O geometrii nieeuklidesowej

Andrzej Kotański

Plan

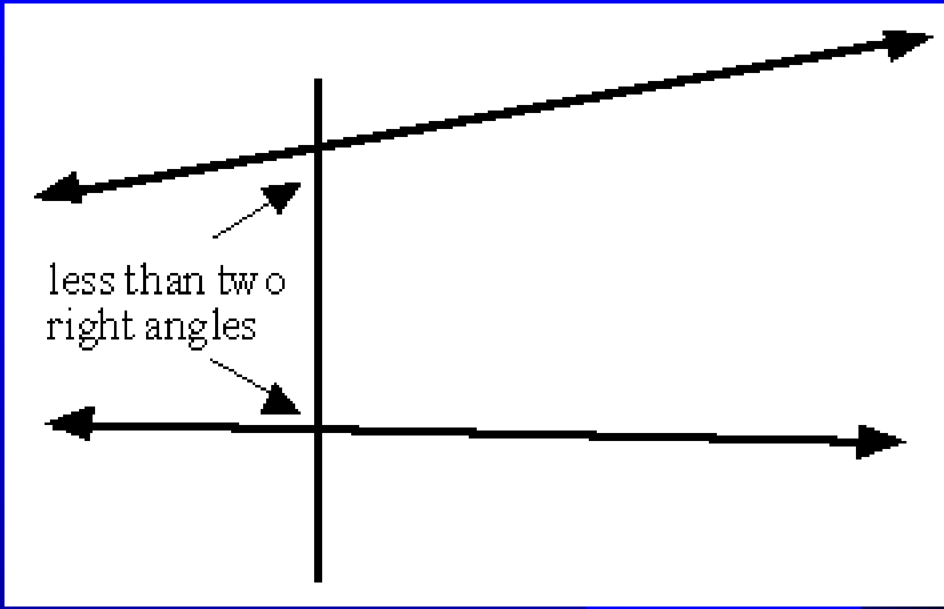
1. Rys historyczny
2. Zaprzeczenie piątego pewnika Euklidesa
3. Modele geometrii eliptycznej i hiperbolicznej
4. Modele Beltramiego i Poincarego
5. Kąt równoległości
6. Suma kątów trójkąta i naturalna jednostka długości
7. Długość okręgu
8. Linie kołowe - ekwidystanta i horycykl
9. Osobliwości geometrii hiperbolicznej
10. Grupy ruchów
11. Układy współrzędnych
12. Geometria absolutna
13. Niektóre twierdzenia spoza geometrii absolutnej
14. Literatura

Euclid's postulates: The first four

- A straight line can be drawn from any point to any other point.
- A finite straight line may be extended continuously in a straight line.
- A circle may be described with any centre and radius.
- All right angles are equal to each other

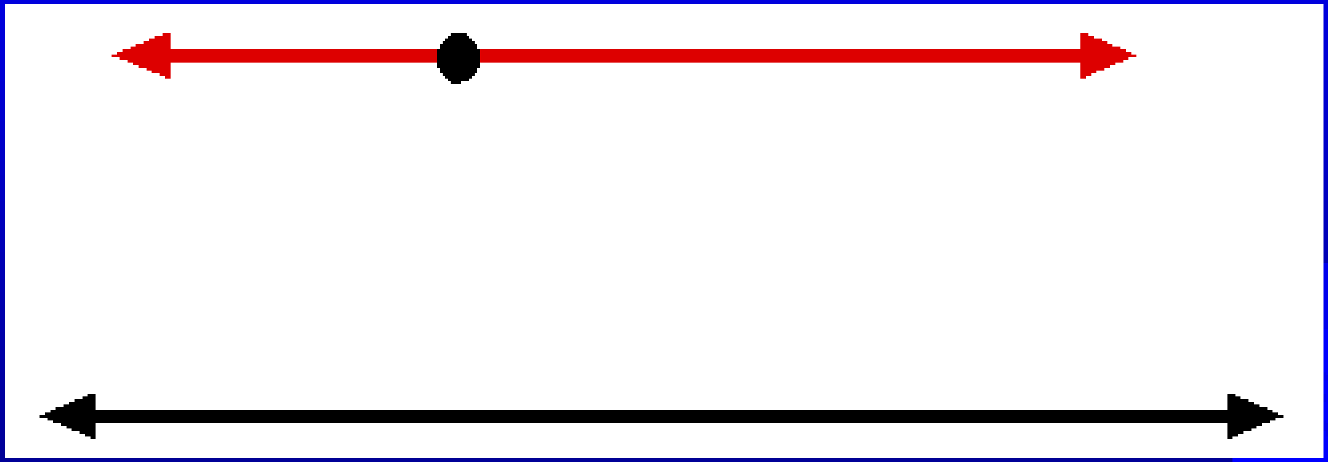
Euclid's fifth postulate

If a straight line meets two other straight lines so as to make the two interior angles on one side of it together less than two right angles, the other straight lines, if extended indefinitely, will meet on the side on which the angles are less than two right angles.



An alternative form

- Through a point not on a given line there passes one and only one line parallel to the given line.



