O paradoksie bliźniąt nieco inaczej – cz. II

Geometria paradoksu

Leszek M. Sokołowski
Obserwatorium Astronomiczne UJ

Co było w pierwszej części?

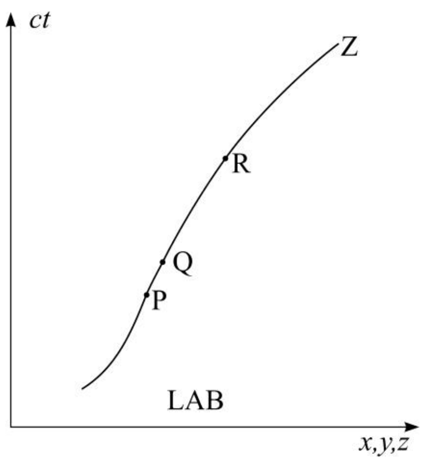
W pierwszej części artykułu uzasadniłem, że wbrew rozpowszechnionemu mniemaniu, paradoksu w sytuacji realistycznych ruchów bliźniąt nie da się wyjaśnić za pomocą samej transformacji Lorentza, że konieczne jest odwołanie się do geometrii czasoprzestrzeni. Prostota liniowej transformacji Lorentza (czyli tzw. „szczególnej transformacji Lorentza") stwarza iluzję, iż całą szczególną teorię względności da się sformułować w języku elementarnej szkolnej algebry. Tak nie jest, teoria ta wymaga aparatu matematycznego dużo bardziej zaawansowanego niż algebra funkcji liniowych. Aparatem tym jest geometria czasoprzestrzeni Minkowskiego. Geometria ta jest, podobnie jak euklidesowa, geometrią metryczną, lecz w odróżnieniu od niej kwadrat interwału (odległości) między dwoma zdarzeniami nie jest wielomianem kwadratowym dodatnio określonym, ale dowolną liczbą rzeczywistą. Jeżeli dwa zdarzenia w czasoprzestrzeni można połączyć sygnałem świetlnym, to interwał między nimi jest zerem. Dzięki temu interwał jest taki sam we wszystkich inercjalnych układach odniesienia, czyli jest niezmiennikiem przy zmianach układu odniesienia. Zarazem to, że kwadrat interwału między różnymi punktami może być ujemny lub zerem sprawia, iż geometria Minkowskiego różni się istotnie od geometrii euklidesowej, do której jesteśmy przyzwyczajeni. Ta geometria czasoprzestrzeni jest istotą teorii względności: teoria ta jest systemem fizycznie zinterpretowanych twierdzeń geometrii Minkowskiego. Twierdzenia, które nie mają treści geometrycznej w czasoprzestrzeni, nie wchodzą w zakres teorii względności. Paradoks bliźniąt, podobnie jak wszystkie inne paradoksy teorii Einsteina, ma prostą treść geometryczną i podobnie jak one jest wolny od jakichkolwiek sprzeczności.

Czas własny

Naturalnie nie wszystkie (a jest ich nieskończenie wiele) twierdzenia geometrii Minkowskiego dają się prosto zinterpretować fizycznie; dotyczy to twierdzeń, które fizycy zgodnie uważają za ważne. Fundamentalnym przykładem więzi geometrii z fizyką jest pojęcie *czasu własnego*. Co to jest czas? W fizyce czasem jest to, co mierzy dobry zegar. Odwołujemy się tu do ogółu doświadczeń z kilku wieków. Istnieją zjawiska cykliczne (powtarzalne), które są ściśle periodyczne. O tym, że dane zjawisko cykliczne ma stały w czasie okres, możemy przekonać się tylko porównując je z jednym lub kilkoma innymi zjawiskami cyklicznymi, o których przypuszczamy, że mają stały okres, bowiem nie działa-ją na nie siły zewnętrzne mogące zmieniać ich okres. Jeżeli mamy tylko jedno zjawisko cykliczne, to nie jesteśmy w stanie stwierdzić, czy jego okres jest stały. Klasyczny zegar wahadłowy jest zależny od przyspieszenia ziemskiego, zatem na różnych wysokościach nad Ziemią idzie w różnym tempie, natomiast zegarom sprężynowym, kwarcowym i atomowym zmiana wysokości (prawie) nie szkodzi. W układzie inercjalnym dobry zegar jest z założenia wolny od zakłóceń, więc dobrze mierzy czas, który jest *czasem własnym tego zegara i układu, w którym spoczywa*.

