_1)}{\text{image}(\partial_2)} = \frac{\mathbb{Z}a \oplus \mathbb{Z}b \oplus \mathbb{Z}c}{\mathbb{Z}(b-a-c) \oplus \mathbb{Z}(c-b-a)}. \quad (36)$$

W mianowniku tego wyrażenia od pierwszego składnika sumy odejmiemy drugi i użyjemy go zamiast drugiego

$$H_1 = \frac{\mathbb{Z}a \oplus \mathbb{Z}b \oplus \mathbb{Z}c}{\mathbb{Z}(b-a-c) \oplus \mathbb{Z}(2b-2c)}. \quad (37)$$

Teraz w liczniku zamiast pierwszego składnika użyjmy $b-a-c$ i uproścmy z mianownikiem

$$H_1 = \frac{\mathbb{Z}(b-a-c) \oplus \mathbb{Z}b \oplus \mathbb{Z}c}{\mathbb{Z}(b-a-c) \oplus \mathbb{Z}(2b-2c)} = \frac{\mathbb{Z}b \oplus \mathbb{Z}c}{\mathbb{Z}(2b-2c)}. \quad (38)$$

Kolejna oczywista operacja daje nam

$$H_1 = \frac{\mathbb{Z}(b-c) \oplus \mathbb{Z}c}{\mathbb{Z}(2b-2c)}. \quad (39)$$

Zastanówmy się teraz, jak uprościć licznik i mianownik. Operacja brania przestrzeni ilorazowej $\frac{\mathbb{Z}a}{\mathbb{Z}2a}$ oznacza, że parzysta wielokrotność a jest brzegiem, czyli cyklem zerowym, np. $2[a]=0$. Innymi słowy, te wielokrotności $[a]$, które różnią się o parzystą liczbę, utożsamiamy. Zatem jeżeli mamy nieparzysty cykl, to możemy go sprowadzić do takiego, który jest mnożony przez liczbę całkowitą zero, lub jeden, np. $3[a]=(1+2)[a] = [a] + 2[a] = [a]$. Możemy to zgrabniej zapisać używając \mathbb{Z}_2 , ze standardowym dodawaniem modulo 2, tzn.: $1+1=0$. Dlatego $\frac{\mathbb{Z}a}{\mathbb{Z}2a} = \mathbb{Z}_2[a]$.

Wracając do wzoru (39), otrzymamy

$$H_1 = \mathbb{Z}_2(b-c) \oplus \mathbb{Z}c. \quad (40)$$

Pojawienie się składnika z \mathbb{Z}_2 jest związane z nieorientowalnością powierzchni. Butelka Kleina oraz wstęga Möbiusa są klasycznymi przykładami powierzchni nieorientowalnych. Spróbuj znaleźć w Internecie informacje na ich temat.

Obliczmy teraz liczby Bettię: $b_0 = 1$, $b_1 = 1$ (uwzględniamy tylko czynniki postaci $\mathbb{Z}[\dots]$) oraz $b_2 = 0$, co daje charakterystykę Eulera $\chi(K) = 0$.

Czytelnik, który chciałby się sprawdzić, może odwrócić zwrot jednego z odcinków b z rys. 14, oraz zmienić nazwę pary punktów po jednej ze stron, np. z v na w . Taki twór nazywa się rzeczywistą przestrzenią rzutową i jest oznaczany przez matematyków jako $\mathbb{R}P^2$. Ma on niezwykle ciekawe własności, które zasługiwałyby na osobny artykuł.

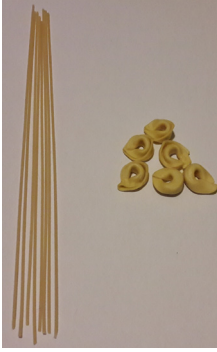
4. Przykłady grup homologii w przyrodzie

Przykładów i zastosowań teorii naszkicowanej powyżej jest wiele – zawsze, gdy w grę wchodzi charakterystyka powierzchni/przestrzeni, topologia może być użyta do jej opisu. My jednak, ze względu na ograniczone miejsce, skupimy się na kilku wybranych. Zakładając, że apetyt czytelnika na zastosowania po przebrnięciu przez poprzednie punkty wzrósł, skupimy się na początku na włoskiej kuchni.

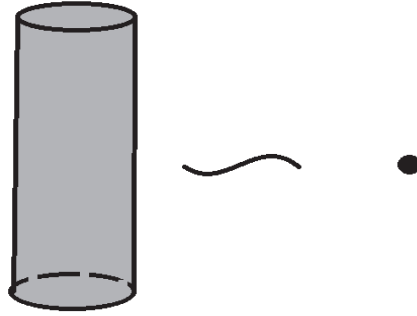
4.1 KUCHNIA WŁOSKA

Rozpocznijmy od włoskiej kuchni. Spróbujmy obliczyć grupy homologii dla dwóch przykładów zaprezentowanych na rys. 16.

Zacznijmy od spaghetti. Wyobraźmy je sobie jako wypełnione walce, które możemy homotopijnie zdeformować do punktu – rys. 17.



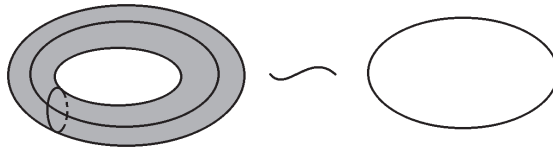
Rys. 16. Przykładowe włoskie makarony: spaghetti oraz tortellini



Rys. 17. Deformacja spaghetti do punktu

Zatem jedyna niezerowa grupa homologii to $H_0 \cong \mathbb{Z}$.

Tortellini możemy uważać za wypełniony torus, przedstawiony na rys. 18.



Rys. 18. Deformacja tortellini (wypełnionego torusa) do okręgu

Grupy homologii dla zdeformowanego tortellini – S^1 – obliczyliśmy w poprzedniej części.

Są to bardzo proste przykłady, jednak Czytelnik, mając zestaw podstawowych narzędzi, może spróbować obliczyć grupy homologii innych potraw.

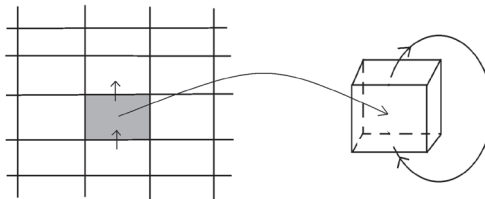
4.2 MATERIA W GWIAZDACH NEUTRONOWYCH

Przyjrzyjmy się teraz materii w gwiazdach neutronowych. Są to obiekty powstające w ostatnich etapach życia gwiazdy o wadze w odpowiednim zakresie, gdy traci ona możliwość produkcji energii w reakcjach syntezy termojądrowej cięższych pierwiastków z lżejszych. Wówczas grawitacja zaczyna ścisnąć gwiazdę do tego stopnia, że atomy tracą swoje elektrony i materia nie jest już zbudowana z atomów, tylko z materii jądrowej i swobodnych elektronów. Grawitacja, a co za tym idzie – ciśnienie, jest, oczywiście, największa w centrum gwiazdy i zmniejsza się, gdy poruszamy się w kierunku jej brzegu.

Rozpoczynając od środka gwiazdy mamy jądro, które składa się z jednorodnej materii jądrowej z domieszką elektronów. Jest to wynik zlania się jąder atomowych pod wpływem ciśnienia. Poruszając się w kierunku brzegu natrafiamy na ciekłą warstwę przejściową, które składa się z mieszaniny neutronów, protonów i swobodnych elektronów. Jeżeli zwrócimy uwagę na protony, to grupują się one w ciekawe kształty przypominające włoskie dania. To będzie nasz główny cel analizy. Struktury te mogą odpowiadać za tempo stygnięcia gwiazdy, gdyż są przeszkodą w transferze energii przez neutrino od jądra do jej powierzchni, a następnie w przestrzeń kosmiczną. Kolejne warstwy to wewnętrzna i zewnętrzna skorupa (ang. crust), gdzie możemy spotkać mieszaninę jąder atomowych, neutronów i elektronów. Oddziaływanie pomiędzy ładunkami uporządkowuje składniki w strukturę krystaliczną, tzw. kryształy kulombowskie. Idąc w kierunku brzegu, widzimy że maleje liczba swobodnych nukleonów, a napotykamy coraz więcej jąder. Najbardziej zewnętrzną warstwą jest ocean swobodnych jąder i gazu elektronów. Jest to oczywiście bardzo uproszczony opis.

Niedawne symulacje komputerowe wykazały (zobacz podsumowanie w [4]), że w warstwie pomiędzy jądrem a skorupą występują fazy przypominające twory znane z włoskiej kuchni – gnocchi, spaghetti czy inny rodzaj makaronu w zależności od gęstości materii. W symulacjach wykorzystano modele oddziaływań w materii jądrowej pod dużym ciśnieniem.

W takich symulacjach wykorzystuje się periodyczne warunki brzegowe. Oznacza to, że symulacja materii jest wykonywana w ograniczonej objętości, np. sześcianu, a wrażenie nieskończonej/dużej objętości, z której tę komórkę wycięto, uzyskuje się nakładając na komórkę warunki periodyczne na brzegach. Dla przykładu, jeżeli użyjemy sześcianu, to dla periodycznych warunków brzegowych materia, która wypłynie przez górną ścianę, wpłynie także przez dolną i analogicznie przy pozostałych parach przeciwległych: lewa-prawa i przednia-tylna – zobacz rys. 19.



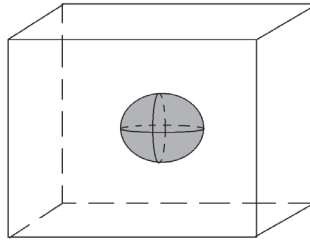
Rys. 19. Periodyczne warunki brzegowe tworzą wrażenie nieskończonej objętości

Taki trójwymiarowy wypełniony sześcian ze sklejonymi przeciwległymi ścianami to trójwymiarowy odpowiednik torusa – T^3 . Sklejenie przeciwległych ścian nie może być wykonane w trójwymiarowej przestrzeni bez samoprzecięć – musimy dodać przynajmniej jeden dodatkowy wymiar.

Omówimy wybrane przykłady takich struktur i policzymy ich grupy homologii. Wszystkie fazy opisane są w [4], a ich analiza topologiczna w [3]. Nasz

opis opiera się na [3]. Kolejność faz jest podana zgodnie ze wzrastającą gęstością materii jądrowej.

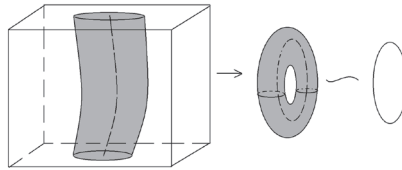
Rozpocznijmy od gnocchi przedstawionego na rys. 20.



Rys. 20. Faza gnocchi

Są to kulki materii protonowej (ciemniejsze obszary) pływającej w materii neutronowej (jaśniejsze). Skupiając się na pojedynczej kulce, możemy ją zdeformować homeomorficznie do punktu. Grupy homologii punktu zostały podane poprzednio – jedyna niezerowa grupa to $H_0 \cong \mathbb{Z}$.

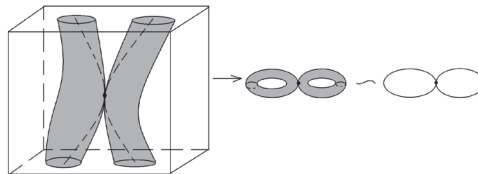
Kolejna faza to spaghetti, która składająca się z wypełnionych rurek. Jedna taka tuba została przedstawiona na rys. 21.



Rys. 21. Faza spaghetti i jej deformacja

W sześciennym, w którym odbywa się symulacja, mamy struktury w postaci wypełnionych rurek. Te rurki dotykają ścian (na rys. 21 górnej i dolnej). Ze względu na okresowe warunki brzegowe musimy skleić górną i dolną część rurki. Jako wynik otrzymamy wypełniony w środku torus, który poprzez homotopijną deformację możemy ścisnąć do okręgu S^1 , którego grupy homologii również zostały podane wcześniej.