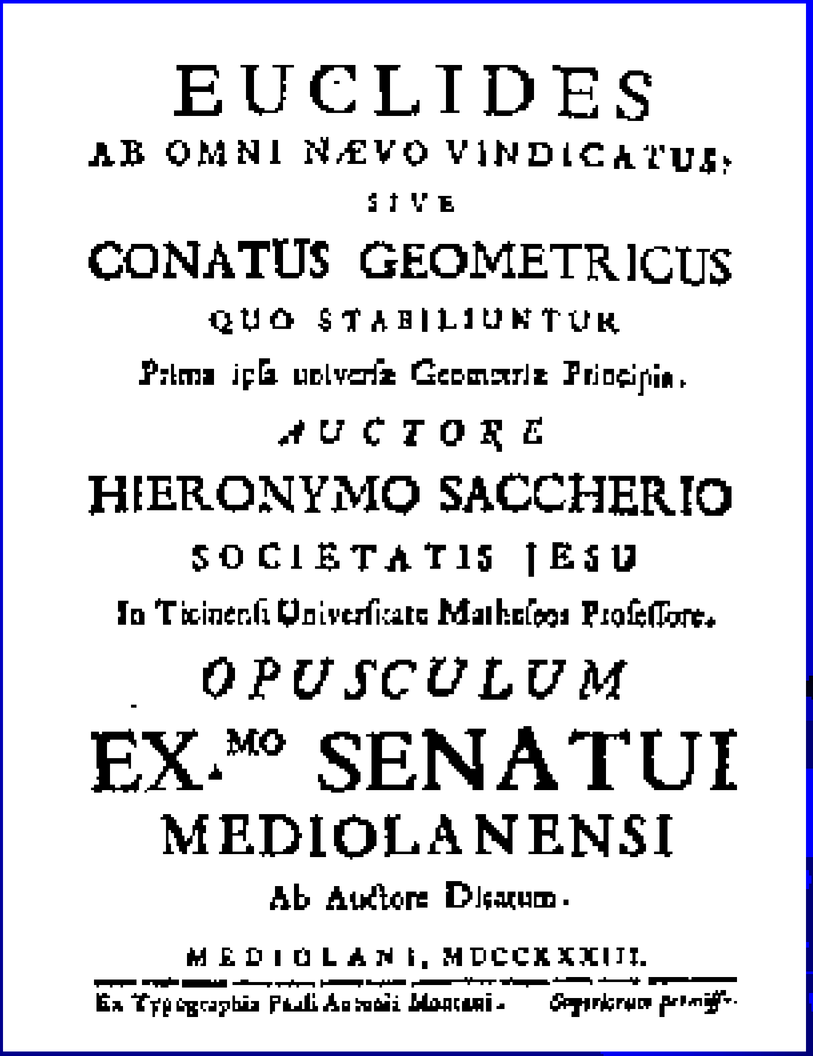
Saccheri

The Italian monk, Saccheri, suggested in 1733 that for a line and a point, there are three possibilities:

- There is exactly one line through the point parallel to the given line
- There is no line through the point parallel to the given line
- There is more than one line through the point parallel to the given line

Euclid 'freed from all defects'

- Saccheri tried to find a contradiction, starting with postulates *other* than Euclid's
- He didn't find one
- … but still claimed that Euclid was *freed from all defects*!


EUCLIDES
AB OMNI NÆVO VINDICATUS:
SIVE
CONATUS GEOMETRICUS
QUO STABILIUNTUR
Prima ipsa universæ Geometriæ Principia.
AUCTORE
HIERONYMO SACCHERIO
SOCIETATIS JESU
In Ticinensi Universitate Matheseos Professore.
OPUSCULUM
EX.MO SENATUI
MEDIOLANENSI
Ab Auctore Dicatum.
MEDIOLANI, MDCCXXXIII.
Ex Typographia Pauli Antonii Montani. Superiorum permissu.

A resolution

- In the nineteenth century, three mathematicians (Gauss, Bolyai & Lobachevsky) reached the same conclusion
- Each worked independently of the others
- They changed the 5th postulate to read:
  - Through a point not on a given line there passes ***more than one*** line parallel to the given line.
- No contradiction was involved!

Lobachevsky (1793-1856)

- Nicholai Lobachevsky, a Russian, published results independently of Bolyai
- The results were ignored by others!
- Eventually dismissed from his university post
- Did most of the development of the new geometry, which generally bears his name

János Bólyai (1802-1860)

- "I have made such wonderful discoveries that I am myself lost in astonishment: Out of nothing, I have created a new and another world."
- A different postulate lead to ***different*** results, rather than to contradictions of Euclidean geometry!

Gauss (1777-1855)

- Carl Friedrich Gauss was arguably one of the best mathematicians of all time
- Did not publish his work on this geometry
- Unwilling to resist the ridicule?

Gauss conclusions

"The assumption that the angle sum [of a triangle] is less than 180 degrees leads to a curious geometry, quite different from ours but thoroughly consistent, which I have developed to my entire satisfaction. The theorems of this geometry appear to be paradoxical, and, to the uninitiated, absurd, but calm, steady reflection reveals that they contain nothing at all impossible."

(from a 1924 letter)

Another geometry!

- Later in the 19th century, Bernhard Reimann (1826-1846) invented a different Non-Euclidean geometry:
- All lines have finite length
- The fifth postulate was replaced by:
    - Through a point in the plane, there can be drawn no line which does not intersect a given line not passing through the given point.
- This is usually called *elliptic geometry*

Bernhard Riemann (1826-1866)

2. Zaprzeczenie piątego pewnika Euklidesa

- przez punkt nie leżący na prostej przechodzi wiele prostych nie mających z nią punktów wspólnych

- każde dwie różne proste przecinają się

Rodzaje geometrii:

- geometria Euklidesa (płaska)
- geometria Łobaczewskiego-Bólyaia-Gaussa (hiperboliczna)
- geometria Riemanna - (eliptyczna)

3. Modele geometrii nieeuklidesowej

Dla geometrii eliptycznej:

- płaszczyzna to sfera
  (powierzchnia o stałej dodatniej krzywiźnie)
- proste to koła wielkie na sferze
- punkty to punkty na sferze

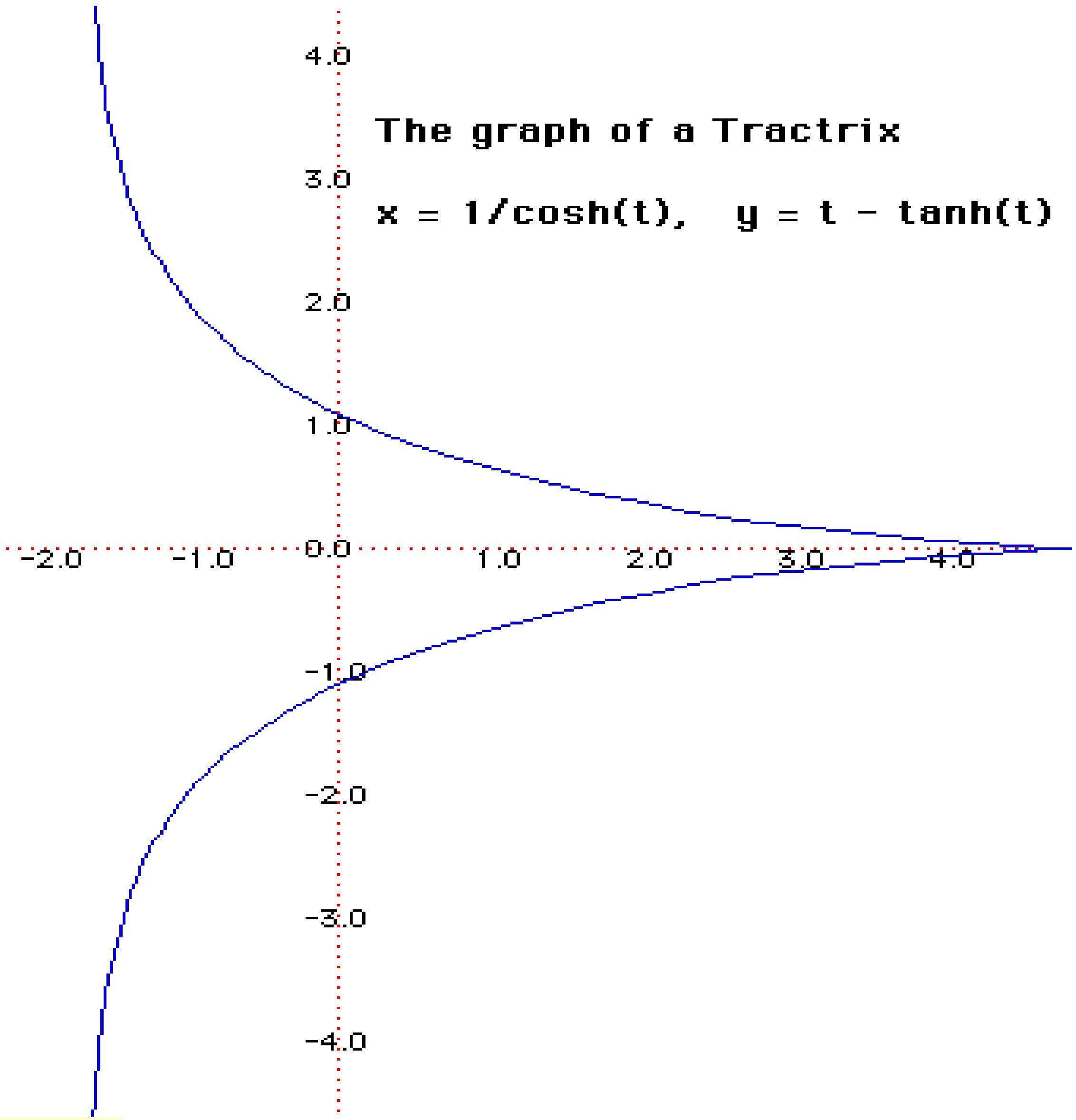
Dla geometrii hiperbolicznej:

