DOŚWIADCZENIA OBOWIĄZKOWE

Wyznaczanie wartości przyspieszenia ziemskiego za pomocą wahadła matematycznego

Dagmara Sokołowska

ze wstępem Z. Gołąb-Meyer

Wstęp

Pomiar przyspieszenia ziemskiego *g* powinien należeć do obowiązkowego kanonu doświadczeń wykonywanych w szkole w klasach ponadgimnazjalnych. W gimnazjum ma sens wykonywanie go jedynie z bardziej zaawansowanymi uczniami.

Pomimo iż sam pomiar *g* jest dziecinnie prosty i może być wykonany nawet w przedszkolu (zmierzenie długości wahadła, pomiar czasu dziesięciu okresów), to jednak zrozumienie jego sensu wiąże się z poważnymi przeszkodami poznawczymi.

O ile pomiar taki nie ma pozostać jedynie przyjemną aktywnością imitującą pracę naukową, nauczyciel powinien rozpoznać te trudności i pomóc uczniom je pokonać.

Pomiar *g* to zupełnie coś innego niż pomiar długości czy pomiar masy. Wielkości *g* nie „widać", nie można jej wziąć do ręki, jak np. ciała o jednostkowej masie. *g* nie mierzy się bezpośrednio, tak jak mierzony jest, powiedzmy, czas. Pomiar *g* jest uwikłany w skomplikowaną formułę i jest zdecydowanie czymś innym niż np. wyznaczanie powierzchni prostokąta poprzez pomiar jego wysokości i długości (w końcu powierzchnię można zmierzyć, układając na figurze geometrycznej małe jednostkowe kwadraty).

Jak wykazały staranne i powtarzane wielokrotnie badania psychologa Jeana Piageta, uczeń jest w stanie zrozumieć i samodzielnie odkryć sens izochronizmu wahadła, to jest zależności okresu jedynie od długości, dopiero gdy osiągnie poziom myślenia formalnego, czyli przeciętnie gdy ma kilkanaście lat. Nie bez powodu dopiero genialny Galileusz odkrył ten fakt.

Przyspieszenie ziemskie jest pojęciem wysoce abstrakcyjnym i nie możemy oczekiwać, by jego sens został uchwycony przed osiągnięciem poziomu myślenia formalnego; jednakowoż, ok. 20% uczniów nigdy tego poziomu nie osiąga. Najpierw należy uczniów oswajać z pojęciem *g*, poprzez doświadczenia myślowe: ruchy w windzie Einsteina, na statku kosmicznym, na Księżycu. Proste zadania rachunkowe, zresztą nielubiane przez uczniów, oswajają to pojęcie.

Kolejną przeszkodą poznawczą jest **istnienie niepewności pomiarowych. Dla uczniów istnienie wartości prawdziwej wielkości fizycznej jest oczywistością**. Niedokładność pomiaru, według uczniów, wynika z naszej niedoskonałości, ale „jakby się tak człowiek przyłożył, to by zmierzył idealnie". Na jednej lekcji nie zmienimy tego stanowiska, i nie ma takiej potrzeby.

Jednym z celów wykonywania doświadczenia jest przekonanie uczniów, iż każdy pomiar jest obarczony pewną niedokładnością, z której powinni sobie zdawać sprawę. Najlepiej poświęcić parę minut cennego czasu i pozwolić uczniom na wykonanie pomiaru spontanicznie, tak jak sobie sami wymyślą. Większość np. będzie mierzyć czas trwania jednego okresu.

Pomiar długości wahadła też może być nieprawidłowy. Otrzymane i zapisane na tablicy wyniki będą miały zatem duży rozrzut. I tu jest pora na pierwsze pytanie: Czyj wynik jest najlepszy? Co znaczy najlepszy? Precyzyjny? Czy możemy to stwierdzić, przyglądając się uważnie procedurze pomiarowej?

Teraz przychodzi najważniejszy punkt: Jak zaplanować pomiar, aby był możliwie precyzyjny? Potem ocenić jego dokładność?

Na zakończenie jest czas na zwrócenie uczniom uwagi na to, **co znaczy wahadło matematyczne jako model fizyczny**: i w jakim stopniu rzeczywiste wahadła są dobrą realizacją modelu wahadła matematycznego. Najbardziej zaawansowani uczniowie mogą dowiedzieć się o wahadle fizycznym – też modelu zachowania rzeczywistych przedmiotów.

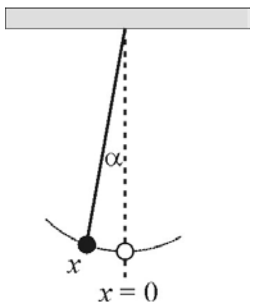
Należy podkreślić, że jeśli nawet niektórym uczniom umkną istotne dla zrozumienia fizyki problemy, to jednak podstawowe fakty dotyczące procedury pomiarowej i oceny niepewności pomiarowych powinny (i mogą) być porządnie przyswojone. Często okazuje się, że lekarze i technicy nie do końca zdają sobie z tego sprawę, a tego chcemy uniknąć.