W geometrii euklidesowej rozpatrujemy linie proste i krzywe, podobnie w czasoprzestrzeni badamy nie tylko ruchy jednostajne prostoliniowe (którym odpowiadają linie świata będące prostymi), definiujące układ inercjalny, w którym dane ciało spoczywa, lecz również ruchy ciał poddanych rozmaitym przyspieszeniom, opisane zakrzywionymi liniami świata. (Podkreślam ten oczywisty fakt, bowiem parokrotnie spotkałem się z tekstami głoszącymi, że szczególna teoria względności opisuje tylko ruch jednostajny prostoliniowy, a wszelki ruch przyspieszony jest domeną ogólnej teorii względności.) Jeżeli dane ciało doznaje przyspieszeń, to nie istnieje układ inercjalny, w którym ono stale spoczywa, natomiast w każdej chwili spoczywa momentalnie w innym układzie.

Niech dowolnie poruszającym się ciałem będzie zegar Z. Ustalamy pewien układ inercjalny, zwany LAB („laboratoryjny”), w nim Z ma zmienną prędkość $\boldsymbol{v}(t)$, gdzie t jest czasem mierzonym przez zegary spoczywające w LAB. Bierzemy dwa punkty bliskie na linii świata Z, w LAB mają one współrzędne P(ct, $\boldsymbol{r}$) i Q($ct + cdt$, $\boldsymbol{r} + d\boldsymbol{r}$), $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$, rys. 2. Na infinitezymalnym łuku PQ zegar Z ma prędkość $\boldsymbol{v}(t_P)$, zatem spoczywa w inercjalnym układzie S(P), który porusza się względem LAB z prędkością $\boldsymbol{v}(t_P)$. Układ S(P) nazywamy *chwilowym układem spoczynkowym* zegara Z lub jego *chwilowym układem własnym*. Pomiędzy P i Q zegar Z idzie w tym samym tempie, co zegary układu S(P). W innym punkcie R zegar Z ma inną prędkość i inny chwilowy układ własny.



Rys. 2

Rozpatrzmy interwał ds(P,Q). W układzie LAB mamy

$$ds^2 = c^2dt^2 - d\mathbf{r}^2 = c^2dt^2[1 - 1/c^2(d\mathbf{r}/dt)^2],$$

wektor $d\mathbf{r}/dt$ ma w P składowe $dx/dt = \upsilon_x$ itd. równe składowym prędkości Z w P, więc

$$ds = c\,dt\sqrt{1 - \boldsymbol{\upsilon}^2 / c^2}\ .$$

Z kolei w układzie własnym zegar Z spoczywa, więc od P do Q zmianie ulega tylko jego współrzędna czasowa, od t' do t' + dt', gdzie dt' jest upływem czasu własnego zmierzonym przez Z i zegary w S(P). Ponieważ interwał jest w obu układach taki sam, więc w S(P) jest on dany wzorem $ds = c\,dt$'. Przyrównując oba wyrażenia dostajemy

$$dt' = \sqrt{1 - (\boldsymbol{\upsilon} / c)^2}\, dt. \tag{5}$$

Dostaliśmy znany wzór na dylatację czasu – bez użycia transformacji Lorentza! Co więcej, prędkość S(P) względem LAB jest dowolnie skierowana, więc faktycznie (5) jest istotnym uogólnieniem znanego wzoru. Z (5) wynika naturalna interpretacja geometryczna czasu własnego: mnożąc go przez c dostajemy