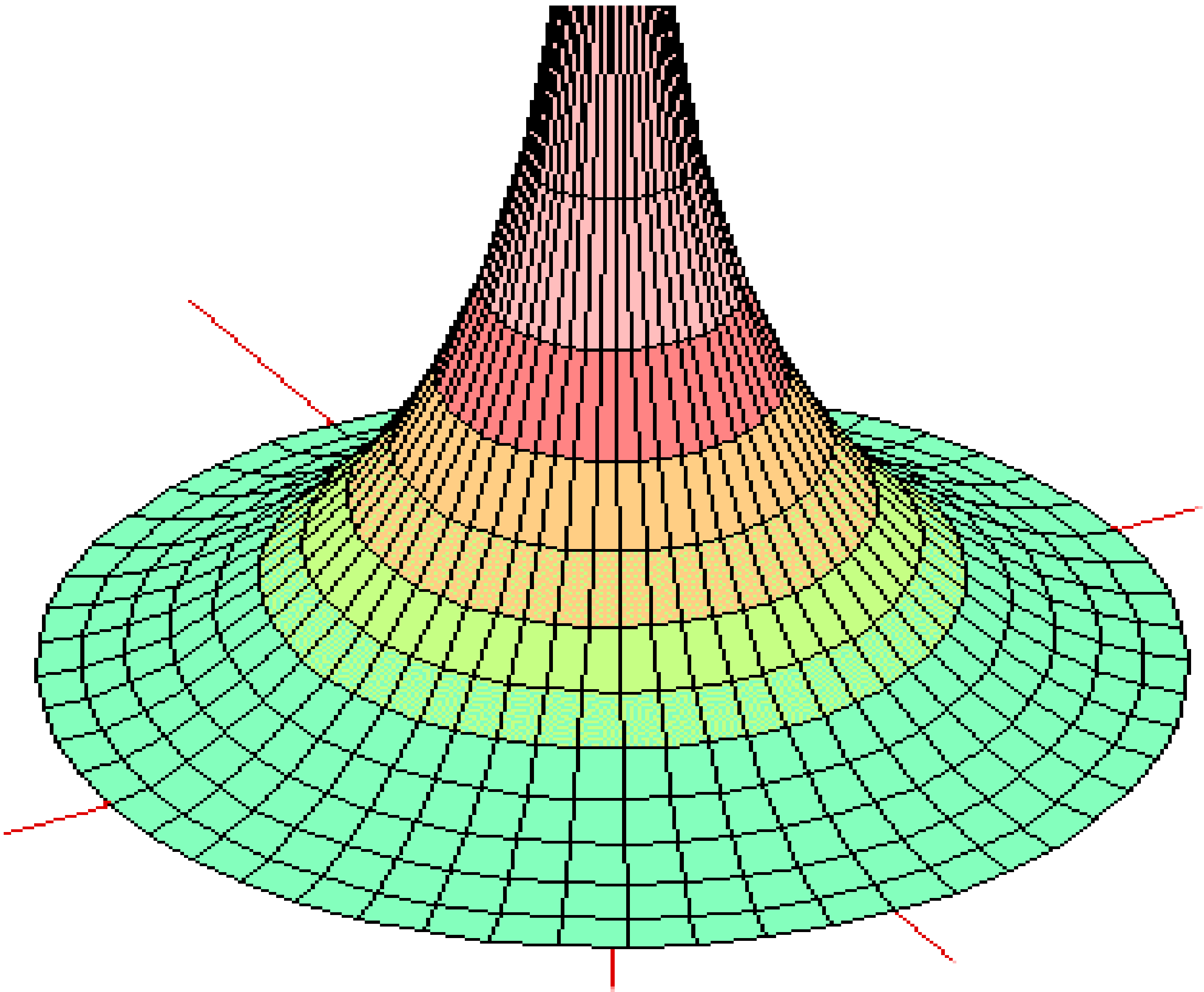
- płaszczyzna to powierzchnia o stałej krzywiźnie ujemnej (*pseudosfera* - powierzchnia obrotowa utworzona przez obrót krzywej *traktrysy*)
- proste to geodetyki na pseudosferze
- punkty to punkty na pseudosferze


LONDON
ONTARIO
Produced by:
The Cartographic Section
Department of Geography
University of Western Ontario

27

30


The graph of a Tractrix
x = 1/cosh(t),   y = t - tanh(t)
4.0
3.0
2.0
1.0
0.0
-1.0
-2.0
-3.0
-4.0
-2.0
-1.0
1.0
2.0
3.0
4.0