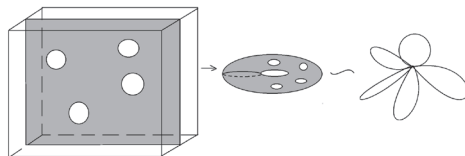
Gdy gęstość materii rośnie, rurki mogą się łączyć. Każde takie sklejenie zmienia topologię. Weźmy najprostszyp przypadek – założmy sklejenie dwóch rurek w jednym punkcie, jak to przedstawia rys. 22.



Rys. 22. Łączenie się dwóch elementów typu spaghetti

Jak widzimy na rysunku, takie połączone wypełnione rurki, ze względu na okresowe warunki brzegowe tworzą bukiet dwóch wypełnionych torusów, które możemy zdeformować do bukietu dwóch okręgów $S^1 \vee S^1$. Homologia takiej struktury była wyznaczona powyżej.

Jako ostatni przykład weźmy fazę o nazwie wafel, która składa się z równoległych warstw z dziurami. Jedną taką warstwę przedstawia rys. 23.



Rys. 23. Faza wafła i jej deformacja do bukietu sfer

Prostokąt z czterema dziurkami ze względu na utożsamienie przeciwległych ścian sześcianu daje nam torus z tymi dziurami. Rozszerzając te dziury, podobnie jak w przykładzie z torusem z jedną dziurą, otrzymamy bukiet pięciu okręgów. Zatem grupy homologii to

$$\begin{aligned} H_2(S^1 \vee S^1 \vee S^1 \vee S^1 \vee S^1) &= 0, \\ H_1(S^1 \vee S^1 \vee S^1 \vee S^1 \vee S^1) &\cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \end{aligned} \quad (41)$$

Natomiast $H_0 \cong \mathbb{Z}$, ponieważ bukiet jest przestrzenią spójną. Jak nietrudno zauważyć, dla n dziur otrzymamy bukiet $n+1$ okręgów.

4.3 BIOLOGIA

W biologii również występuje wiele struktur, w których topologia odgrywa szczególną rolę. Możemy wspomnieć o bakteriach i organizmach bardziej złożonych, które często formują struktury o unikalnych kształtach, a topologia może nam pomóc w ich klasyfikacji.

Również podstawowe składniki naszych organizmów – białka mają nietrywialną strukturę, a ich kształt często związany jest z ich funkcjami. Tutaj charakterystyki topologiczne również mogą pełnić ważną funkcję klasyfikacyjną. Innym przykładem, który może być klasyfikowany przy użyciu metod topologii, są tkanki występujące w naszym organizmie.

5 Co dalej?

Jeżeli drogi Czytelniku chciałbyś kontynuować tę ciekawą podróż w świat topologii algebraicznej, tutaj znajdziesz kilka porad.

Jedną z lepszych (moim zdaniem) książek opisujących w bardzo ciekawy i nieskomplikowany sposób topologię algebraiczną jest (niestety nie wznawiana) książeczka [1]. Jest to idealny wstęp do tego zagadnienia dla osób nie mających zbyt dużego przygotowania matematycznego.

Czytelnik posiadający odpowiednie przygotowanie matematyczne może sku-
sić się na lekturę książki [2], opisującej w szczegółach klasyczną topologię alge-
braiczną.

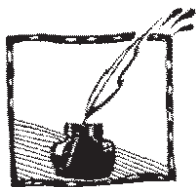
Osoby zainteresowane zastosowaniem topologii do symulacji materii we-
wnątrz gwiazd neutronowych (lub kuchni włoskiej) mogą rozpocząć od [3],
a szczegóły fizyki procesów we wnętrzu tych gwiazd opisane są w [4].

Młodym i obecnie szybko rozwijającym się obszarem badań jest topologia
stosowana (ang. applied topology) do szerokiej gamy zjawisk fizycznych, pro-
blemów techniki, informatyki oraz biologii. Opis wielu takich zastosowań zawie-
ra książka [5].

Topologia algebraiczna korzysta bardzo silnie z aparatu teorii kategorii i funk-
torów – homologia jest generowana przez taki „funktor”, który przekształca prze-
strzeń topologiczną w jej grupę homologii. Jest to bardzo abstrakcyjny dział,
obecnie przebudowujący podstawy całej matematyki. Pięknym i prostym wpro-
wadzeniem do tego tematu jest książka [6].

Literatura

- [1] W.G. Bołtiański, W.A. Jefremowicz, *Zarys podstawowych pojęć topologii*, Biblioteczka Matematyczna PZWS, 1965
- [2] A. Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge University Press, 1st edition (2001); książka jest dostępna na stronie: <https://www.math.cornell.edu/~hatcher/>
- [3] R.A. Kycia, S. Kubis, W. Wójcik, *Topological analysis of nuclear pasta phases*, Physical Review C (2017)
- [4] M. E. Caplan, C. J. Horowitz, *Astromaterial Science and Nuclear Pasta*, arXiv:1606.03646 [astro-ph.HE]
- [5] R. Ghrist, *Elementary Applied Topology*, CreateSpace Independent Publishing Platform (2014)
- [6] F.W. Lawvere, S. H. Schanuel, *Conceptual Mathematics*, Cambridge University Press (1997)



Profesor Konstanty Zakrzewski i jego krakowska szkoła fizyki

Maria Pawłowska
Biblioteka WFAIS UJ



Fot. 1. Prof. Konstanty Zakrzewski (1876-1948)

Dziadek, który przez lata mieszkał na parterze Collegium Witkowskiego, był wielkim ekscentrykiem. Potrafił chodzić w jednym bucie brązowym, w drugim czarnym. Ponadto notorycznie się spóźniał. Kto wie, czy w 1939 roku to spóźnienie nie ocaliło mu życia? Przyszedł do Collegium Novum na zwołany „odezyt” po czasie. I mimo jego awanturowania się, nie wpuszczono go już do środka... Tak Andrzej Kapiszewski¹ wspomina w wywiadzie opublikowanym na łamach uniwersyteckiego czasopisma *Alma Mater* swojego dziadka, Konstantego Zakrzewskiego [1, s. 18]. Kim był ten ekscentryczny, a może tylko roztargniony, naukowiec?

Poniższy artykuł jest próbą przybliżenia postaci profesora Konstantego Zakrzewskiego, wybitnego fizyka, który swoją karierę naukową związał z Uniwersytetem Jagiellońskim, gdzie przez wiele lat kierował Zakładem Fizycznym i Katedrą Fizyki Doświadczalnej.

¹ **Andrzej Kapiszewski** (1948-2007) syn Henryka i Marii Kapiszewskiej (z domu Zakrzewskiej), wnuk prof. Konstantego Zakrzewskiego i Heleny Zakrzewskiej. Ukończył studia matematyczne na Uniwersytecie Jagiellońskim, związany z Instytutem Badań Polonijnych UJ, twórca Katedry Bliskiego i Dalekiego Wschodu UJ, członek Komitetu Badań Orientalistycznych PAN. Był jednym z założycieli i pierwszym rektorem Krakowskiej Szkoły Wyższej im. A. Frycza-Modrzewskiego.

Urodził się 14 stycznia 1876 r. w Warszawie i właśnie tam uczęszczał do V Gimnazjum Państwowego, którego nie ukończył z powodu aresztowania za przynależność do bliżej nieokreślonej tajnej organizacji młodzieżowej. Więziony był na Pawiaku, a później w twierdzy petersburskiej. Podobno podczas aresztowania zjadł wszystkie kompromitujące dokumenty, więc jego uwięzienie trwało tylko kilka miesięcy. Usunięto go natomiast ze szkoły i wydano nakaz osiedlenia się w niewielkiej wsi w okręgu kieleckim. Ponieważ „wilczy bilet” nie pozwalał mu kontynuować nauki w zaborze rosyjskim, przedarł się przez zieloną granicę do Galicji, by we Lwowie skończyć szkołę średnią, a później rozpocząć studia na Wydziale Filozoficznym Uniwersytetu Jagiellońskiego. Początkowo studiował botanikę, ale szybko przekonał się, że o wiele bardziej pociąga go fizyka, zwłaszcza fizyka doświadczalna. Już na drugim roku został demonstratorem w laboratorium fizycznym i nieformalnym asystentem prof. Augusta Witkowskiego. Na podstawie dysertacji *O sile elektromotorycznej wywołanej przez ruch cieczy w posrebrzonej rurze* uzyskał w 1900 r. tytuł doktora. O jego pierwszej samodzielnej pracy, opublikowanej w bardzo prestiżowym czasopiśmie naukowym „Physikalische Zeitschrift”², napisał Tadeusz Piech: *Wykazał w niej młody doktorant całkowite opanowanie techniki eksperymentalnej, pomysłowość, która cechowała też zawsze wszystkie jego późniejsze prace, pozwalającą prostymi środkami podpatrzeć tajemnice natury, ponadto umiejętność teoretycznej interpretacji obserwowanego zjawiska* [2, s. 372].

Po ukończeniu studiów wyjechał na kilka miesięcy do Getyngi, a później na dwa lata do Lejdy, gdzie pracował jako asystent sławnego kriogenika Heikego Kamerlingh Onnesa. Owocem tej współpracy było nie tylko zainteresowanie się młodego uczonego kriogenicą, ale również opublikowanie, wspólnie ze swoim mistrzem, trzech artykułów dotyczących warunków współistnienia fazy ciekłej i gazowej mieszanin binarnych w niskich temperaturach. Po powrocie do krakowskiej uczelni Zakrzewski pragnął kontynuować prace w tej dziedzinie, jednak niewystarczające środki finansowe, jakimi dysponował wówczas Uniwersytet, nie pozwoliły na stworzenie pracowni niskich temperatur, która mogłaby konkurować ze wspólnie rozwiniętymi laboratoriami zagranicznymi. Ale o tych pierwszych fascynacjach naukowych nie zapomniał. W 1935 r. zainstalował w swoim laboratorium niewielką aparaturę do skraplania wodoru opartą na zjawisku obniżenia temperatury gazu wskutek jego desorpcji w ciałach porowatych.