$$ds = c\,dt' = \sqrt{1 - (\boldsymbol{\upsilon} / c)^2}\, c\,dt. \tag{6}$$

Infinitezymalny przedział czasu własnego pomnożony przez c jest równy długości (czyli interwałowi) odpowiadającego mu łuku linii świata. Ograniczenie do infinitezymalnych przedziałów wynika ze zmienności prędkości; przy stałej prędkości $\boldsymbol{\upsilon}$ ta równość zachodzi dla wszystkich przedziałów (Q jest dowolnie daleko od P). Ponieważ prędkość c jest stałą fizyczną, możemy przejść od tradycyjnych jednostek czasu, sekundy i godziny, do jednostek o wymiarze długości: 1 km czasu to przedział czasu, w jakim światło przebywa odległość 1 km, czyli $\Delta t = 1/c$ km. W tych jednostkach można utożsamić: dobry zegar mierzy czas własny równy długości jego linii świata. Jest to kluczowe twierdzenie teorii względności. Dysponując nim możemy z miejsca rozwiązać paradoks bliźniąt. Zanim to zrobimy, przyda się komentarz do tego twierdzenia, bowiem jest to kolejne miejsce, w którym pojawiają się nieporozumienia.

Jaki jest zakres fizycznej stosowalności tego twierdzenia? Ściśle biorąc, wzór (5) stosuje się do przedziału czasu własnego dt' mierzonego zegarami spoczywającymi w chwilowym układzie własnym S(P), które z założenia są wolne od jakichkolwiek oddziaływań zewnętrznych, zatem ich bieg nie jest zakłócony. Zegar Z doznaje przyspieszeń zmieniających jego ruch, więc od P do Q również zmierzy czas dt', jeżeli przyspieszenie nie zaburza jego pracy. W przypadku zegarów mechanicznych (sprężynowych) nawet niezbyt duże przyspieszenia zakłócają ich bieg. Zegary kwarcowe są mniej wrażliwe. Z kolei zegary atomowe są bardziej czułe na zakłócenia, lecz faktycznie wstrząsy szkodzą nie samym periodycznym procesom atomowym, na jakich są oparte, ale aparaturze pomiarowej zliczającej cykle tych procesów. Doświadczenie minionych wieków z konstrukcją zegarów mechanicznych (przede wszystkim chronometrów morskich koniecznych do ustalania długości geograficznej na morzu) oraz ostatniego stulecia z zegarami atomowymi ukazuje, że możliwe są dokładne zegary odporne na coraz większe przyspieszenia. Podsumowuje to *hipoteza o zegarach*:

> Dla dowolnych warunków fizycznych (tzn. przyspieszeń) panujących w danym miejscu czasoprzestrzeni, istnieje taki ściśle periodyczny proces fizyczny, że oparty na nim zegar ma chód niezakłócony nimi, czyli idzie tak, jak gdy by był wolny od zewnętrznych oddziaływań i poruszał się jednostajnie prostoliniowo. Taki zegar mierzy czas własny będący długością jego linii świata.