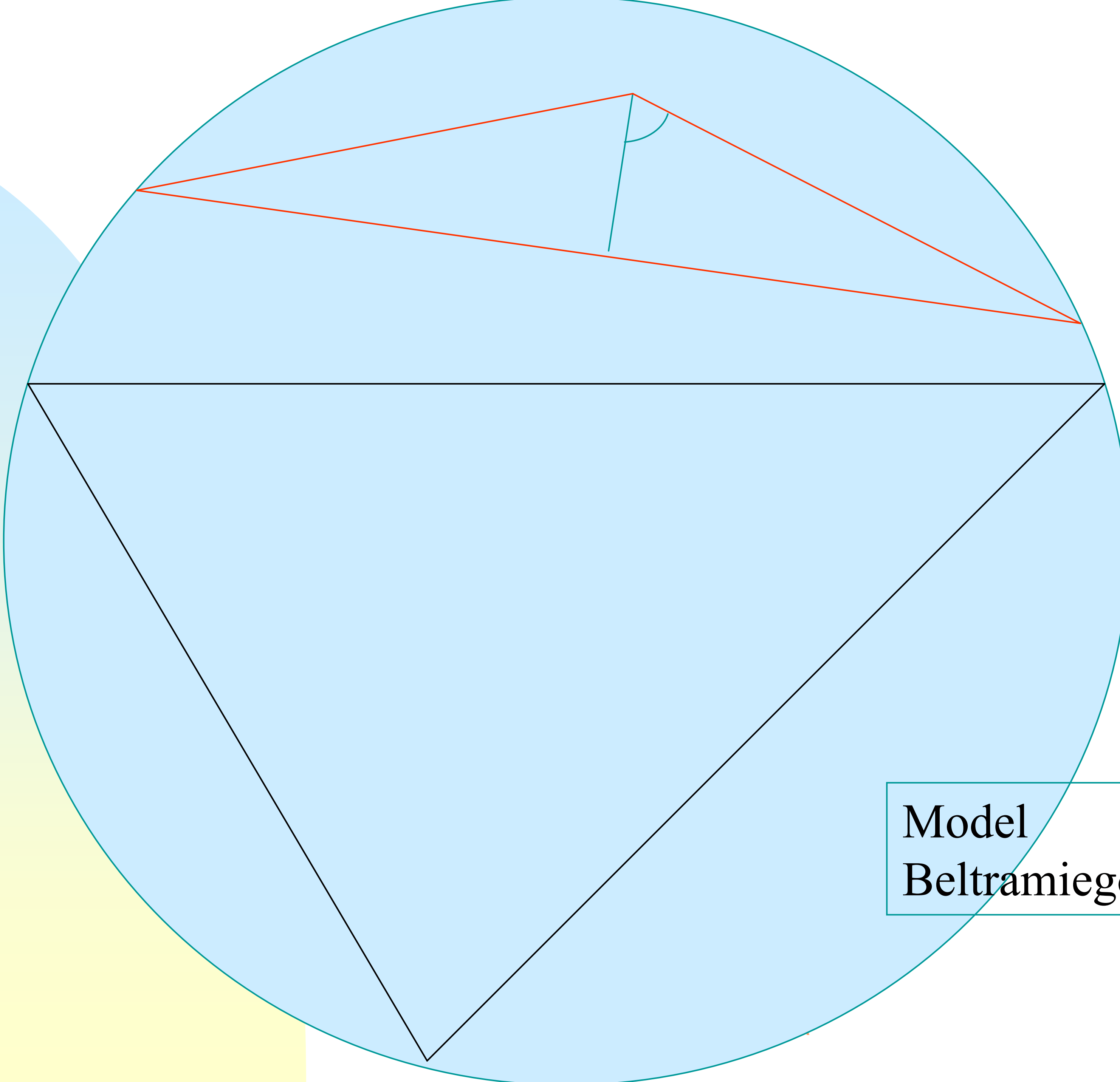
The top half of a pseudo-sphere

4. Modele Beltramiego i Poincarégo

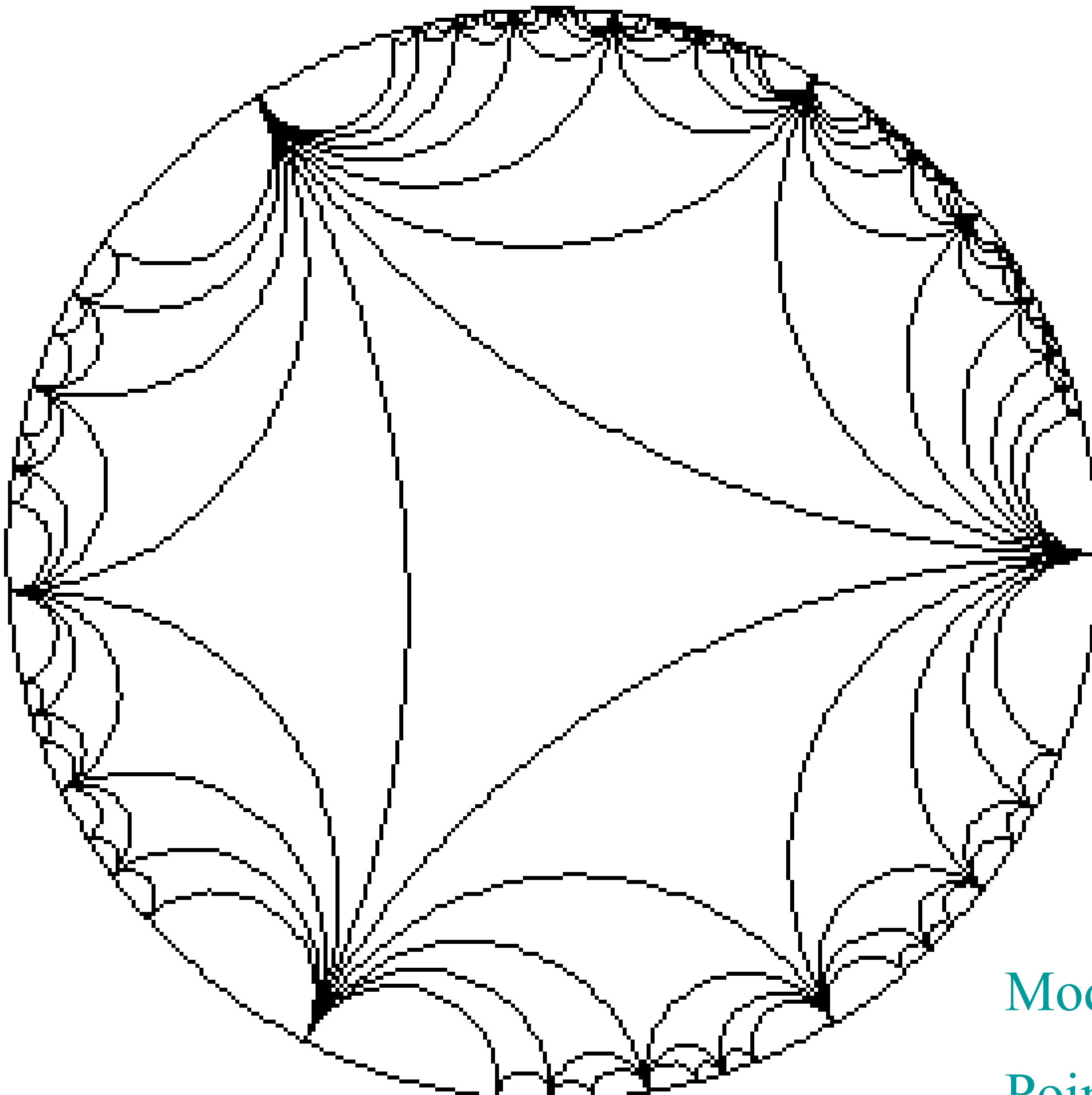
W obydwu modelach płaszczyzna Łobaczewskiego odwzorowana jest na koło. Okrąg zewnętrzny odpowiada prostej w nieskończoności. Przy zbliżaniu się do tej prostej skala odwzorowania zwiększa się.