Podczas krótkiego pobytu w Getyndze Zakrzewski współpracował z Eduardem Rieckem i Woldemarem Voigtem. Pierwszy z nich pracował wówczas nad nową teorią metali, natomiast zainteresowania naukowe drugiego uczonego obejmowały optykę kryształów i zjawiska magnetoptyczne. Zainspirowany badaniami Rieckiego dotyczącymi przewodnictwa metali, kilka kolejnych lat (podczas których pracował jako asystent prof. Augusta Witkowskiego w Katedrze Fizyki Eksperymentalnej UJ) poświęcił Zakrzewski zagadnieniom związanym z teorią

² Zakrzewski C., *Über die elektromotorische Kraft, welche durch die Bewegung einer Flüssigkeit in einer versilberten Glasröhre hervorgebracht wird*. Phys. Z., t. 2 (1900), s. 146-147.

elektronową metali. Teoria Maxwella, która opisywała rozchodzenie się światła w próżni, nie wyjaśniała zachowania się światła przy przejściu przez materię. Konieczne więc było doświadczalne zbadanie dyspersji stałych optycznych jak największej ilości metali, co wymagało przeprowadzenia niezwykle dokładnych i bardzo czułych pomiarów. W tym celu Zakrzewski zaprojektował i wykonał specjalny półcieniowy analizator eliptyczności światła, który różnił się od aparatury wykorzystywanej wcześniej tym, że nie wymagał kalibracji dla uzyskania bezwzględnych wyników pomiaru i był czulszy niż dotychczasowe przyrządy oparte na zasadzie maksimum ciemności. Urządzenie to nazwano analizatorem Zakrzewskiego. Owocem kilkuletniej pracy doświadczalnej i analizy teoretycznej powyższych zagadnień było przygotowanie wykładu habilitacyjnego *Teoria elektronowa metali*³, który wraz z trzema artykułami opublikowanymi w Lejdzie, dwiema pracami przygotowanymi we współpracy z Kamilem Kraftem i artykułem o analizatorze półcieniowym⁴, stanowiły podstawę do podjęcia starań o habilitację. *Veniam docendi* uzyskał Zakrzewski w marcu 1908 r. Trzy lata później był już profesorem nadzwyczajnym fizyki eksperymentalnej. W 1911 r., dzięki staraniom władz Wydziału Filozoficznego UJ, utworzono drugą katedrę fizyki doświadczalnej, mającą kształcić studentów innych kierunków niż fizyka (biologia, medycyna, farmacja), a kierownictwo tej katedry powierzono profesorowi Konstantemu Zakrzewskiemu. O wyzwaniach naukowych podejmowanych wówczas przez Zakrzewskiego Adam Strzałkowski napisał: *Zakrzewski jako profesor nadzwyczajny [...] kontynuował swoje prace dotyczące optycznych własności metali. Mierzył dyspersję stałych optycznych dla szeregu materiałów. Zajmował się również efektem Kerra. Odkrył przy tym odstępstwa od teorii Lorentza metali, sugerując, że mogą one pochodzić od efektów kwantowych, które powinny występować zgodnie z niedawno sformułowaną przez Maxa Plancka teorią.*

³ Zakrzewski K., *Teoria elektronowa metali. Odczyt habilitacyjny wygłoszony w Uniwersytecie Jagiellońskim dnia 9. Marca 1908 r.* Kosmos, t. 33 (1908), s. 190-202. Początkowy fragment tego wystąpienia jest szczególnie wart przytoczenia, bo pokazuje, jaki był stan ówczesnej wiedzy dotyczącej teorii elektronowej i jakie problemy próbowali rozwiązać uczeni zajmujący się tymi zagadnieniami. Zakrzewski pisze: *Ponieważ wolne elektrony, zawsze te same, z jednakowym zawsze ładunkiem elektryczności i co za tym idzie, z jednakową masą, można otrzymać działaniem najróżniejszych czynników z ciał o najrozmaitszych własnościach chemicznych i fizycznych, przeto koniecznym niemal jest dalsze założenie, że i w zwykłym stanie materii elektrony odgrywają rolę zasadniczą; że wchodzi w skład atomu, od którego czasem spontanicznie, czasem pod działaniem sił zewnętrznych oderwać się mogą. Jaki jest związek atomu z elektronem, czy może atom jest po prostu zbiorowiskiem elektronów; czy istnieją prócz ujemnych także dodatnie elektrony, a jeżeli nie, czym jest w ogóle ładunek dodatni? Czy oprócz masy, mającej swe źródło w elektrodynamicznych własnościach elektronu, istnieje także inna, zwykła masa? Jakimi siłami działa atom na elektron? Czy wreszcie te siły dadzą się sprowadzić do elektrycznych, a więc znowu wytłumaczyć elektronowo? To są pytania, na które nie można dać odpowiedzi na podstawie tego, co wiemy z badań nad elektronami wolnymi. Chcąc więc tłumaczyć elektronowo własności atomów, musimy postępować drogą pośrednią: tworzyć hipotezy o związku atomu z elektronem i sprawdzać czy zgadzają się one z doświadczeniem.*

⁴ Zakrzewski C., *Sur un analyseur elliptique à pénombre.* Bull. De l'Acad. d. Sc. d. Crac. (1904), s. 506-520.

Słuszność tego przypuszczenia została później potwierdzona w pracach Arnolda Sommerfelda [3, s. 470]. Wyniki kilkuletnich badań dotyczących optyki metali podsumował Zakrzewski, publikując obszerną monografię *O dyspersji i ekstynkcji światła w metalach*⁵. Pobyt w Krakowie to czas, gdy uczony należał do czołówki fizyków sprawdzających doświadczalnie teorię elektronową Lorentza. Zgromadził wówczas wokół siebie równie zafascynowanych tymi zagadnieniami współpracowników, zrodziły się pomysły rozszerzenia obszaru badawczego.

Niespodziewanie plany te zostały przerwane powołaniem profesora Zakrzewskiego na zwolnione przez prof. Mariana Smoluchowskiego stanowisko kierownika Katedry Fizyki Teoretycznej na Uniwersytecie Lwowskim. Wojenne lata 1913-1917 spędził właśnie we Lwowie, a nie był to łatwy czas ani dla uniwersytetów, ani dla ich pracowników. *Tylko dwie krótkie prace, drobne przyczynki, dotyczące zagadnień termodynamiki wyszły wówczas spod jego pióra* [4, s. 717]. Po niespodziewanej śmierci Mariana Smoluchowskiego zwolniła się Katedra Fizyki Doświadczalnej na Uniwersytecie Jagiellońskim i właśnie tę katedrę objął Zakrzewski po powrocie do Krakowa. Uznano bowiem, że to właśnie jemu należy powierzyć kierowanie zakładem, z którym wcześniej związani byli wybitni fizycy: Zygmunt Wróblewski, August Witkowski i Marian Smoluchowski.

W 1918 r. Zakrzewski rozpoczął kolejny okres twórczej pracy naukowej w Katedrze Fizyki Doświadczalnej Uniwersytetu Jagiellońskiego. Kierując tą katedrą przez prawie 30 lat, stworzył – mimo olbrzymich trudności finansowych – prężny ośrodek badawczy skupiający i szkolący grono bardzo utalentowanych młodych adeptów fizyki. To właśnie wokół profesora Zakrzewskiego skupiła się liczna grupa studentów, a później młodych pracowników naukowych. To jego asystenci, doktoranci, czy wreszcie osoby otwierające w Katedrze Fizyki Doświadczalnej UJ przewód habilitacyjny. Wymienia się wśród nich następujące nazwiska: Stanisław Dobiński⁶, Dobiesław Doborzyński⁷, Mieczysław Jeżewski⁸, Marian

⁵ Zakrzewski K. *O dyspersji i ekstynkcji światła w metalach*. Prace Matematyczno-Fizyczne. t. 24 (Poświęcony pamięci Augusta Witkowskiego), (1913), s. 353-422.

⁶ **Stanisław Dobiński** (1909-1939) początkowo zajmował się dielektrycznymi własnościami cieczy i roztworów. W roku akademickim 1936/37 przebywał w laboratorium G.P. Thompsona, gdzie pracował w dziedzinie dyfrakcji elektronów w ciałach stałych. W roku akademickim 1938/39 był docentem Uniwersytetu Poznańskiego. Zginął podczas obrony Warszawy w 1939 r.

⁷ **Dobiesław Doborzyński** (1904-1942) przez dwa lata pracował w laboratorium kriogenicznym w Lejdzie pod kierunkiem Heikego Kamerlingha Onnesa, był doktorantem prof. Konstantego Zakrzewskiego i jego asystentem, brał udział w kampanii wrześniowej, aresztowany podczas Sonderaktion Krakau, wywieziony do obozu koncentracyjnego w Sachsenhausen. Aresztowany ponownie w kwietniu 1941 r., rozstrzelany w Oświęcimiu.

⁸ **Mieczysław Jeżewski** (1890-1971) absolwent UJ, od 1926 r. profesor Akademii Górniczej w Krakowie. Zapoczątkował badania ciekłych kryształów, brał udział w przygotowaniu liczników do lotu stratosferycznego balonu „Gwiazda Polski” w 1938 r. Członek PAU, autor cenionych podręczników do fizyki.

Mięsowicz⁹, Tadeusz Nayder¹⁰, Arkadiusz Piekara¹¹, Tadeusz Piech¹², Stefan Rozental¹³, Jan Wesołowski¹⁴, Aleksy Jagielski¹⁵, Jerzy Gierula¹⁶, Ludwik Kozłowski¹⁷ [5, s. 142-147]. W okresie międzywojennym uczeni ci wydali ponad pięć-

⁹ **Marian Mięsowicz** (1907-1992) był uczniem profesora Zakrzewskiego, z którym prowadził prace nad wytwarzaniem i transportem krótkich fal elektromagnetycznych. Jest odkrywcą zjawiska anizotropii lepkości ciekłych kryształów, a określenie „Miesowicz viscosity coefficients” jest wciąż obecne w literaturze naukowej dotyczącej badań kryształów. Od 1931 r. pracował na Akademii Górniczej, był wykładowcą fizyki podczas tajnego nauczania na UJ a od 1949 r. profesorem fizyki w AGH. Był członkiem PAU, inicjatorem uczestnictwa polskich uczonych w Europejskim Centrum Badań Jądrowych CERN.

¹⁰ **Tadeusz Nayder** (1892-1945) adiunkt UJ, podczas II wojny światowej był nauczycielem w Krakowskiej Szkole Przemysłowej. Wykładowca fizyki na tajnych kompletach.

¹¹ **Arkadiusz Piekara** (1904-1989) związany z Uniwersytetem Warszawskim, ale w 1936 r. złożył na Wydziale Filozoficznym UJ podanie o otwarcie przewodu habilitacyjnego. Jako docent prowadził wykłady uniwersyteckie w Krakowie. Aresztowany w Sonderaktion Krakau, przewieziony do obozu w Sachsenhausen, zwolniony w marcu 1940 r. Prowadził wykłady z fizyki na Wydziale Lekarskim UJ, a od 1948 r. był profesorem fizyki najpierw w Politechnice Gdańskiej, a później w Uniwersytecie Poznańskim i Uniwersytecie Warszawskim. Był wybitnym specjalistą w zakresie badania dielektryków, magnetoptyki i optyki nieliniowej. Autor podręczników akademickich z fizyki.

¹² **Tadeusz Piech** (1893-1990) ukończył Uniwersytet w 1932 r., pracował jako nauczyciel fizyki w I Liceum im. Bartłomieja Nowodworskiego w Krakowie, po wojnie był starszym asystentem w Zakładzie Fizyki Doświadczalnej UJ a później adiunktem w Katedrze Fizyki na Wydziale Hutniczym AG. W latach sześćdziesiątych był kierownikiem Zakładu Badań Dielektryków Katedry Fizyki I, a później Kierownikiem Zakładu Fizyki Ciała Stałego na Wydziale Metalurgicznym AGH.

¹³ **Stefan Szymon Rozental** (1903-1994) studiował fizykę i matematykę, wykonał doświadczalną pracę doktorską, której tematyka odnosiła się do zagadnień, nad którymi pracował wówczas prof. Zakrzewski, ale promotorem pracy był Władysław Natanson. Wkrótce wyjechał do Lipska, gdzie pracował u Wernera Heisenberga, a w 1939 r. do Kopenhagi, gdzie został prywatnym asystentem Nielsa Bohra, a później profesorem w Instytucie Fizyki Teoretycznej.

¹⁴ **Jan Wesołowski** (1902-1982) był asystentem w Zakładzie Fizyki UJ. W 1937 r. odbywał staż naukowy w Paryżu u Pierra Augera, gdzie zainteresował się badaniami promieniowania kosmicznego. Egzamin doktorski złożył konspiracyjnie w 1943 r. W 1948 r. przeniósł się do Uniwersytetu Wrocławskiego gdzie został kierownikiem Katedry Fizyki Doświadczalnej.

¹⁵ **Aleksy Jagielski** (1903-1988) pracował jako zastępca asystenta w Zakładzie Fizyki AG a później jako asystent w Zakładzie Fizyki UJ. Obronił doktorat u profesora Zakrzewskiego, współpracował z Janem Wesołowskim nad zastosowaniem fal elektronów do badania powierzchni ciał. Po wojnie został kierownikiem Zakładu Fizyki w Wyższej Szkole Rolniczej w Krakowie.