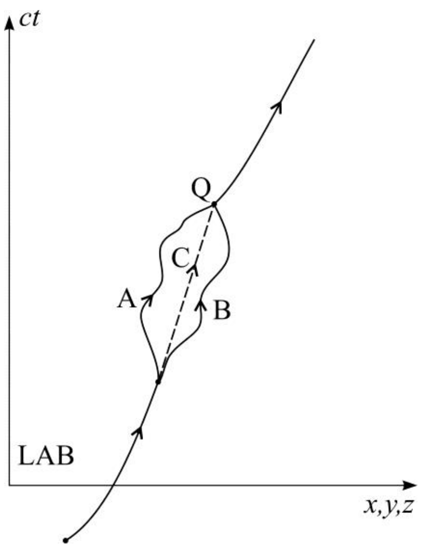
(To ostatnie zdanie jest celowym powtórzeniem, by podkreślić geometryczny sens czasu.) Można podać argumenty, że tempo chodu zegara atomowego nie jest zakłócone, jeżeli „mechanizm" tego zegara (ale nie aparatura zliczająca i odczytująca) jest poddany przyspieszeniu dużo mniejszemu niż 10^{23} m/s^2 = $10^{22}\,g$, gdzie g = 10 m/s^2 jest przyspieszeniem ziemskim. Tego oczywiście eksperymentalnie sprawdzić się nie da, więc najodporniejszych zegarów szukamy wśród cząstek elementarnych. Cząstki takie jak *miony* są nietrwałe i rozpadają się przeciętnie po upływie czasu $\tau = 2{,}2 \cdot 10^{-6}$ s od momentu ich wytworzenia w określonych reakcjach jądrowych. Czas ich życia τ jest mierzony w ich układzie spoczynkowym. W laboratorium miony powstają z relatywistycznymi prędkościami i w nim ich czas życia Δt jest dłuższy (dylatacja czasu) i wyraża się, zgodnie z (5), za pomocą czynnika Lorentza γ jako $\Delta t = \gamma\tau$, gdzie $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$. Ten wzór jest na pewno słuszny, jeżeli miony biegną swobodnie. Można go sprawdzić poddając miony przyspieszeniom. W 1966 roku w laboratorium CERN w Genewie wykonano eksperyment, w którym wiązka wytworzonych mionów krążyła po okręgu o promieniu R = 2,5 m ze stałą relatywistyczną prędkością dającą γ = 12,1. Pomiar czasu ich życia dał wartość $26{,}15 \cdot 10^{-6}$ s, zgodną ze wzorem $\Delta t = \gamma\tau = 26{,}6 \cdot 10^{-6}$ s z dokładnością 2%. Cząstki te miały w układzie LAB przyspieszenie dośrodkowe $a = v^2/R$, natomiast odczuwane przez nie przyspieszenie w ich chwilowym układzie własnym było większe,

$$w = \gamma^2 a = 5 \cdot 10^{18}\ \mathrm{m/s^2} = 5 \cdot 10^{17}\,g.$$

Oznacza to, że wewnętrzny zegar kwantowy mionu, mierzący jego wiek i decydujący (czysto losowo) o jego momencie rozpadu, jest nieczuły na tak duże przyspieszenie i działa tak, jak gdyby mion był swobodny. Oczywiście zegar oparty na tym zjawisku, tj. zliczający rozpady mionów, byłby bardzo kłopotliwy w użyciu i mało dokładny, lecz istotne jest, że taki zegar jest teoretycznie możliwy. Uznajemy, że hipoteza o zegarach jest prawdziwa co najmniej do tak wielkich przyspieszeń.

Wyjaśnienie paradoksu

Dysponujemy teraz aparatem pojęciowym adekwatnym do wyjaśnienia paradoksu bliźniąt w całej jego ogólności. Początkowo bliźniacy mają wspólną linię świata (prostą lub zakrzywioną) ze wspólnym początkiem, są więc w tym samym wieku. W zdarzeniu P w czasoprzestrzeni rozdzielają się i poruszają dowolnie i w zdarzeniu Q ich linie świata spotykają się (to, czy później ich linie pokrywają się, czy ponownie rozchodzą, nie ma znaczenia), rys. 3. Dla poglądowości linie świata bliźniąt zostały przedstawione na diagramie Minkowskiego, lecz w ogólności linie te nie muszą być krzywymi płaskimi, a wtedy nie da się ich narysować na płaszczyźnie. Zegary biologiczne i fizyczne bliźniaków odmierzają czas własny, czyli długości linii świata A i B pomiędzy P i Q.



Rys. 3

Długość dowolnej krzywej określamy w taki sposób, że dzielimy ją na dużą liczbę bardzo małych odcinków (łuków), a wówczas każdy z nich można potraktować jak odcinek prostej. Na linii świata długość takiego odcinka to interwał *ds* pomiędzy jego punktami końcowymi. Długość całej krzywej jest sumą interwałów dla poszczególnych odcinków i w granicy liczby odcinków dążącej do nieskończoności (i długości każdego z nich dążącej do zera) sumę zastępujemy całką. Zatem czas własny bliźniaka A, który upłynął od P do Q, jest równy

$$s_A = \int_P^Q ds(\mathrm{A}),$$

gdzie ds(A) oznacza kolejne interwały dla odcinków linii świata A. Bliźniak B przeżyje natomiast czas