Model Beltramiego - proste przechodzą w cięciwy koła a kąty nie są zachowane.

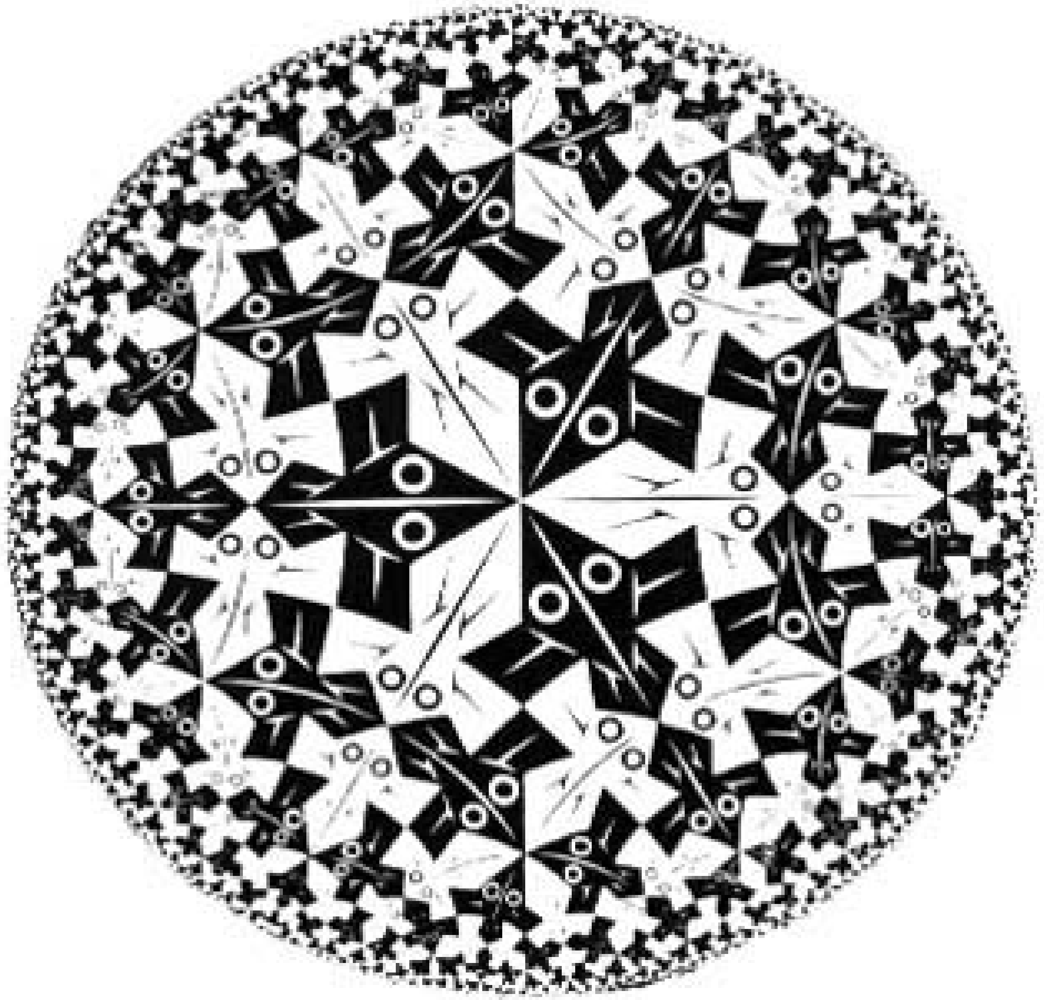
Model Poincarégo - proste przechodzą w łuki prostopadłe do okręgu granicznego. Kąty są zachowane