¹⁶ **Jerzy Gierula** (1917-1975) od czerwca 1939 r., będąc jeszcze studentem, pracował jako młodszy asystent u prof. Konstantego Zakrzewskiego, w czasie wojny prowadził zakład zegarmistrzowski i przygotowywał rozprawę magisterską, którą obronił już po wojnie, po czym podjął pracę jako asystent w Katedrze Fizyki Doświadczalnej UJ. W 1950 obronił pracę doktorską *Angular distribution of Compton coincidences*, napisaną pod kierunkiem Mariana Mięsowicza i rozpoczął pracę w Akademii Górniczo-Hutniczej w Krakowie jako adiunkt w II Katedrze Fizyki. W latach 1951-1956 był kierownikiem Katedry Fizyki w Wojskowej Akademii Technicznej w Warszawie. Od 1956 pracował w Instytucie Badań Jądrowych w Warszawie, a także w krakowskim oddziale Instytutu Badań Jądrowych jako kierownik Zakładu Fizyki Jądrowej Wysokich i Średnich Temperatur.

¹⁷ **Ludwik Kozłowski** (1907-1991) studiował fizykę i matematykę, był asystentem w Seminarium Fizyki Teoretycznej UJ, od 1934 r. nauczycielem w prywatnym Gimnazjum w Radzyminie.

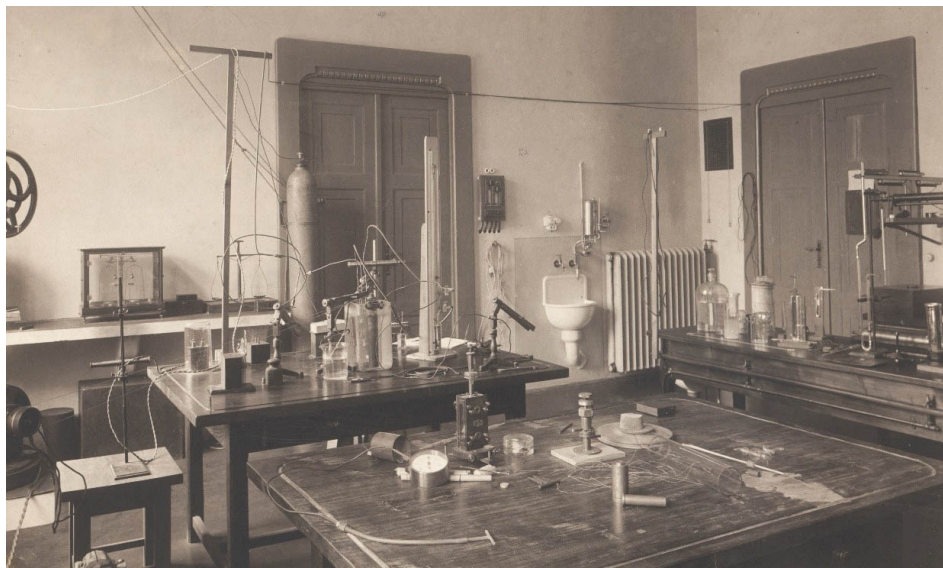
dziesiąt publikacji naukowych z afiliacją Uniwersytetu Jagiellońskiego. W tym okresie tematyka prac realizowanych w Katedrze Fizyki Doświadczalnej uległa zdecydowanej zmianie. Zajmowano się badaniami polaryzacji dielektryków, zagadnieniami lepkości i dyfrakcją elektronów, tym samym rozpoczynając w Polsce badania w dziedzinie fizyki ciała stałego. Wśród najbardziej spektakularnych osiągnięć zrealizowanych przez krakowską grupę uczonych można wymienić *opracowanie nowego typu kondensatora, w którym ciało badane jest oddzielone od okładek warstwą dielektryka, a więc w którym można badać substancje atakujące okładki* [2, s. 375], a także wykrycie niewytłumaczonego dotychczas „quasidipolowego” zachowania się pierwiastków z grupy chlorowców. Pracami swoich uczniów i współpracowników kierował prof. Zakrzewski dyskretnie, podsuwając im interesujące problemy badawcze, niekiedy sugerując trafne rozwiązania problemów doświadczalnych. Również sam podejmował kolejne wyzwania naukowe: zajmował się badaniami nad efektem Kerra, promieniowaniem kosmicznym, czy doświadczalnym sprawdzeniem praw Kirchhoffa. Jeśli dodamy do tego interesujące wyniki uzyskane przez Mieczysława Jeżewskiego i Mariana Mięśowicza – którzy najpierw związani byli z Uniwersytetem, a później podjęli pracę w Zakładzie Fizyki Akademii Górniczej (późniejszej AGH) w Krakowie, odnośnie do własności elektrycznych ciekłych kryształów, które doprowadziły do odkrycia wpływu pola elektrycznego i magnetycznego na stałą dielektryczną i inne własności ciał – to otrzymamy obraz pracy w prężnym ośrodku naukowym, który mimo skromnych funduszy i niedostatków sprzętowych próbował dorównać świetnie zorganizowanym placówkom zagranicznym. Przykładem mogą być również niesamowite wysiłki Zakrzewskiego, który z ocalałych elementów przyrzędów naukowych, w ostatnich latach swojego życia podjął próbę zbudowania aparatury do badań polaryzacji światła w procesie emisji. Prace nad otrzymaniem krótkich słabo tłumionych fal elektromagnetycznych, które prowadził wraz z Marianem Mięśowiczem, doprowadziły do otrzymania tzw. fali silnie obciętej (lub słabo tłumionej), realizując po raz pierwszy zasadę falowodu.

Zainicjowane przez prof. Zakrzewskiego badania nad dielektrykami kontynuowali jego uczniowie, mimo że wielu z nich trafiło po drugiej wojnie światowej do zupełnie nowych, często dopiero tworzonych ośrodków naukowych. Można więc śmiało powiedzieć, że był on nie tylko pionierem tych badań, ale również stał się twórcą szkoły fizyków, która nie ograniczała się do środowiska krakowskiego, ale objęła swoim wpływem wiele placówek naukowych zarówno w Polsce, jak i za granicą.

Tadeusz Piech we wspomnieniach o Konstancym Zakrzewskim napisał, że Profesor *odznaczał się niezwykłą skromnością, wzbraniając się zawsze przed obejmowaniem zaszczytnych godności i stanowisk uniwersyteckich. Raz tylko zdołano go nakłonić do objęcia stanowiska Dziekana Wydziału Filozoficznego UJ w roku akademickim 1928/29. Pozostawił wtedy po sobie pamięć człowieka nie-*

Promotorem jego pracy doktorskiej był prof. Konstancjusz Zakrzewski. Po wojnie został profesorem i kierownikiem Katedry Fizyki Ciała Stałego AGH.

zwykle taktownego, sprawiedliwego, podchodzącego do spraw urzędowych nie rygorystycznie, ale z pełnym wyrozumienia sercem [2, s. 377]. Natomiast w innej publikacji Piech zwraca uwagę, że Profesor był inicjatorem i dobrym duchem większości prac naukowych realizowanych w Zakładzie Fizycznym, ale nie pozwalał umieszczać swojego nazwiska wśród współautorów publikacji, chociaż nieraz słusznie mu się to należało. Nie narzucał również tematów, ani metod ich rozwiązywania, bo badaniami swoich współpracowników kierował dyskretnie, pozwalając w ten sposób rozwijać się młodym adeptom nauki, a równocześnie zachowując indywidualizm każdego z nich [6, s. 255].



Fot. 2. Pracownia profesora Zakrzewskiego w Collegium Witkowskiego (ul. Gołębia 13)

Profesor Zakrzewski prowadził wykłady nie tylko z fizyki doświadczalnej, ale również z fizyki teoretycznej, z olbrzymim zaangażowaniem kierował działalnością obu pracowni studenckich, często hospitował prowadzone w nich prace laboratoryjne, a w ramach II Pracowni Fizycznej, przeznaczonej do badań zaawansowanych, prowadził osobiście niektóre zajęcia, zapraszając studentów do swojego laboratorium. Zdawał sobie sprawę z tego, że brakuje podręczników do nauki fizyki (zwłaszcza skryptów akademickich w języku polskim), dlatego już w 1906 r. przygotował rękopis skryptu *Fizyka doświadczalna*¹⁸, który po powieleniu na matrycach trafił w ręce studentów i stał się nieocenionym wsparciem podczas studiowania fizyki doświadczalnej. Kolejnym podręcznikiem, który opracował wspólnie z Augustem Witkowskim, był *Zarys fizyki*¹⁹ wydany po raz pierwszy we Lwowie w 1916 r. Publikacja ta była skróconym wydaniem dzieła Augusta Witkowskiego, uzupełnionym przez Zakrzewskiego poprzez dodanie bogato ilustro-

¹⁸ Zakrzewski K., *Fizyka doświadczalna według wykładów prof. dra Zakrzewskiego. Część I*. Lwów 1906 (Rękopis powielany na matrycach).

¹⁹ Witkowski A., Zakrzewski K., *Zarys fizyki*. Lwów 1916.

wanego rozdziału pt. *Światło*. W zamyśle autorów podręcznik ten przeznaczony był przede wszystkim dla studentów pierwszego roku fizyki, ale również dla studentów innych kierunków np. medycyny, rolnictwa czy przyrody. *Zarys fizyki* był wielokrotnie wznawiany, a kolejne wydania różniły się od pierwowzoru, bo Zakrzewski uzupełniał je informacjami o najnowszych osiągnięciach nauki; np. w czwartym wydaniu z 1939 r. znalazły się rozdziały poświęcone postępowi nauki w zakresie budowy materii i własności promieniowania oraz elementy nauki o kwantach. Podręcznik cieszył się wśród studentów dużą popularnością jeszcze w okresie powojennym, dość zauważyć, że przedmowę do szóstego wydania tej książki napisał w 1951 r. prof. Jan Weysenhoff. Z myślą o uczniach wyższych klas gimnazjalnych profesorowie Zakrzewski i Natanson wydali najpierw jednotomowe *Wiadomości z nauki fizyki*²⁰, a później składający się z trzech części podręcznik *Nauka fizyki*²¹. Omawiając osiągnięcia prof. Zakrzewskiego, nie sposób pominąć dwóch bardzo ważnych publikacji specjalistycznych. Pierwsza z nich, zatytułowana *O promieniotwórczości*²², została wydana nakładem Polskiej Akademii Umiejętności w 1930 r. i przedstawiała aktualny stan wiedzy dotyczący promieniotwórczości materii, niezwykle prędko rozwijającej się wówczas dziedziny fizyki. Był to, do czasu przetłumaczenia dzieła Marii Skłodowskiej-Curie, najobszerniejszy wykład tego przedmiotu, jaki ukazał się w języku polskim. Promieniotwórczością interesował się Zakrzewski już wcześniej, bo w 1925 r., w publikacji dedykowanej Marii Skłodowskiej-Curie, *O leczeniu promieniami radium*²³, wydanej wspólnie z Henrykiem Wachtelem, dyrektorem Instytutu Leczenia Radem w Warszawie, zamieścił rozdział *O pierwiastkach promieniotwórczych*. Jeśli do powyższej listy publikacji prof. Zakrzewskiego dodamy liczne artykuły przeglądowe i popularnonaukowe, a także szkice biograficzne o Augustie Witkowskim i Marianie Smoluchowskim, czy interesujący artykuł *O skropleniu składników powietrza* (z 1933 r.)²⁴, w którym nawiązuje do osiągnięć krakowskich uczonych – Zygmunta Wróblewskiego i Karola Olszewskiego, to zobaczymy obraz uczonego mądrego, pracowitego, zaangażowanego i niezwykle twórczego²⁵. Dodajmy jeszcze, że Profesor był aktywnym działaczem i wielo-

²⁰ Natanson W., Zakrzewski K., *Wiadomości z nauki fizyki*. Lwów 1922. W Oddziale Rękopisów Biblioteki Jagiellońskiej znajduje się maszynopis z ostateczną redakcją tej publikacji, wraz z wycinkami z książki W. Natansona pt.: *Wiadomości z nauki fizyki dla szkół wydziałowych* (wyd. 2, Lwów 1902) oraz poprawkami i uzupełnieniami naniesionymi przez obydwóch autorów. Do tych materiałów dołączono odbitki z klisz wykonane na kalce technicznej lub na papierze z 56 ilustracjami przeznaczonymi do zamieszczenia w podręczniku (Inwentarz rękopisów Biblioteki Jagiellońskiej, 8001-9000, część 2, nr 8501-9000, s. 568).

