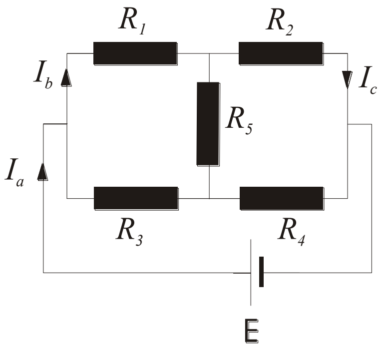
KĄCIK ZADAŃ

Sławomir Brzezowski

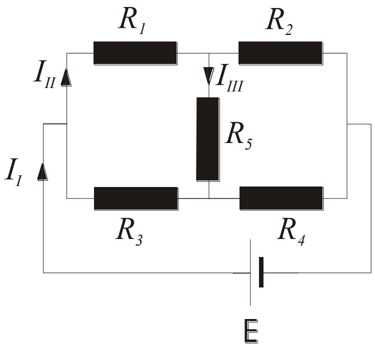
ZADANIE
Udowodnij, że liczba niezależnych równań liniowych, jakie wynikają z praw Kirchhoffa i pozwalają na obliczenie natężeń prądów płynących w rozgałęzionych obwodach elektrycznych, równa jest liczbie niezależnych prądów.

Pierwsze prawo Kirchhoffa sprowadza się do stwierdzenia, że suma natężeń prądów wpływających do danego węzła (a więc do dowolnego fragmentu obwodu połączonego z resztą obwodu pewną liczbą przewodów) jest równa sumie natężeń prądów wypływających. Prawo to możemy traktować jako zapis zasady zachowania ładunków.



Pierwsze prawo Kirchhoffa pozwala zidentyfikować niezależne natężenia prądów. W przypadku obwodu pokazanego na rysunku jako niezależne można na przykład wybrać natężenia I_a, I_b i I_c. Można też wybrać natężenia w innych gałęziach obwodu, ale jakkolwiek je wybierzemy, będą to dla tego obwodu **trzy** natężenia. Poprawny wybór natężeń niezależnych wymaga pewnej wprawy. Należy kierować się dwoma wskazaniami:

1. Liczba natężeń niezależnych równa jest liczbie niezależnych pętli w obwodzie, a tych z kolei jest tyle, ile co najmniej gałęzi obwodu trzeba usunąć, aby nie zawierał on żadnych pętli.
2. Żaden węzeł obwodu nie może spinać samych niezależnych prądów.



Wynika z tego, że równie dobrze moglibyśmy do roli prądów niezależnych wybrać prądy I_I, I_{II}, I_{III}. Zaznaczone na schemacie kierunki, w których prądy te będą zliczane jako dodatnie, są najzupełniej dowolne. Gdyby się miało okazać, że prąd umowny, wyliczony z równań, które za chwilę poznamy, miał płynąć w kierunku przeciwnym, niż to wstępnie zaznaczyliśmy na rysunku, to dla tego prądu dostaniemy ujemną wartość. Dlatego tam, gdzie kierunek prądu jest „widoczny”, warto od razu kierować strzałki tak, jak będzie płynął prąd. Dotyczy to na przykład prądów I_I i I_{II}. Rzeczywistego zwrotu prądu I_{III} nie potrafimy oczywiście przewidzieć.

Zgodnie z **drugim prawem Kirchhoffa** suma spadków potencjałów, zliczana wzdłuż dowolnej zamkniętej pętli obwodu, równa jest zero.

Stwierdzenie to nie jest niczym nowym: wędrując wzdłuż pętli, kreślimy w przestrzeni drogę zamkniętą, a to – wobec zachowawczości pola elektrycznego, pochodzącego od niezależnego od czasu rozkładu ładunków – oznacza zerową zmianę potencjału. Okazuje się jednak, że obydwa prawa Kirchhoffa, traktowane łącznie, są wystarczające do obliczenia wszystkich prądów w dowolnie skomplikowanej sieci połączeń.

Zanim udowodnimy, że tak jest w istocie, rozważymy przykład w postaci obwodu przedstawionego na ostatnim rysunku.