Z.G-M

Doświadczenie to można wykonać „sposobem domowym”, bez konieczności wykorzystania jakichkolwiek urządzeń czy przyrządów z pracowni fizycznej. Jego zaletą jest stosunkowo duża precyzja wyznaczenia wartości przyspieszenia ziemskiego *g* (odchylenie od wartości tablicowej rzędu kilku procent), której zwykle nie pogarsza brak doświadczenia młodego eksperymentatora. Doświadczenie przeznaczone dla klasy I szkoły ponadgimnazjalnej, można także wykonać z uczniami gimnazjum.
Czas trwania doświadczenia: 20–25 min.
Czas opracowania wyników: 20–30 min.

Przyrządy. Wahadło matematyczne, długi przymiar (np. centymetr krawiecki), taśma klejąca lub pinezka, czasomierz (wystarczy zegarek z sekundnikiem lub stoper). **Wahadło** powinno zostać wykonane przez każdego ucznia według indywidualnego pomysłu (najlepiej przed lekcją, w domu), będącego jak najwierniejszą realizacją definicji wahadła matematycznego: „ciała punktowego o masie *m* zawieszonego na długiej, nieważkiej nierozciągliwej nici” (np. kamyk, kulka szklana itp. o średnicy mniejszej niż 1 cm, zawieszone na nici o długości 1 m).

Teoria. Wahadło matematyczne odchylone o niewielki kąt ($\alpha < 7°$) z położenia równowagi podlega prawom ruchu prostego oscylatora harmonicznego. Wypadkowa siła $\vec{F}_w$ działająca na ciało o masie *m* jest siłą sprowadzającą ciało do położenia równowagi, ($x = 0$), a więc jest siłą zwróconą przeciwnie do wychylenia z położenia równowagi. Wartość tej siły jest równa $F_w = mg\sin\alpha \approx mg\frac{x}{L}$, a zatem proporcjonalna do wychylenia *x*.



Równanie ruchu oscylatora harmonicznego:

$$ma = -kx, \tag{1}$$

gdzie w przypadku wahadła matematycznego:

$$k = \frac{mg}{L},$$

stąd okres drgań tego ruchu:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}. \tag{2}$$

Doświadczenie. Swobodny koniec wahadła matematycznego należy przyczepić do ściany lub brzegu stołu tak, aby cała nić, obciążona masą *m*, zwisała swobodnie. Wahadło wprawiamy w ruch w jednej płaszczyźnie poprzez wychylenie go z położenia równowagi o mały kąt, rzędu 1–7°. Podczas całego pomiaru należy dbać o to, aby ciało o masie *m* nie wykonywało dodatkowych ruchów (np. nie kręciło się dookoła własnej osi obrotu), oraz o to, aby w trakcie ruchu nić i ciało nie napotykały na żadne przeszkody.

Pomiary. Przed przystąpieniem do pomiarów należy zapoznać się z przyrządami: czasomierzem i przymiarem metrowym oraz odczytać systematyczne niepewności pomiarowe z nimi związane, tzn. najmniejsze działki obu tych przyrządów (np. dla zegarka z sekundnikiem $\Delta t = 1\,\mathrm{s}$, dla stopera $\Delta t = 0{,}01\,\mathrm{s}$, dla tzw. metra krawieckiego $\Delta L = 1\,\mathrm{mm}$).

Pomiar wykonujemy dla 6–10 różnych długości *L* wahadła matematycznego, np. skracając długość nici. Mierzymy **długość wahadła matematycznego *L*** (od punktu zawieszenia wahadła do środka masy zawieszonego ciała; dla długości nici rzędu 0,5–1,5 m wystarczy zmierzyć długość nici). Następnie mierzymy **czas trwania dziesięciu pełnych drgań** $t = 10 \cdot T$.

***Uwaga**. Największa niedokładność w pomiarze okresu drgań może być wprowadzona poprzez nieskoordynowanie chwili włączania czasomierza i wprawiania wahadła w ruch. Stąd pomiar czasu dziesięciu pełnych drgań zamiast jednego okresu.*

Dane doświadczalne zestawiamy w tabeli (wiersz drugi i trzeci), a wartości w wierszu czwartym i piątym odpowiednio przeliczamy:

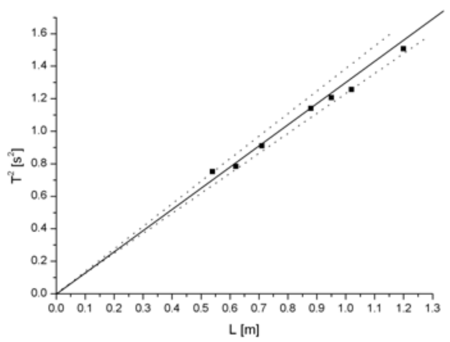
Nr pomiaru	1	2	3	4	5	6	7
L [m]							
t [s]							
$T = t/10$ [s]							
T^2 [s^2]							
$\Delta T = \Delta t/10$ [s]							
$\Delta T^2 = 2T \cdot \Delta T$ [s^2]							

Opracowanie wyników

Na kartce papieru milimetrowego albo w zeszycie w kratkę rysujemy układ współrzędnych, w którym na osi pionowej znajdzie się kwadrat okresu T^2 [s^2], a na osi poziomej – długość wahadła L [m]. Następnie w układzie współrzędnych zaznaczamy punkty o wartościach $(L,\ T^2)$ oraz prostokąty niepewności pomiarowych wokół tych punktów (punkty powinny się znaleźć w środku prostokątów o bokach: $2 \cdot \Delta L$ – równoległym do osi odciętych i $2 \cdot (\Delta T^2)$ – równoległym do osi rzędnych). Na załączonym wykresie przykładowym prostokąty niepewności pomiarowych są mniejsze niż znak graficzny przedstawiający punkty pomiarowe. Punkty $(L,\ T^2)$ powinny układać się mniej więcej na prostej, zgodnie ze wzorem:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g} L. \tag{3}$$

Prostą dopasowujemy do danych doświadczalnych np. metodą graficzną.



Metoda graficzna

Ponieważ w teoretycznej zależności $T^2(L)$ nie występuje parametr wolny prostej, to spodziewamy się, że prosta będzie przechodzić przez punkt (0,0) w naszym układzie współrzędnych. Rysujemy dwie proste pomocnicze (linie przerywane), łączące punkt (0,0) z najbardziej skrajnymi rogami dwóch prostokątów niepewności pomiarowych tak, aby wszystkie prostokąty znalazły się pomiędzy tymi prostymi. Określamy współczynniki kierunkowe tych prostych: a_1 *i* a_2. Poszukiwany współczynnik nachylenia prostej, najlepiej dopasowanej do danych doświadczalnych, reprezentowanej przez linię ciągłą, jest średnią arytmetyczną a_1 *i* a_2, tj. $a = \frac{1}{2}(a_1 + a_2)$. Niepewność maksymalna współczynnika kierunkowego prostej jest równa połowie różnicy dwóch skrajnych wartości współczynników kierunkowych, tj. $\Delta a = \frac{1}{2} | a_1 - a_2 |$.

***Uwaga**. Dokładniejszym sposobem wyznaczenia współczynnika nachylenia prostej $T^2(L)$ jest zastosowanie metody regresji liniowej (patrz: H. Szydłowski, „Pracownia fizyczna", PWN, Warszawa 1989 i wydania następne, rozdz. 2.3), wymaga to jednak albo żmudnego liczenia, albo wykorzystania programów komputerowych do analizy danych (np. Origin, Excel, Grapher, Gnuplot itp.).*

Wyznaczenie wartości *g*

Wartość przyspieszenia ziemskiego wyznaczamy po przekształceniu wzoru (3):

$$g = \frac{4\pi^2}{a}, \tag{4}$$

a niepewność maksymalną tego pomiaru określamy ze wzoru:

$$\Delta g = g\frac{\Delta a}{a}. \tag{5}$$

Na uwagę zasługuje fakt, że jeżeli uczeń nie popełni błędu grubego związanego z niepoprawnym określeniem liczby okresów podczas pomiaru czasu trwania dziesięciu pełnych drgań albo innego błędu grubego związanego z niepoprawnym pomiarem długości wahadła matematycznego, to otrzymany wynik powinien być zgodny z wynikiem tablicowym, co można potwierdzić, *jeżeli* spełniona będzie nierówność:

$$\left| g - 9{,}81 \right| \le \Delta g. \tag{6}$$

Przyspieszenie grawitacyjne jest najczęściej używaną stałą podczas rozwiązywania zadań z mechaniki. Samodzielne wyznaczenie jego wartości przez uczniów podczas tego prostego doświadczenia jest zatem ćwiczeniem bardzo pouczającym i dającym satysfakcję także początkującym eksperymentatorom.

Wyznaczanie przyspieszenia ziemskiego za pomocą wahadła matematycznego jest w inny sposób opisany także w podręcznikach:

H. Szydłowski, *Pracownia fizyczna*, PWN, Warszawa 1989.

M. Fiałkowska, K. Fiałkowski, B. Sagnowska, *Fizyka dla szkół ponadgimnazjalnych*, ZAMKOR, Kraków 2005.