²¹ Natanson W., Zakrzewski K., *Nauka fizyki: podręcznik przeznaczony do użytku uczniów klas wyższych szkół średnich. T. 1-3*, Warszawa 1921, 1922, 1925.

²² Zakrzewski K., *O promieniotwórczości*. Kraków 1930.

²³ Zakrzewski K., Wachtel H., *O leczeniu promieniami radium*. Kraków 1925.

²⁴ Zakrzewski K., *Historia skroplenienia składników powietrza*. Przegląd Techniczny, t. 72 (1933), nr 17, s. 411-417.

²⁵ Pełną listę publikacji prof. Konstantego Zakrzewskiego znajdziemy w artykule: Piech T., *Konstanty Zakrzewski 1876-1948*. APP, Vol. 9 (1948), nr 2-4, s. 65-70.

letnim członkiem zarządu Towarzystwa Naukowego im. M. Kopernika, a także współzałożycielem Polskiego Towarzystwa Fizycznego i pierwszym przewodniczącym Krakowskiego Oddziału PTF. Z jego inicjatywy utworzono w Polskiej Akademii Umiejętności Komisję Stacji Badań Promieniowania Kosmicznego, która koordynowała i w miarę możliwości finansowała badania i pomiary prowadzone w tym zakresie, zwłaszcza w laboratorium utworzonym w podziemiach kopalni soli w Wieliczce.

Niezwykle trudny był dla pracowników Uniwersytetu Jagiellońskiego pięcioletni okres wojenny. Zamknięta uczelnia, zajęte przez Niemców Collegium Witkowskiego, zniszczone urządzenia i aparatura, zlikwidowana biblioteka, aresztowanie profesorów podczas Sonderaktion Krakau, śmierć wielu wybitnych uczonych w niemieckich obozach koncentracyjnych. I właśnie w tych nieludzkich warunkach ujawnił się jeszcze jeden niesamowity talent profesora Zakrzewskiego, o czym jego uczeń Tadeusz Piech napisał: *W ponurych dniach okupacji dom Państwa Zakrzewskich stał się miejscem, gdzie można było zawsze znaleźć i radę w trudnych sytuacjach, i otuchę na przyszłość, a nierzadko i pomoc materialną. W stworzeniu tej prawdziwie rodzinnej atmosfery dzielnie pomagała Profesorowi jego żona, znana literatka Helena Zakrzewska*²⁶ [2, s. 377]. Ta niezwykle serdeczna postawa Profesora i jego żony jest godna podkreślenia, bo ich samych okupacyjny los dotknął szczególnie boleśnie. Podczas wojny stracili dwóch synów: Kazimierza, profesora Uniwersytetu Warszawskiego, który został rozstrzelany w 1941 r. w Palmirach pod Warszawą²⁷, oraz Władysława, inżyniera architekta, który zmarł w obozie koncentracyjnym Gross Rosen. Wojnę przeżyła tylko córka Zakrzewskich, Maria²⁸.

Podczas okupacji niemieckiej Zakład Fizyczny pozostawał zamknięty, ale jego działalność nie zamarła. Gdy na Uniwersytecie Jagiellońskim zorganizowano tajne nauczanie, wszyscy przedwojenni pracownicy Zakładu brali w nim udział, prowadząc zajęcia dla studentów Wydziału Filozoficznego i Lekarskiego.

²⁶ **Helena Zakrzewska** (1880-1952) żona prof. Konstantego Zakrzewskiego. Polska pisarka, autorka książek dla dzieci i młodzieży. Jej twórczość przesycona była elementami patriotycznymi i ojczyźnianymi, dlatego w okresie PRL-u jej książki były niedostępne. Ponownie zostały wydane w latach 90. XX wieku. Najbardziej znane utwory to: *Białe róże* (1922), *Dzieci Lwowa* (1919), *Płomień w śniegu* (1929), *Zakłęty dwór* (1923), *Zasypana sztolnia* (1946).

²⁷ Wydarzenie to wspomina Jan Markiewicz: *Profesor [Konstanty Zakrzewski] miał opinię człowieka surowego i oschłego. Po kilku „wizytach” opinia ta nie wytrzymała próby życia. Nasz wykładowca okazał się miłym, a w miarę – nawet serdecznym, starszym panem, bardzo życzliwym dla nas. Jednego dnia zdawał się prowadzić zajęcia w stanie większego rozrządzenia, a oczy jego były bardziej niż zwykle zaczerwienione. Nie wiedzieliśmy jeszcze wówczas, że w dniu tym otrzymał profesor wiadomość o rozstrzelaniu syna przez hitlerowskich okupantów. Niepospolity hart ducha tego wielkiego Polaka Patrioty nakazał mu w tak tragicznej chwili życia poprowadzić normalne zajęcia konspiracyjnego uniwersytetu* [7, s. 334].

²⁸ **Maria Kapiszewska** (1907-1987) córka Konstantego i Heleny Zakrzewskich. Działaczka harcerska i redaktorka czasopism harcerskich. Podczas wojny organizowała harcerstwo w Londynie i na terenie Francji. W 1947 r. wraz z mężem Henrykiem Kapiszewskim, powróciła do kraju. Ich synem był Andrzej Kapiszewski (patrz: Przyp. 1).

Jan Markiewicz²⁹, wojenny student chemii, wspominał po latach: *Dostałem niebyle zaszczytu, kiedy z grupy słuchaczy I roku tajnego kompletu chemicznego zostałem przydzielony do prof. dra Konstantego Zakrzewskiego. Takich szczęśliwców było czterech. Zostali podzieleni na dwuosobowe zespoły, które regularnie odwiedzały profesora w jego mieszkaniu przy ulicy Siemiradzkiego. Trzeba dodać, że mieszkanie to mieściło się około 100 m od siedziby groźnej policji hitlerowskiej. [...] Trzeba podziwiać wielką odwagę profesora, że w podobnych warunkach zdecydował się na osobiste prowadzenie zajęć z chemikami. Dość specyficzne to były zajęcia. [...] Pamiętam, jak raz profesor chciał nam pokazać pod mikroskopem ruchy Browna. [...] Profesor przygotował preparat i przyznam, że oglądałem pod mikroskopem biegające kuleczki tłuszczu z zachwytem i wielkim nabożeństwem. [...] Bezpośredni kontakt z profesorem, którego nie oddzielał od nas dystans katedry ani jakiegoś podium, wytwarzał jakiś szczególny stosunek pomiędzy nami. Mam wrażenie, że bardziej czuliśmy się wówczas jego uczniami, a on naszym nauczycielem, niż kiedykolwiek w czasie normalnych zajęć uniwersyteckich. Byliśmy bowiem wspólnie z nim w konspiracji i w każdej chwili groziły obu stronom surowe sankcje ze strony okupanta w przypadku dekonspiracji kompletów [7, s. 333-334].*



Fot. 3. Uroczyste otwarcie I Międzynarodowej Konferencji Promieni Kosmicznych (Kraków, październik 1947 r.), w którym wziął udział prof. K. Zakrzewski, pełniący wówczas funkcję kierownika Zakładu Fizyki UJ (na zdjęciu prof. J. Weyssenhoff wita zebranych gości, prof. Zakrzewski siedzi z lewej strony)

²⁹ **Jan Markiewicz** (1919-1996), chemik i toksykolog. Studia chemiczne podjął na Tajnym Uniwersytecie Jagiellońskim w 1943 roku, ale ukończył je już po wojnie. Jeszcze jako student rozpoczął w 1946 roku pracę w charakterze młodszego asystenta w Zakładzie Chemii Lekarskiej UJ, podejmując jednocześnie pracę w Instytucie Ekspertyz Sądowych, z którym związany był przez blisko 50 lat.

Natychmiast po wyzwoleniu Krakowa prof. Zakrzewski i jego współpracownicy, Stefan Fabiani, Aleksy Jagielski i Jan Wesołowski, zajęli się uporządkowaniem zdewastowanego przez Niemców Collegium Witkowskiego, a kiedy udało im się odzyskać przyrządy potrzebne do demonstracji, uruchomili pracownie studenckie i można było rozpocząć wykłady z fizyki. Stało się to już w marcu 1945 r., mimo że w Krakowie życie nie wróciło jeszcze do normalności. Wkrótce wznowiono również działalność naukową. Nieliczne wówczas krakowskie środowisko fizyków, które obejmowało trzech profesorów (Konstanty Zakrzewski, Jan Weysenhoff i związany już wówczas z AG Mieczysław Jeżewski) i jednego docenta (Marian Mięśowicz z AG), zostało wkrótce wzmocnione, bo z Wilna przybył na Uniwersytet prof. Henryk Niewodniczański, a z Lublina prof. Jan Błaton. Dzięki staraniom prof. Zakrzewskiego uruchomiono na Uniwersytecie II Katedrę i Zakład Fizyki Doświadczalnej, którym kierował Henryk Niewodniczański, a przy Katedrze Fizyki Teoretycznej, kierowanej przez prof. Jana Weysenhoffa, utworzono Zakład Mechaniki Teoretycznej z kierownikiem Janem Błatonem. Profesor Zakrzewski osiągnął już wówczas wiek emerytalny, ale wzięwszy pod uwagę jego aktywność naukową i dydaktyczną, a przede wszystkim potrzeby kadrowe powojennego Uniwersytetu, ministerstwo przesunęło termin jego przejścia na emeryturę, więc nadal kierował I Zakładem Fizyki Doświadczalnej UJ. Zmarł niespodziewanie, podczas pracy, 19 stycznia 1948 r.

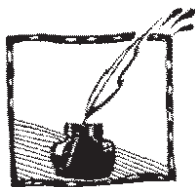
W 1999 r., w czasie obrad XXXV Zjazdu Fizyków Polskich, prof. Andrzej Kajetan Wróblewski, wybitny specjalista zajmujący się od lat historią fizyki, przedstawił interesujący referat, w którym scharakteryzował działalność polskich fizyków, zwłaszcza ich wkład do światowej nauki XX wieku. Oprócz Marii Skłodowskiej-Curie i czterech naukowców, którzy dokonali odkryć na miarę Nagrody Nobla (Marian Smoluchowski, Marian Danysz, Jerzy Pniewski, Karol Olszewski) wymienił 17 uczonych polskich, należących do liderów światowej fizyki³⁰. Wśród nich znalazło się także nazwisko prof. Konstantego Zakrzewskiego. Profesor Wróblewski docenił osiągnięcia naukowe Konstantego Zakrzewskiego, zauważył również, że nazwisko uczonego można znaleźć w obcojęzycznych opracowaniach historycznych. Niewątpliwie wziął pod uwagę również to, że prof. Zakrzewski był, zwłaszcza w okresie międzywojennym, liderem krakowskiego ośrodka fizyki doświadczalnej. [8, s. 52].

Bibliografia:

- [1] Teresa Bętkowska. *Przybliżyć Polakom świat – a światu Polskę*. [Alma Mater](#). Nr 91 (2007), s. 14-19.
- [2] Piech Tadeusz (1958) *W 10 rocznicę śmierci profesora Konstantego Zakrzewskiego*. *Postępy Fizyki*. T. IX, z. 4, s. 371-378.