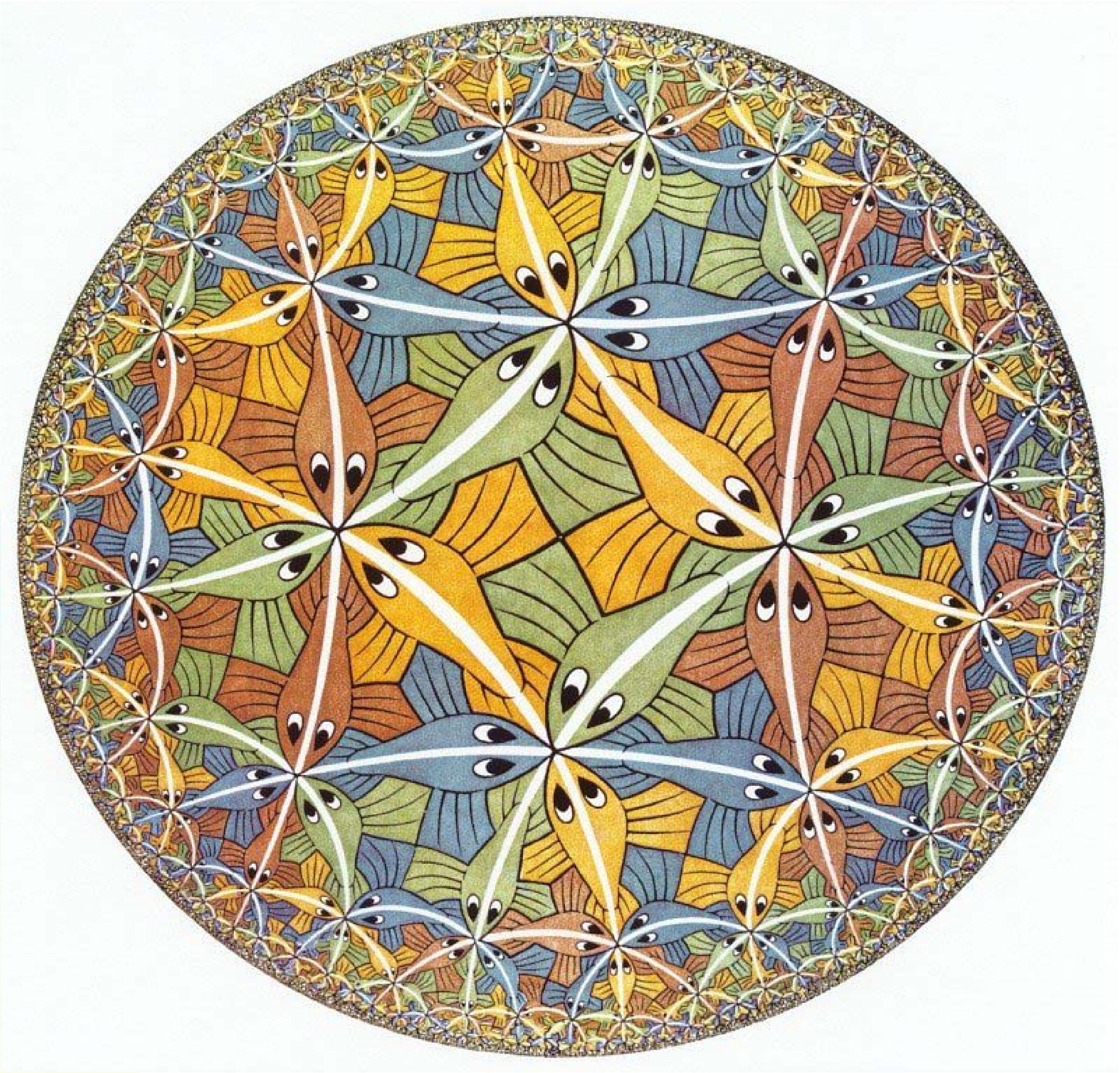
Model Beltramiego



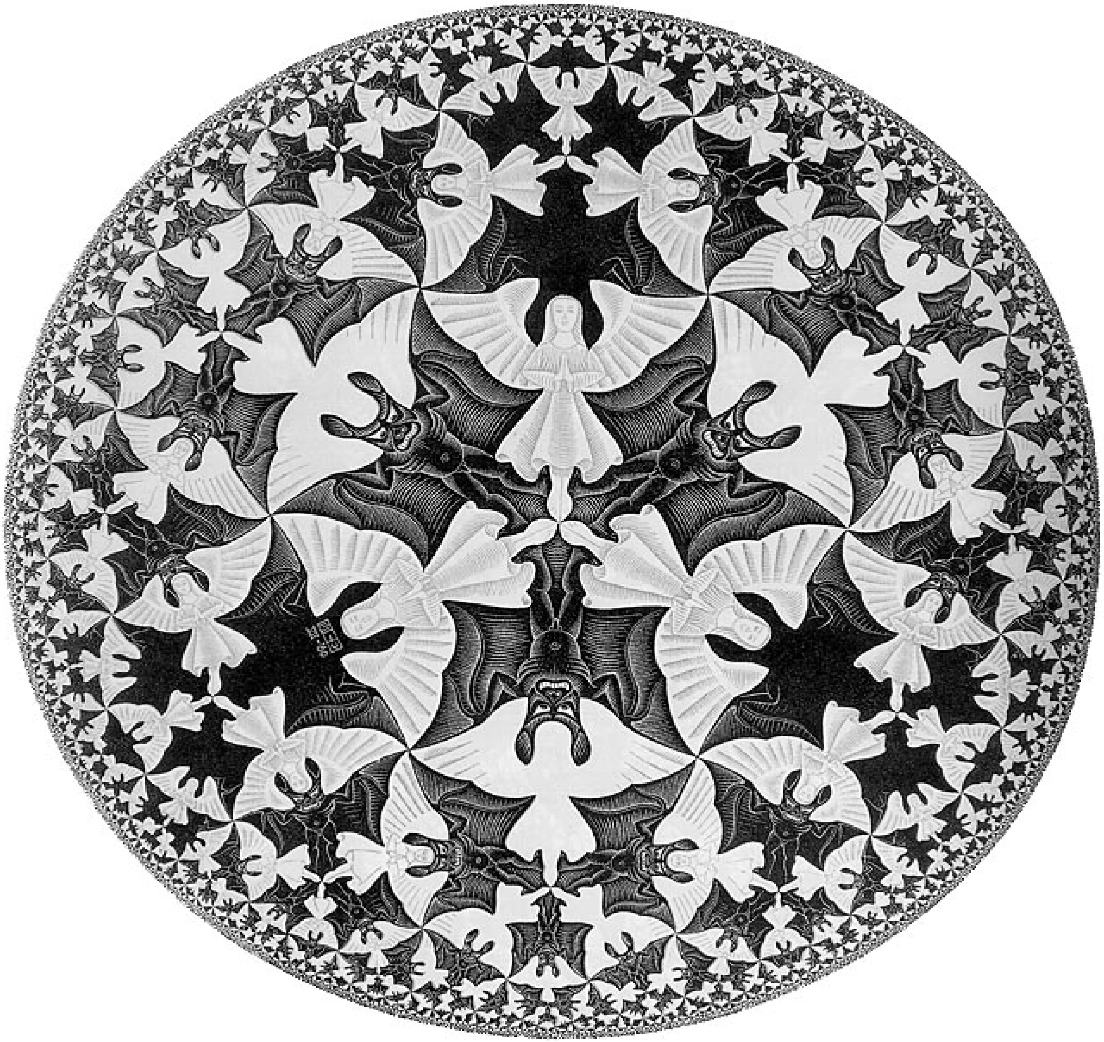
Model Poincarégo



Maurits C Escher - Circle Limit I



Maurits C. Escher - Circle Limit III

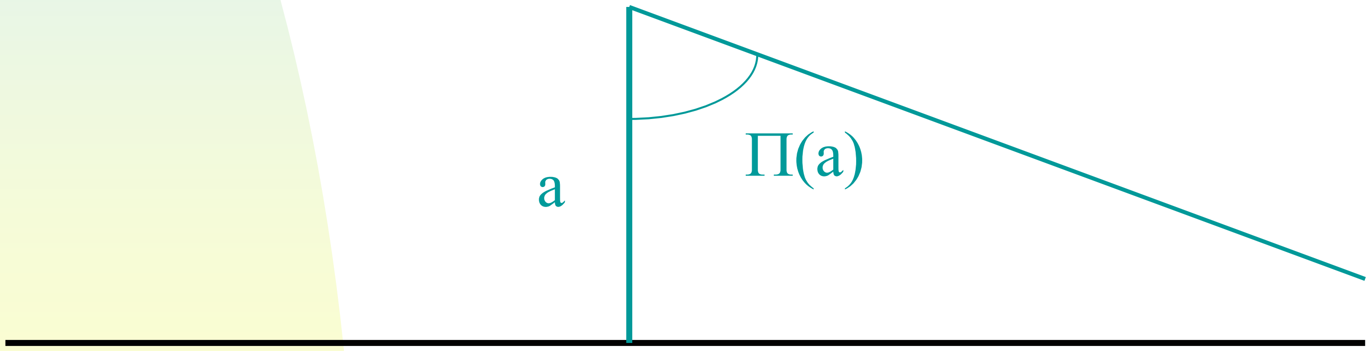


Maurits C. Escher - Circle Limit IV   (Heaven and Hell)