$$s_A = \int_P^Q ds(\mathrm{B}),$$

Obu całkom można nadać konkretną postać umożliwiającą ich obliczenie. Wprowadzamy wybrany układ inercjalny LAB, w nim punkt P ma współrzędną czasową t_1, a Q – współrzędną t_2, bliźniacy mają pomiędzy P i Q zmienne prędkości, odpowiednio $\boldsymbol{v}_A(t)$ i $\boldsymbol{v}_{\mathrm{B}}(t)$. Zgodnie ze wzorem (6) mamy wtedy

$$s_A = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \left(\frac{\vec{v}_A(t)}{c}\right)^2}\, c\, dt \tag{7}$$

oraz

$$s_B = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \left(\frac{\vec{v}_B(t)}{c}\right)^2}\, c\, dt. \tag{8}$$

Przy geometrycznym opisie ruchów bliźniaków żaden paradoks nie pojawia się – różne krzywe o wspólnych końcach mają różne długości i nikogo to nie dziwi. Jest bowiem doświadczeniem każdego człowieka, nabywanym około trzeciego roku życia, iż z jednego miejsca na drugie można zwykle przejść po różnych drogach i na każdej trzeba zrobić inną liczbę kroków. Przeciwnie, bliźniacy musieliby starannie dobrać swoje ruchy, aby ich linie świata miały równą długość. Bez znajomości prędkości każdego bliźniaka jako funkcji czasu nie możemy obu całek wyliczyć, a tym samym stwierdzić, który bliźniak będzie w Q młodszy.

Zamiast paradoksu mamy geometryczną oczywistość. Jest tu jednak pewna subtelność; aby ją wskazać, wprowadźmy trzeciego bliźniaka C, który pomiędzy zdarzeniami P i Q znajduje się w jednym ustalonym układzie inercjalnym, więc jego linia świata jest odcinkiem prostej, na rys. 3 jest zaznaczona linią przerywaną. Intuicja geometryczna podpowiada nam, że linia świata C jest najkrótsza, zatem on będzie z całej trójki najmłodszy. Tak nie jest. Wprowadzenie C jest nawiązaniem do najprostszej, tradycyjnej wersji paradoksu, w której jeden bliźniak jest nieruchomy (spoczywa w układzie Ziemi), a drugi jest astronautą. Z dyskusji tej tradycyjnej wersji wiemy, że astronauta jest młodszy. W przypadku trzech bliźniąt, astronauci A i B będą młodsi od C. Dlaczego?

Aby to wyjaśnić, przyjmujemy, że układ LAB jest układem spoczynkowym bliźniaka C. Czas własny C pomiędzy P i Q wylicza się prosto w jego układzie własnym:

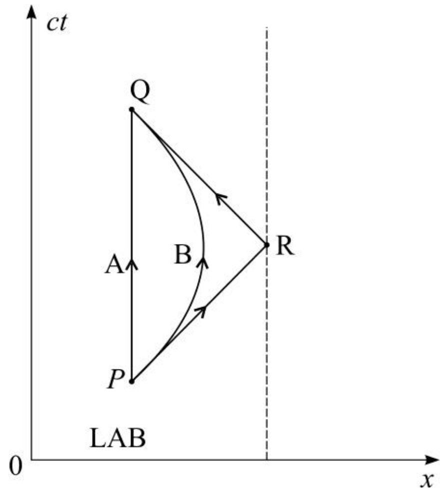
$$s_C = c\,dt = c(t_2 - t_1). \tag{9}$$

Zgodnie z wzorem (7) czas przeżyty przez A jest

$$s_A = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \left(\frac{\vec{v}_A}{c}\right)^2}\, c\, dt < c(t_2 - t_1) \tag{10}$$

i podobna nierówność zachodzi dla czasu własnego podróży B. Zauważmy, że ten wynik jest niezależny od tego, jak konkretnie poruszają się A i B, byle tylko byli w ruchu względem C (i spotkali się z nim w Q). Zatem *ze wszystkich linii świata łączących zadane dwa zdarzenia, linia prosta jest najdłuższa – jest dłuższa od każdej linii zakrzywionej*. W geometrii Minkowskiego jest dokładnie na odwrót w stosunku do geometrii euklidesowej. Uściślijmy, że przez linie krzywe (i proste) rozumiemy linie, które mogą być liniami świata ciał materialnych (nie światła), czyli ciał, które w wybranym układzie inercjalnym (a w konsekwencji – we wszystkich układach) mają prędkość mniejszą od c.