³⁰ A.K. Wróblewski wymienia następujące nazwiska: Czesław Białobrzeski, Tadeusz Godlewski, Leopold Infeld, Aleksander Jabłoński, Mieczysław Jeżewski, Marian Mięśowicz, Władysław Natanson, Arkadiusz Piekara, Stefan Pieńkowski, Wojciech Rubinowicz, Andrzej Sołtan, Leonard Sosnowski, Zdzisław Szymański, Ludwik Wertenstein, August Witkowski, Mieczysław Wolfke, Konstanty Zakrzewski [7, s. 51-52].

- [3] Strzałkowski Adam, *Konstanty Zakrzewski (1876-1948)*. W: Uniwersytet Jagielloński. Złota Księga Wydziału Matematyki i Fizyki. Red. B. Szafirski, Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków 2000, s. 468-474.
- [4] Wróblewski Andrzej Kajetan, *Fizyka*, [W:] Akademia Militans. Uniwersytet Jana Kazimierza we Lwowie, red. Adam Redzik, wyd. 2, popr., Wydawnictwo Wysoki Zamek, Kraków 2017, s. 704-728.
- [5] Średniawa Bronisław (2001), *Historia filozofii przyrody i fizyki w Uniwersytecie Jagiellońskim*. Wydawnictwo Retro-Art, Warszawa 2001.
- [6] Piech Tadeusz, *Zarys historii katedr fizyki Uniwersytetu Jagiellońskiego*. W: Studia z dziejów katedr Wydziału Matematyki, Fizyki, Chemii Uniwersytetu Jagiellońskiego. red. S. Gołąb, Nakładem Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków 1964. s. 223-270.
- [7] *Ne Cedat Academia. Kartki z dziejów tajnego nauczania w Uniwersytecie Jagiellońskim 1939-1945*. Opr. Maria i Alfred Zarębowie, Wydawnictwo Literackie, Kraków 1975.
- [8] Andrzej Kajetan Wróblewski, *Fizyka w Polsce wczoraj, dziś i jutro*. Materiały XXXV Zjazdu Fizyków Polskich – Białystok 1999, cz. II. Postępy Fizyki. T. 51 (1999), Zeszyt dodatkowy, s. 44-54.



Phyphox – urządzenie pomiarowe w obudowie telefonu lub tabletu

Tomasz Greczyło
Uniwersytet Wrocławski

Wprowadzenie

Postęp technologii informacyjno-komunikacyjnych (TIK) wydaje się nie mieć końca. Sprzedawcy przenośnych urządzeń mobilnych oferują coraz mniejsze i coraz sprawniejsze urządzenia. Zgodnie z badaniami tzw. *smartfonizacji*¹ już 64% Polaków posiada smartfon a 13% tablet, co przekłada się na łączną liczbę ponad 25 mln urządzeń. Okazuje się także, że coraz częściej korzystamy z nich w ciągu dnia, co przedstawia rys. 1.



Rys. 1. Procent czasu spędzanego na korzystaniu z urządzeń mobilnych (infografika za [1])

Dostęp do informacji jest powszechny. Co ważne, w każdej polskiej szkole znajduje się przynajmniej jedna pracownia komputerowa z dostępem do sieci Internet (już wkrótce z łączem szerokopasmowym), a jakieś urządzenie umożliwiające swobodne poruszanie się w wirtualnej rzeczywistości ma niemal każdy.

Wprawdzie rzesze użytkowników technologii wykorzystują ją do znanego z anegdot i memów „oglądania kotków”, jednak są też tacy, którzy tworzą aplikacje niewątpliwie usprawniające życie ich użytkowników. W tym kontekście nadzieją napawa fakt, że choć w większości szkół generalnie kategorycznie zabrania się korzystania z telefonów komórkowych, to dopuszcza się ich użycie do celów związanych z bezpieczeństwem oraz **edukacją**. Edukatorzy mają świadomość, że technologia silnie wpływa na rozwój emocjonalny i poznawczy młodego pokolenia tzw. „cyfrowych tubylców”² i dlatego coraz głośniejsze zachęcają osoby

¹ POLSKA.JEST.MOBI 2018, 4 edycja raportu.

² M. Prensky, Digital Natives, Digital Immigrants, *From On the Horizon*, 2001, Vol. 9 No. 5.

oraz instytucje zajmujące się edukacją młodego pokolenia do wszechstronnego wykorzystywania zdobyczy techniki.

Potrzebę zmian i wzbogacania warsztatu pracy nauczyciela potwierdzają prowadzone od wielu lat na całym świecie badania edukacyjne³. Nie oznacza to oczywiście, że technologię trzeba wciskać na lekcje drzwiami i oknami – zwyčajnie należy ją wykorzystywać, jeśli przynosi wymierne korzyści. Nie da się o tym przekonać bez autentycznego zaangażowania – projektowania i prowadzenia działań, w których TIK jest wykorzystywana⁴. W przypadku lekcji fizyki działania te są nieodłącznie związane na przykład z prowadzeniem samodzielnych badań oraz opisywaniem i wnioskowaniem na ich podstawie⁵. Umiejętności doświadczalne stanowią kluczowy komponent kompetencji przyrodniczych. Wykorzystanie narzędzi TIK, głównie telefonów komórkowych i tabletów, może stać się inspiracją do kontekstowego ilustrowania i badania zjawisk dotąd wymagających odpowiednich warunków bądź specjalistycznego sprzętu.

W takim kontekście na szczególną uwagę zasługuje aplikacja o nazwie **phyphox**⁶ dostępna na urządzenia pracujące z systemem operacyjnym Android⁷ oraz iOS⁸. Celem artykułu jest prezentacja podstawowych funkcji aplikacji, której nazwa jest akronimem wyrażenia *physics phone experiments* – fizyczne eksperymenty z telefonem. Autor artykułu współpracuje z twórcami aplikacji nad tłumaczeniem jej interfejsu użytkownika oraz opisów doświadczeń na język polski i jest ambasadorem tego wyjątkowego narzędzia wspomagającego nauczanie – uczenie się fizyki. W listopadzie 2018 roku zespół świętował półmilionową instalację aplikacji – rys. 2.



Rys. 2. Podziękowanie od Zespołu physphox za 500 000 instalację (infografika za [1])

³ Michael J. Reiss, *Framing the secondary science curriculum Beyond 2020: ten questions for science education*, SSR, Sept. 2018, 100(370).

⁴ <http://warsztatpracynauczycieli.blogspot.com/2018/01/technologie-w-nauczaniu-model-samr.html> (dostęp 11.12.2018).

⁵ D. Sokołowska, *Ewolucyjny proces implementacji IBSE w szkołach, na podstawie „Learning Through Inquiry”* (2012) M. Artigue, J. Dillon, W. Harlen, P. Lena, wydanej w ramach Projektu Fibonacciego, dotyczącego implementacji na szeroką skalę metodologii odkrywanie przez rozumowanie w naukach przyrodniczych (IBSE). The Fibonacci Project – <http://www.fibonacciproject.eu/> (2010-2013).

⁶ <http://phyphox.org/> (dostęp 14.12.2017).

⁷ Android, Google Play są znakami towarowymi Google Inc.

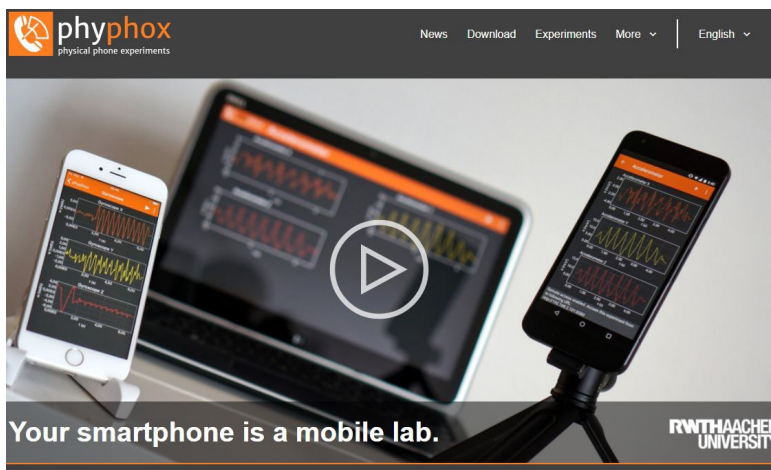
⁸ iOS, iPhone OS, AppStore są znakami towarowymi Apple Inc.

Projekt phyphox

Projekt phyphox powstał w II Instytucie Fizyki Uniwersytetu RWTH Aachen w Niemczech dzięki działaniom zespołu w składzie:

- Sebastian Staacks – odpowiedzialny za koncepcję i rozwój projektu,
- Christoph Stampfer – pracujący nad koncepcją projektu,
- Jonas Gessner – zajmujący się implementacją iOS,
- Frank Posthoff – odpowiedzialny za stronę graficzną przedsięwzięcia.

Najważniejsze informacje na temat projektu phyphox znaleźć można na stronie: <http://phyphox.org/> dostępnej w języku angielskim i niemieckim. Rysunek 3 przedstawia widok fragmentu strony.



Rys. 3. Widok fragmentu strony www projektu phyphox (dostęp 14.12.2017)

Charakterystyka aplikacji

Phyphox jest bezpłatną, ogólnodostępną na platformie Google Play⁷ oraz AppStore⁸ aplikacją, którą wyróżnia:

- wielojęzyczny interfejs użytkownika,
- współpraca z wbudowanymi czujnikami urządzeń mobilnych oraz wybranymi czujnikami w technologii Bluetooth,
- zbiór (stale poszerzany) gotowych do użycia doświadczeń podzielonych tematycznie,
- strona internetowa, na której znaleźć można wiele dodatkowych informacji m. in. filmy instruktażowe, materiały dydaktyczne oraz dedykowany kanał YouTube,
- możliwość eksportowania danych do dalszej obróbki w wielu popularnych formatach m. in. xlsx, CSV,
- możliwość zdalnego kontrolowania eksperymentu poprzez sieć Wi-Fi,
- szata graficzna i funkcjonalność interfejsu użytkownika.

Instalowanie aplikacji

Aplikację phyphox należy pobrać na urządzenie mobilne i zainstalować zgodnie ze standardowymi procedurami systemu operacyjnego urządzenia. Po zakończeniu instalacji na pulpicie urządzenia pojawi się ikona aplikacji.

phyphox



Rys. 4. Nazwa i ikona aplikacji phyphox⁹

Po pomyślnym zainstalowaniu aplikacji i jej uruchomieniu użytkownik ma do dyspozycji ćwiczenia (rys. 5):

- umożliwiające uzyskanie tzw. surowych danych rejestrowanych przez poszczególne czujniki (lista *Surowe dane*),
- wykorzystujące mikrofon urządzenia (lista *Akustyka*),
- związane z aspektami ruchu (lista *Mechanika*),
- wykorzystujące pomiar czasu (lista *Czasomierze*),
- zawierające narzędzia (lista *Narzędzia*),
- nawiązujące do przykładów z życia codziennego (lista *Życie codzienne*).



Rys. 5. Widoki poszczególnych grup ćwiczeń w panelu aplikacji phyphox

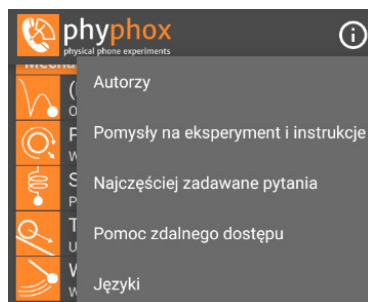
⁹ Wszystkie symbole są znakami towarowymi ich właścicieli.