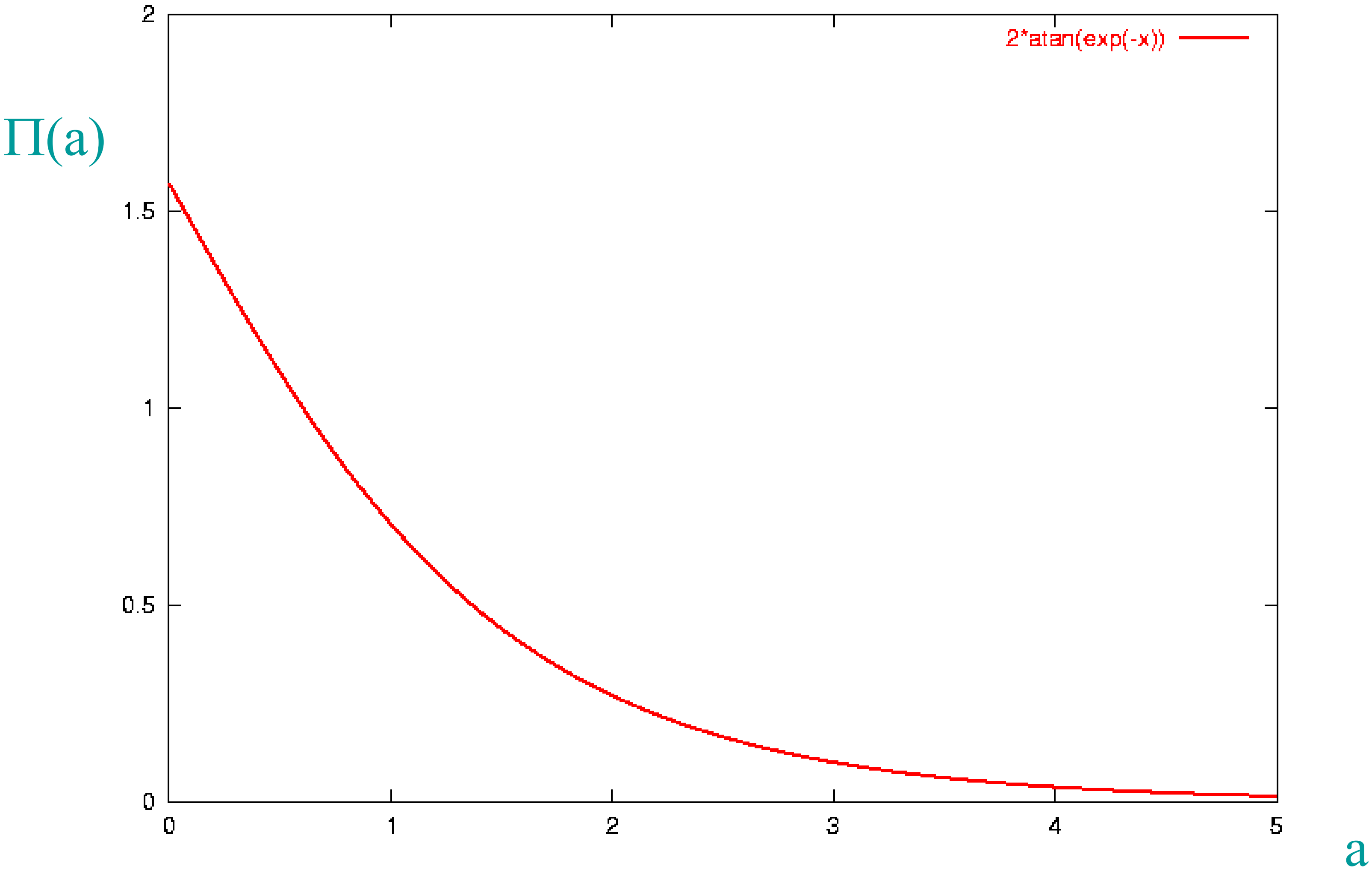
5. Kąt równoległości

W geometrii hiperbolicznej prosta *równoległa* to ta, która z daną prostą ma wspólny punkt w nieskończoności. Inne proste nie mające punktów wspólnych z daną prostą nazywamy *prostymi rozbieżnymi* lub *nadrównoległymi*.

Prosta równoległa tworzy z prostopadłą do danej prostej kąt ostry, zwany *katem równoległości* albo *kątem Łobaczewskiego*.



Kąt równoległości



6. Suma kątów trójkąta i naturalna jednostka długości

Suma kątów trójkąta -

w geometrii płaskiej = π
w geometrii hiperbolicznej < π
w geometrii eliptycznej > π

W geometrii hiperbolicznej suma kątów trójkąta - π
nazywa się *defektem trójkąta*
i podobnie w geometrii eliptycznej π - suma kątów trójkąta
to *nadmiar trójkąta*

16 Twierdzenie: (w geometrii E, H)
Pole trójkąta jest równe jego nadmiarowi (defektowi).
Podobnie jest z polem wielokąta.

Pojawiła się tu naturalna jednostka długości - w naszych modelach równa promieniowi krzywizny sfery lub pseudosfery.

Jest ona mierzalna i dalej bierzemy ją równą jedności.