Wynika stąd interesująca własność. Załóżmy, że liczba bliźniaków jest dowolnie duża, rozstają się w punkcie P, każdy porusza się dowolnie, wszyscy spotykają się razem w Q. Okazuje się, że w Q nie istnieje bliźniak absolutnie najmłodszy. Oczywiście przy skończonej liczbie bliźniąt jeden z nich (lub więcej) będzie najmłodszy, lecz nie absolutnie – zawsze można wprowadzić jeszcze jednego bliźniaka poruszającego się tak, że będzie młodszy od tamtego. Geometrycznie jest to oczywiste, rys. 4. Dla prostoty rozpatrujemy ruch jednowymiarowy – po osi Ox pewnego układu LAB. Bliźniak A spoczywa w tym układzie i z punktu P wysyła sygnał świetlny (foton) biegnący na prawo, foton odbija się od nieruchomego lustra (jego linia świata – lustro jest punktem materialnym – jest zaznaczona linią przerywaną) w R, leci na lewo i w Q wraca do A. Czas własny A od P do Q jest $c(t_Q - t_P)$. Linia świata fotonu PRQ składa się z dwu odcinków prostych, PR i RQ. Z samej definicji interwału czasoprzestrzennego wynika, że interwał pomiędzy dwoma dowolnymi punktami na linii świata sygnału świetlnego jest równy zeru. Zatem długość linii świata tego fotonu jest $s(\mathrm{PRQ}) = s(\mathrm{PR}) + s(\mathrm{RQ}) = 0 + 0 = 0$. Weźmy teraz bliźniaka B, który startuje z P z prędkością bliską c i porusza się na prawo, w pobliżu zwierciadła hamuje intensywnie, lecz gładko, zawraca, przyspiesza i z prędkością niemal c wraca do A w Q. Jego linia świata może być dowolnie bliska linii świata fotonu PRQ. Z ciągłości wynika, że długość linii świata B jest wtedy dowolnie bliska długości prostej łamanej PRQ, czyli zera. Analitycznie wynik ten dostajemy ze wzoru (8), gdy prędkość v_B jest minimalnie mniejsza od c. Zatem kresem dolnym długości linii świata od P do Q jest zero, lecz jest to kres nieosiągalny – wymaga ruchu z prędkością światła. Za to istnieje osiągalny kres górny długości linii świata: jest to długość linii prostej PQ, równa $c(t_Q\text{-}t_P)$. Dlatego też w teorii względności (szczególnej i ogólnej) interesują nas najdłuższe, a nie najkrótsze linie świata. Jest to skutek istotnej różnicy pomiędzy geometrią Minkowskiego i euklidesową.



Rys. 4

Podsumujmy: w teorii względności nie istnieje jeden czas, jak w fizyce newtonowskiej, lecz jest ich nieskończenie wiele (zbiór mocy continuum) – tyle, ile jest możliwych ruchów ciał materialnych – i żaden z nich nie jest lepszy od innych. Każdy z nich jest czasem własnym pewnego dobrego zegara i jest równy długości jego linii świata. Różnica czasów własnych jest zjawiskiem rzeczywistym, wynikającym z odmienności ruchów zegarów i nie zależy od wyboru inercjalnego układu odniesienia, w którym te ruchy opisujemy. Aby tę różnicę zmierzyć, należy dwa zegary zsynchronizować w momencie, gdy się spotkają i wprowadzić je w dowolne zadane ruchy, z tym warunkiem, by w przyszłości spotkały się ponownie. Wynika stąd, że oba zegary nie mogą poruszać się jednostajnie prostoliniowo, przynajmniej jeden musi mieć zakrzywioną linię świata.