Doświadczenia, których opisy wyświetlane są w głównym oknie dialogowym w kolorze szarym, nie są aktywne ze względu na brak w urządzeniu czujnika niezbędnego do ich przeprowadzenia. W ilustrowanych przykładach, w związku z brakiem czujnika ciśnienia, sytuacja taka ma miejsce w przypadku ćwiczenia *Ciśnienie* – rys. 5 – oraz ćwiczenia *Winda* – rys. 5.

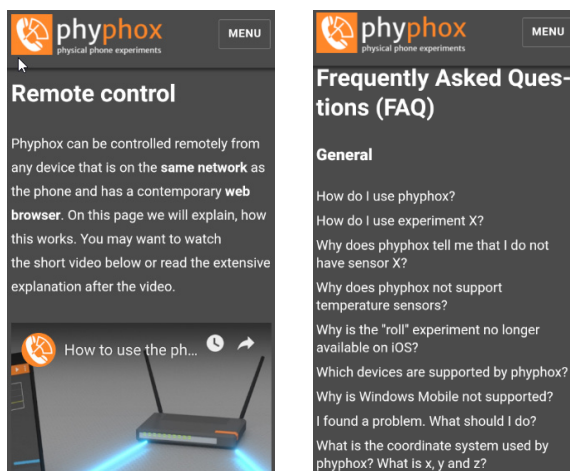
Dodatkowe informacje na temat aplikacji uzyskać można, wybierając symbol informacji (litera „i” w okręgu) w głównym oknie dialogowym. Rysunek 6 przedstawia widok dostępnych – w pojawiającym się wówczas oknie dialogowym – opcji.

Wybranie poszczególnych opcji umożliwia:

- uzyskanie informacji o zespole twórców projektu,
- zapoznanie się z opisami doświadczeń oraz instrukcjami do nich,
- znalezienie odpowiedzi na często zadawane pytania (rys. 7 z prawej),
- uzyskanie wsparcia dotyczącego zdalnego kontrolowania pomiarów (rys. 7 z lewej),
- określenie języka interfejsu aplikacji.



Rys. 6. Opcje informacji

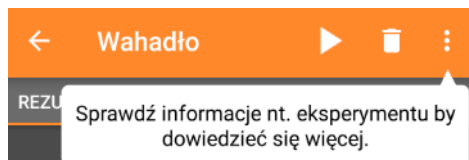


Rys. 7. Widoki kolejnych okien dialogowych wybranych opcji informacji

Zarówno informacje dotyczące zdalnego sterowania, jak i odpowiedzi na najczęściej zadawane pytania, prezentowane są na anglojęzycznej stronie internetowej, z którą łączy się urządzenie.

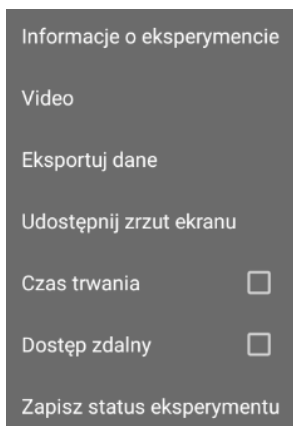
Praca w ćwiczeniu phyphox

Pracę z konkretnym ćwiczeniem rozpoczyna się po wybraniu jego nazwy na ekranie dotykowym urządzenia. Rysunek 8 przedstawia widok ekranu tuż po uruchomieniu ćwiczenia *Wahadło*. Poszczególne elementy górnego paska zostaną szczegółowo przedstawione poniżej, na rysunkach 9 i 10.

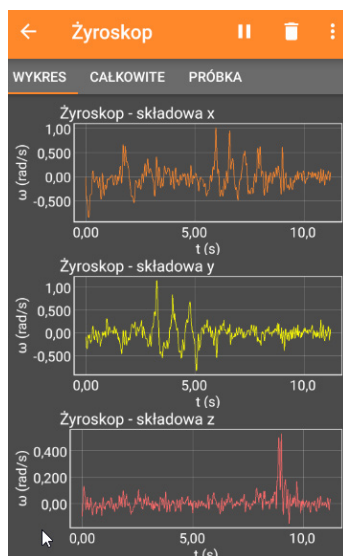
Rys. 8. Widok okna ćwiczenia *Wahadło*

W najwyższym pasku ćwiczenia znajdują się następujące elementy (od lewej):

- strzałka – służąca do opuszczenia ćwiczenia,
- nazwa ćwiczenia,
- trójkąt **play** rozpoczynający pomiar,
- symbol kosza usuwający wyniki pomiarów,
- symbol trzech kropek, pod którym kryje się dodatkowe okno dialogowe przedstawione na rysunku 9 i omówione poniżej:
 - wyświetla informacje o ćwiczeniu (przykładowy widok okna z informacjami przedstawia rys. 14),
 - włącza dedykowane do ćwiczenia wideo (przykładowy widok filmu przedstawia rys. 14),
 - pozwala wyeksportować dane w postaci pliku arkusza kalkulacyjnego (widok okna przedstawia rys. 13 z prawej),
 - pozwala udostępniać zrzut ekranu,
 - umożliwia ustawienie warunków rozpoczęcia i trwania pomiaru (widok okna przedstawia rys. 11 z lewej),
 - pozwala na zdalny dostęp do ćwiczenia (kolejne okno przedstawia rys. 11 z prawej),
 - zapisuje wyniki eksperymentu (okno dialogowe widoczne na rys. 13 z lewej).



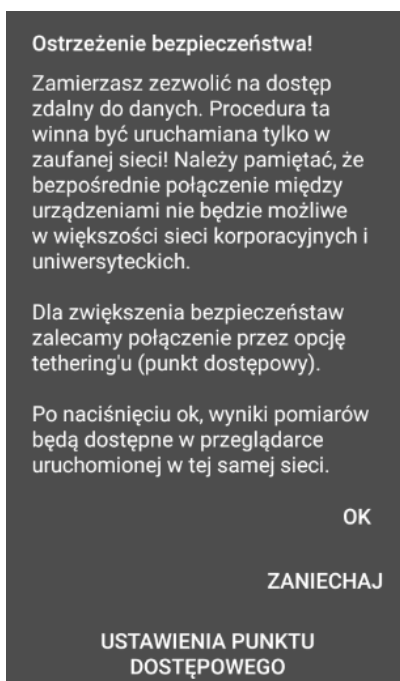
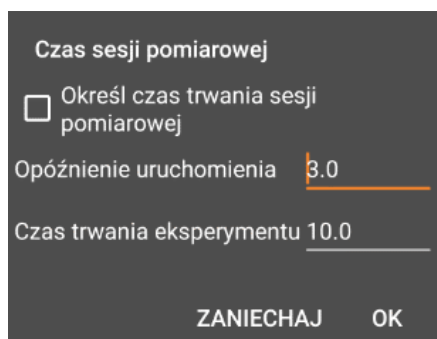
Rys. 9. Menu widoczne po naciśnięciu trzech kropek



Rys. 10. Widok wykresów wizualizujących wyniki pomiarów

Pomiar – rejestrowanie wskazań czujników urządzenia mobilnego – rozpoczyna się automatycznie po naciśnięciu pulsującego w stanie oczekiwania symbolu **play**. Wyniki pomiarów są wizualizowane w czasie rzeczywistym na przygotowanym wykresie bądź wykresach, co na przykładzie ćwiczenia *Żyroskop* przedstawiono na rysunku 10.

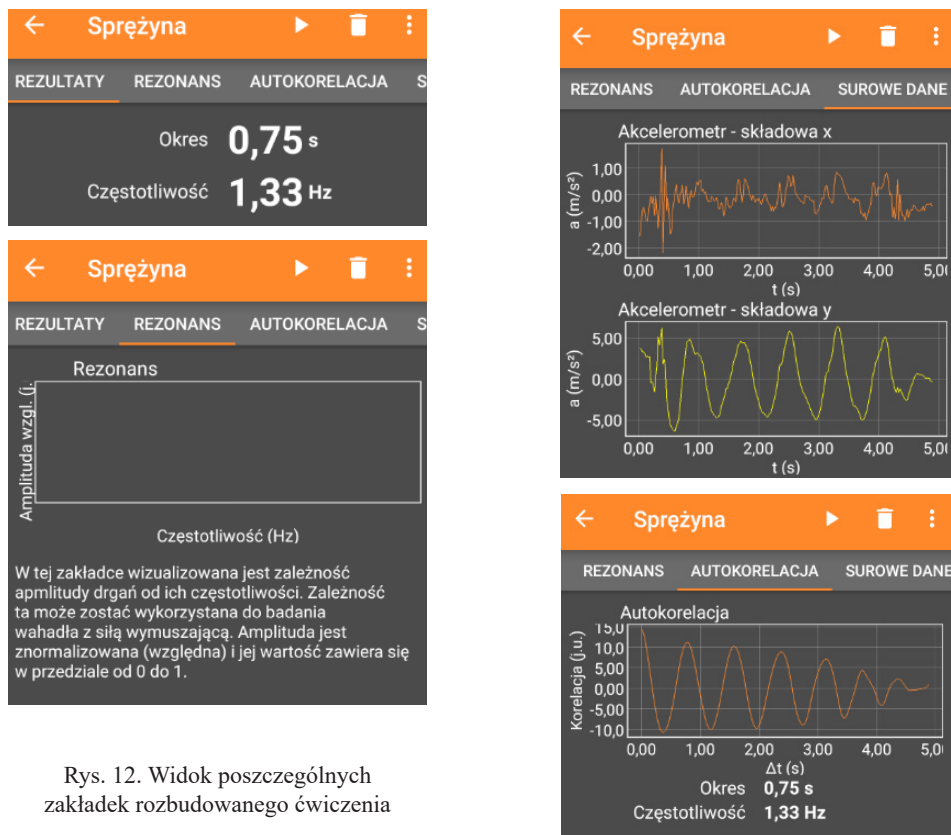
Użytkownik aplikacji ma możliwość ustawienia dodatkowych warunków pomiaru – opóźnienia rozpoczęcia rejestrowania oraz określenia całkowitego czasu trwania, co prezentuje rysunek 11 z lewej. Ponadto, możliwe jest zdalne kontrolowanie pomiaru – widok okna dialogowego w tym przypadku przedstawia rysunek 11 z prawej.



Rys. 11. Okna dialogowe zaawansowanych ustawień pomiaru

Po zaakceptowaniu ostrzeżenia (przycisk OK) na ekranie urządzenia prezentowany jest adres URL, którego wpisanie w przeglądarce innego urządzenia podłączonego do tej samej sieci, co urządzenie pomiarowe, pozwala na zdalne kontrolowanie przebiegu doświadczenia. Opcja ta jest szczególnie pomocna w przypadku wykonywania ćwiczeń, w których urządzenie jest np. zamknięte w puszcze (*Toczenie*) bądź wisi zamocowane do sprężyny (*Sprężyna*).

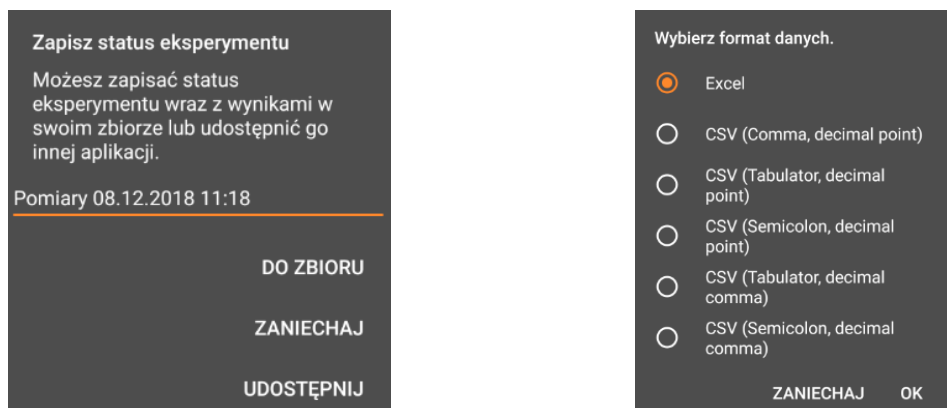
W większości doświadczeń wyniki pomiarów prezentowane są w sposób kompleksowy, w kilku zakładkach, których nazwy – charakterystyczne dla wykonywanego ćwiczenia – widoczne są poniżej omawianego już górnego paska (rys. 8). Przełączenia między poszczególnymi zakładkami dokonuje się, wybierając stosowne nazwy, co przedstawiają zrzuty ekranu – rys. 12 – uzyskane w ćwiczeniu *Sprężyna*.