Wypiszemy teraz równania wynikające z drugiego prawa Kirchhoffa dla przykładowego obwodu, który tu rozważamy. Mamy oczywiście trzy równania (bo są trzy niezależne pętle) na trzy niewiadome I_I, I_{II}, I_{III}:

$$I_{II} R_1 + (I_{II} - I_{III}) R_2 + I_I R_w - \mathrm{E} = 0 ,$$

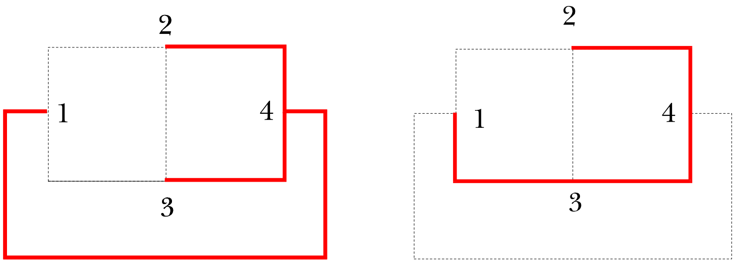
$$I_{II} R_1 + I_{III} R_5 + (I_{II} - I_I) R_3 = 0 ,$$

$$I_{II} R_1 + (I_{II} - I_{III}) R_2 + (I_{II} - I_{III} - I_I) R_4 + (I_{II} - I_I) R_3 = 0 .$$

Wypisując taki komplet równań, możemy korzystać z dowolności wyboru pętli niezależnych. Na przykład pisząc ostatnie równanie, wybraliśmy pętlę obejmującą opory R_1, R_2, R_3, i R_4. Zamiast tego moglibyśmy jednak wybrać pętlę z oporów R_2, R_4 i R_5 pisząc zamiast ostatniego równania równanie:

$$(I_{II} - I_{III}) R_2 + (I_{II} - I_{III} - I_I) R_4 - I_{III} R_5 = 0 .$$

Udowodnimy teraz, że liczba równań wyznaczanych przez obydwa prawa Kirchhoffa jest zawsze równa liczbie niewiadomych (niezależnych prądów). Na użytek tego dowodu nie będziemy rozróżniać prądów zależnych od niezależnych. Tak więc wszystkim liniom obwodu przypisujemy dowolne zwroty i zgodne z tymi zwrotami prądy. Niech rozważany obwód ma n wierzchołków (węzłów) i l linii łączących te wierzchołki. Rysowanie tego obwodu zaczynamy od narysowania wierzchołków (czyli punktów). Następnie rysujemy możliwie dużo należących do danego obwodu linii łączących te punkty, ale tak, aby nie powstała żadna pętla. W ten sposób narysujemy **drzewo**. Ostatni obwód, który rozważaliśmy, ma $n = 4$ wierzchołki. Drzewami tego obwodu są na przykład diagramy:



itd.

Każde drzewo ma dokładnie $n-1$ linii. Wynika to z tego, że rysując drzewo, zaczynamy od narysowania dowolnej linii łączącej dwa węzły. Do tej linii dorysowujemy dalsze linie w taki sposób, aby nie zamknąć żadnej pętli. Dlatego dorysowanie każdej kolejnej linii powoduje dołączenie dokładnie jednego nowego węzła. Kiedy wszystkie węzły są już dołączone, nie sposób narysować linii, bo zamkniemy jakąś pętlę: drzewo jest gotowe. Pierwsza linia wprowadziła dwa wierzchołki, każda następna po jednym.

Określimy teraz liczbę niewiadomych natężeń prądów i liczbę równań. Natężeń jest oczywiście tyle, ile linii, czyli l. Z pierwszego prawa Kirchhoffa mamy tyle równań, ile węzłów (bilans prądów wchodzących do każdego węzła). Równania te są jednak zależne. Po zbilansowaniu prądów w $n-1$ węzłach, prąd w n-tym węźle jest bowiem zbilansowany automatycznie[1]. Mamy więc $n-1$ równań z pierwszego prawa Kirchhoffa.

Drugie prawo Kirchhoffa dostarczy tylu równań, ile jest pętli w obwodzie. Po narysowaniu dowolnego drzewa danego obwodu (n – 1 linii) dorysowujemy pozostałe linie. Każda z nich zamyka nową pętlę. Linii tych (czyli pętli) jest oczywiście l – (n – 1). Mamy więc l – (n – 1) kolejnych równań. Równania te są niezależne, ponieważ każde kolejne równanie odpowiada kolejnej zamykanej pętli, czyli zawiera nowy prąd (ten, który płynie w linii zamykającej tę pętlę). Razem równań jest więc $[n-1]+[l-(n-1)]=l$, czyli tyle, ile niewiadomych prądów.

[1] Jeżeli grupa uczciwych osób dokonuje między sobą skomplikowanej wymiany pieniędzy, przy czym jedna z tych osób „trzyma kasę”, to gdy po zakończeniu całej wymiany wszyscy stwierdzą, że mają tyle gotówki, ile trzeba, kasjer w zasadzie nie musi sprawdzać, czy suma w jego portfelu jest prawidłowa.