Ten ostatni wniosek rodzi pytanie: co jest przyczyną różnicy czasów własnych, prędkość względna, czy przyspieszenie? Często w książkach popularnonaukowych (np. w tej wspomnianej na początku) pada fałszywa odpowiedź: przyspieszenie. Tak nie jest. Aby się o tym przekonać, rozpatrzmy wspomnianą wcześniej prostą wersję paradoksu. Bliźniak A jest stale nieruchomy, a bliźniak B krąży po okręgu o promieniu R ze stałą prędkością v. Jeżeli okres okrążenia mierzony przez A jest równy T, to korzystając z (8) wyliczamy, że czas własny s_B jednego okrążenia, mierzony przez B, jest

$$s_B = \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}\,cT = \frac{c}{\gamma}T. \tag{11}$$

W układzie spoczynkowym A bliźniak B ma przyspieszenie dośrodkowe $a = v^2/R$, natomiast w układzie własnym odczuwa przyspieszenie $w = \gamma^2 v^2/R$. Zwiększamy teraz prędkość kątową ω ruchu po okręgu i jednocześnie zmniejszamy jego promień R tak, by prędkość liniowa $v = \omega R$ pozostawała stała. Z (11) widzimy, że stosunek s_B do cT jest równy $1/\gamma$ i pozostaje stały, natomiast przyspieszenie w rośnie nieograniczenie. Zatem istotna jest prędkość, a nie przyspieszenie.

Eksperyment

Na zakończenie powiem o doświadczalnym potwierdzeniu tego wszystkiego. Pierwszy eksperyment makroskopowy wykonali w 1972 roku Amerykanie J.C. Hafele i R.E. Keating. Był on prosty: przewieźli samolotami dwa zegary nad równikiem dookoła Ziemi. Jeden zegar leciał na wschód, drugi – na zachód. Oba samoloty miały względem Ziemi prędkości o module równym v_0. Aby wyliczyć różnicę wskazań zegarów po okrążeniu Ziemi wprowadzamy układ inercjalny S, w którym środek Ziemi spoczywa (zaniedbujemy roczny ruch orbitalny). Ziemia obraca się z zachodu na wschód z prędkością liniową na równiku równą ωR, gdzie ω jest jej prędkością kątową, a R jest promieniem równikowym. Zegar lecący na wschód ma w S prędkość $v_E = \omega R + v_0$, a lecący na zachód ma $v_W = \omega R - v_0$, zatem zegar lecący na wschód ma większą prędkość i zmierzony przezeń czas okrążenia Ziemi będzie krótszy. Wszystkie prędkości są nierelatywistyczne, więc można stosować odpowiednie przybliżenia. W rezultacie okazuje się, że różnica czasów własnych w ogóle nie zależy od prędkości v_0 samolotów i jest równa

$$s_W - s_E \approx \frac{4\pi}{c}\omega R^2. \tag{12}$$

Podstawiając $\omega = 2\pi/T$ z $T = 86\,400$ s oraz $R = 6378$ km dostajemy różnicę czasów około $410 \cdot 10^{-9}$ s. Wykonane pomiary na czterech zegarach atomowych (cezowych) dały dobrą zgodność z tym przewidywaniem.

I jeszcze komentarz podsumowujący. Ten poglądowy eksperyment sprzed czterdziestu lat nie zakończył bynajmniej dyskusji o paradoksie bliźniąt. Większość dyskutantów nie słyszała o nim, a przede wszystkim – jak się zdaje – nie przyjmuje do wiadomości faktu, iż paradoksu nie można rozwiązać na „poziomie szkolnym”, tzn. za pomocą prostej algebry szczególnej transformacji Lorentza, lecz że należy odwołać się do geometrii Minkowskiego, w której upływ czasu ma jednoznaczny sens geometryczny i zależy nie tylko od zdarzeń granicznych, między którymi się go mierzy, ale także od historii mierzącego go zegara, czyli od tego, jak on się między nimi poruszał. Najtrudniej jest pojąć (jest to wniosek z moich wieloletnich kontaktów z filozofami), że czas nie jest czymś, co – jak wierzył Newton – „płynie samo przez się i dzięki swej naturze, jednostajnie i niezależnie od jakiegokolwiek przedmiotu zewnętrznego”, lecz że jest on zespolony z przestrzenią i ruchem, i że fizyczny jest tylko taki czas własny.