Rys. 12. Widok poszczególnych zakładek rozbudowanego ćwiczenia

Zapisywanie i przesyłanie danych

Zarejestrowane w ćwiczeniach wyniki pomiarów można zapisać, korzystając z opcji *Zapisz status eksperymentu* oraz wyeksportować do dalszej obróbki z wykorzystaniem opcji *Eksportuj dane* (przedstawionych na rys. 9). Okna dialogowe obu procedur widoczne są na rys. 13.



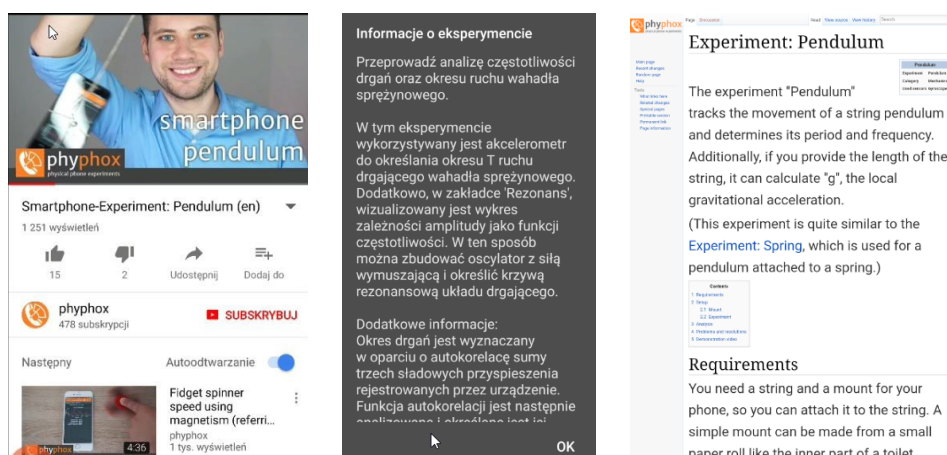
Rys. 13. Okna dialogowe zapisywania i przesyłania danych

Materiały wspomagające

Projekt phyphox wyróżnia kompleksowa obudowa dydaktyczna, na którą składają się następujące elementy:

- materiały dostępne na stronie www, między innymi opisy doświadczeń w postaci wideoinstruktarzu (w języku angielskim) – rysunek 14¹⁰,
- materiały do druku (obecnie tylko w języku niemieckim),
- strony wiki z kompleksowymi informacjami (w języku angielskim) – rysunek 14¹¹.

Dodatkowe informacje są także dostępne bezpośrednio z panelu aplikacji po wybraniu polecenia *Informacje o eksperymencie* oraz *Video*. Poniższe rysunki prezentują widoki okien dialogowych pojawiających się po wybraniu stosownych opcji.



Rys. 14. Materiały wspomagające poszczególne ćwiczenia phyphox

Podsumowanie

Coraz częściej autorzy materiałów dla nauczycieli proponują działania edukacyjne, podczas których wykorzystywane są narzędzia TIK¹². Znajdują one zastosowanie także w trakcie prestiżowych konkursów uczniowskich np. Turnieju Młodych Fizyków czy Olimpiady fizycznej¹³. By jednak korzystanie z oprogramowania takiego jak **phyphox** stało się codziennością szkolną, nie wystarczy dostępność w języku ojczystym i bogaty zbiór ćwiczeń. Edukatorzy, nauczyciele

¹⁰ <http://phyphox.org/experiment/?video=1> (dostęp 08.12.2018).

¹¹ http://phyphox.org/wiki/index.php?title=Main_Page (dostęp 8.12.2018).

¹² K. Błaszczak, J. Borgensztajn, T. Greczyło, A. Kosowska, T. Nowacki, G. Skirmuntt, *Scenariusze lekcji przedmiotów przyrodniczych w szkole podstawowej*, Ośrodek Rozwoju Edukacji, Warszawa 2018

¹³ <http://www.kgof.edu.pl/archiwum/68/of68-1-2.pdf> (dostęp 11.12.2018).

i instytucje wspomagające pracę szkoły winny podejmować szereg dodatkowych czynności¹⁴:

- promować uczenie się przez odkrywanie wzorowane na dociekaniu naukowym (Inquiry Based Science Education - IBSE), rozumiane jako prowadzenie eksperymentów i doświadczeń metodami umożliwiającymi uczniom samodzielne dochodzenie do wiedzy, kształtowanie umiejętności i postaw¹⁵;
- organizować warsztaty pracy uczniów tak, by możliwe było odkrywanie praw przyrody przy jednoczesnym rozbudzaniu ciekawości m. in. prowadzenie obserwacji i eksperymentów, myślenie analityczne oraz twórcze rozwiązywanie problemów;
- organizować nauczanie kontekstowe przejawiające się przede wszystkim w korelacji z codziennymi zjawiskami z życia ucznia, będące w powiązaniu z otaczającym go środowiskiem, przy jednoczesnym kształceniu umiejętności potrzebnych w szkole i poza nią, zwłaszcza w późniejszym życiu codziennym i zawodowym;
- podkreślać interdyscyplinarność kształcenia m. in. poprzez wskazywanie na integrację różnych dziedzin nauk przyrodniczych oraz analizę tych samych zjawisk z punktu widzenia różnych dyscyplin naukowych.

Należy również podkreślić, że korzystanie z TIK w procesie nauczania – uczenia się wiąże się z koniecznością poświęcenia przez nauczyciela znacznej ilości czasu, choćby na zapoznanie się z oprogramowaniem oraz przygotowanie zajęć. Dlatego bardzo ważnym działaniem, które powinno być podejmowane przez organy prowadzące szkoły i instytucje wspierające ich pracę, jest wszechstronne motywowanie nauczycieli do wykorzystania TIK. Wsparcie to powinno iść w parze ze stworzeniem w szkołach warunków do przygotowywania materiałów i narzędzi przez nauczycieli, a także ich gromadzenia oraz powielania, realizowanym na przykład poprzez zapewnienie nauczycielom dodatkowej przestrzeni do pracy (zaplecza i pomieszczenia przedmiotowego), środków technicznych (pracowni przyrodniczych, pomocy dydaktycznych) oraz wsparcie techniczne w osobie nauczyciela wspomagającego¹⁶. Przygotowując propozycje zajęć z wykorzystaniem TIK, należy być świadomym związanych z tym korzyści, ale i zagrożeń.¹⁷

¹⁴ T. Greczyło, *Nowe technologie informacyjno-komunikacyjne w edukacji przyrodniczej*. Raport w ramach projektu Akademia Profesjonalnego Nauczyciela, MSCDN-OEliZK, 2015.

¹⁵ <https://warsztatpracynauczycieli.blogspot.com/2017/12/go-lab-i-nauczanie-przez-dziaanie.html> (dostęp 15.12.2017).

¹⁶ Podstawa programowa przedmiotów przyrodniczych w opiniach nauczycieli, dyrektorów szkół oraz uczniów, Instytut Badań Edukacyjnych, Warszawa 2013.

¹⁷ Radosław Mysior, *Dwa światy – cyfrowi tubylcy, cyfrowi imigranci – cz. I*, Remedium Nr: 7-8/2014 oraz cz. II, Remedium Nr: 9/2014.



Muzeum Podręcznika Biblioteka Główna Uniwersytetu Pedagogicznego w Krakowie

Muzeum Podręcznika jest specjalnie wydzieloną kolekcją zbiorów Biblioteki Głównej, która gromadzi najstarsze podręczniki polskie i zagraniczne. W skład kolekcji wchodzi podręczniki szkolne i akademickie, zeszyty ćwiczeń, samouczki, a także materiały dydaktyczne pomocne w procesie kształcenia, wydane po 1800 roku i wycofane z programów nauczania. Obecnie w kolekcji znajduje się ok 4800 egzemplarzy podręczników różnych przedmiotów szkolnych, opublikowanych zarówno w j. polskim, jak i w innych językach. Część zasobów jest ogólnodostępna w formie cyfrowej. Na stronie Muzeum Podręcznika dostępna jest informacja o najbliższych planach udostępniania czytelnikom kolejnych publikacji.

Historia

Muzeum Podręcznika Uniwersytetu Pedagogicznego w Krakowie rozpoczęło swoją działalność 4 kwietnia 2014 r. Początkowo swoją siedzibę miało w Ośrodku Inicjatyw Edukacyjno-Społecznych UP przy ul. Jęczmieńnej 9. W składzie kolekcji muzealnej znalazły się najstarsze podręczniki z księgozbioru Biblioteki Głównej UP w Krakowie. Zostały one wyselekcjonowane oraz opracowane w ramach Działalności Upowszechniającej Naukę w latach 2012 i 2013. W 2018 roku Muzeum Podręcznika zostało włączone w strukturę Biblioteki Głównej Uniwersytetu Pedagogicznego.

Kolekcja

Kolekcja *Muzeum Podręcznika* ma charakter naukowy. Księgozbiór jest wykorzystywany przez pracowników naukowych i studentów Uniwersytetu Pedagogicznego, jak również wszystkich badaczy historii dydaktyki i edukacji. Księgozbiór udostępniany jest w wersji cyfrowej poprzez Pedagogiczną Bibliotekę Cyfrową. W wyjątkowych sytuacjach, na uzasadniony wniosek, mogą być udostępniane papierowe wersje materiałów – jedynie na miejscu w Czytelni Głównej.

W przygotowaniu są także ekspozycje tematyczne, na których będą prezentowane wybrane elementy kolekcji.

Informacje i kontakt:

http://bg.up.krakow.pl/?page_id=4067

Muzeum Podręcznika Biblioteki Głównej
Uniwersytetu Pedagogicznego w Krakowie

ul. Podchorążych 2, 30-084 Kraków

tel. (12) 662 63 72

muzeumpodrecznika@up.krakow.pl



Co czytać

Astronomia Ogólna, praca zbiorowa, PWN 2020.

Głównym powodem, dla którego ludzie zajęli się badaniem Wszechświata jest ich wrodzona ciekawość. Kluczową rolę w jego poznaniu odgrywają obserwacje i umiejętność wyciągania logicznych wniosków. Proces ten nie może być ograniczony żadnymi koncepcjami filozoficznymi, politycznymi, ani też religijnymi wierzeniami.

Niniejsza publikacja to kompleksowe wprowadzenie do astronomii klasycznej, jak i współczesnej astrofizyki i kosmologii. Książka prezentuje najważniejsze koncepcje astronomiczne, jak i leżące u ich podstaw zasady fizyczne. Oprócz rozważań teoretycznych, Czytelnik znajdzie w niej zadania wraz z rozwiązaniami oraz tabele zawierające najważniejsze, zbiorcze dane z zakresu astronomii i fizyki.

Książka z założenia ma służyć jako podręcznik akademicki dla studentów pierwszych lat kierunków astronomia i fizyka. Wierzimy jednak, że w gronie Czytelników znajdują się także pasjonaci wiedzy astronomicznej, którzy nie wiążą swojego wykształcenia z tym kierunkiem, ale dla których zgłębianie wiedzy o kosmosie jest po prostu ciekawe.

Autorami książki są znani fińscy astronomowie, profesorowie uniwersyteccy, wielokrotnie nagradzani przez środowisko astronomiczne.