7. Długość okręgu

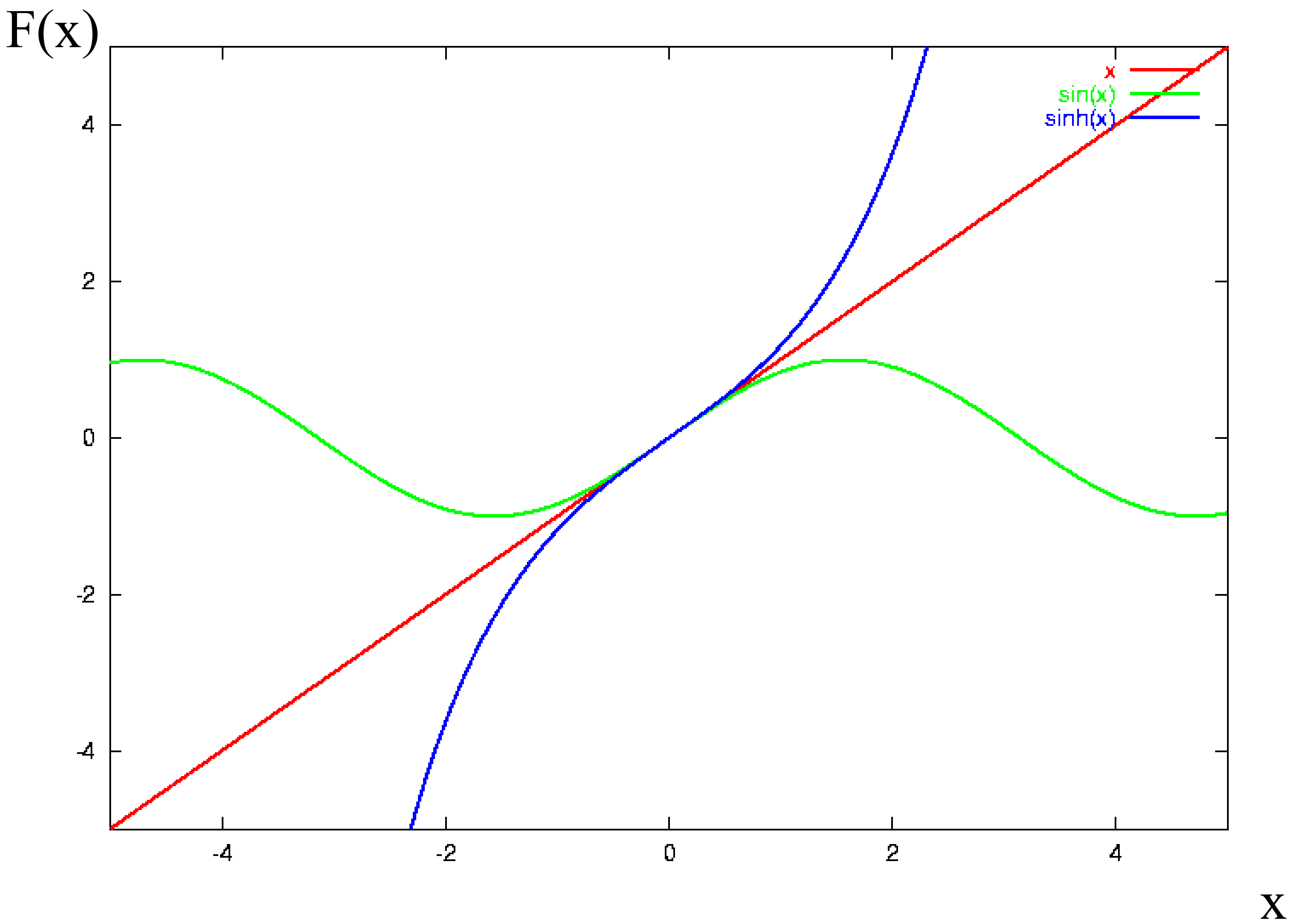
Płaska - $L = 2 \pi R$

Hiperboliczna - $L = 2 \pi \sinh R$

Eliptyczna - $L = 2 \pi \sin R$

Porównajmy te trzy funkcje:

Porównanie trzech funkcji



8. Linie kołowe - ekwidystanta i horycykl

Mowa tu o liniach, które mogą poruszać się po sobie. W geometrii płaskiej mamy dwie takie linie na płaszczyźnie - prostą i okrąg (w przestrzeni możemy jeszcze dodać krzywą śrubową czyli helisę). Krzywa może poruszać się po sobie, gdy ma stałą krzywiznę (a w przestrzeni ponadto stałe skręcenie)

Na płaszczyźnie eliptycznej mamy również dwie linie kołowe - prostą i okrąg.

Natomiast geometria hiperboliczna jest pod tym względem bogatsza - mamy tu cztery płaskie linie kołowe : prostą, okrąg, ekwidystantę i horycykl.

16 Ekwidystanta to miejsce geometryczne punktów równoodległych od danej prostej. Kształt ekwidystanty zależy od jej odległości od prostej podstawowej. Mamy więc wiele różnych ekwidystant, podobnie jak mamy wiele różnych okręgów.

Horycykl to krzywa prostopadła do pęku prostych równoległych. Wszystkie horycykle są przystające - istnieje więc jeden horycykl, podobnie jak jedna prosta.

9. Osobliwości geometrii hiperbolicznej

- Do każdego kąta istnieje prosta zagradzająca (równoległa do obu ramion kąta).
- WKW by dwie proste były rozbieżne jest by istniała prosta prostopadła do obu tych prostych. Łączy ona najbliższe punkty tych prostych.
- Rzut prostopadły prostej na inną przecinającą ją prostą jest odcinkiem.
- Trzecia cecha przystawania trójkątów - trójkąty są przystające jeśli maja trzy kąty parami przystające
- Rzut prostej na prostą z nią rozbieżną jest odcinkiem.
- Twierdzenie Pitagorasa brzmi: $\cosh c = \cosh a \cosh b$ (nb. w geometrii eliptycznej mamy $\cos c = \cos a \cos b$).
- Symetrale trójkąta albo przecinają się w jednym punkcie, albo są do siebie równoległe albo są rozbieżne i mają wspólną prostopadłą.
- Istnieje trójkąt o wszystkich kątach równych zeru zwany *trójkątem niewłaściwym* (jaką ma on powierzchnię?). Jego boki są do siebie równoległe. Wszystkie takie trójkąty są przystające.

9. Osobliwości geometrii hiperbolicznej c.d.

- Rzut prostopadły półprostej na inną prostą nachyloną pod kątem ostrym jest odcinkiem otwartym.
- Rzut prostopadly prostej na rownoległą do niej jest półprostą.
- Rzut prostopadły prostej na prostą z nią rozbieżną jest odcinkiem otwartym.
- Przez dany punkt przechodzi dokładnie jeden horycykl względem danego kierunku.
- Prosta przecina horycykl co najwyżej w dwu punktach.

- Na horysferze obowiązuje geometria euklidesowa.

10. Grupy ruchów

W E i H przesunięcia nie tworzą grupy - złożenie dwu przesunięć wzdłuż dwu boków trójkąta jest równe przesunięciu wzdłuż trzeciego boku i obrotowi o defekt (nadmiar) tego trójkąta.

Grupy ruchów:

- geom. P - przesunięcia + obroty

- geom. H- grupa Lorentza (czyste transformacje Lorentza + obroty)

- geom. E - grupa obrotów o jeden wymiar wyższa (obroty + obroty)

Geometria hiperboliczna ma zastosowanie w kinematyce relatywistycznej.

Gdy dokonamy trzech czystych transformacji Lorentza cząstki ze spinem wzdłuż trzech boków trójkąta (między trzema układami inercjalnymi) , spin cząstki obróci się (tzw. obrót Wignera) o defekt tego trójkąta.

11. Układy współrzędnych

W E i H nie istnieją prostokątne układy współrzędnych bo nie istnieją prostokąty.

W E każde dwie proste przecinają się. W H punkty poza prostą zagradzającą osi układu nie miałyby przypisanych współrzędnych.

Nadal można korzystać z układów biegunowych - np. układ współrzędnych geograficznych jest układem biegunowym.

12. Geometria absolutna

Należą tu twierdzenia prawdziwe zarówno w P, H jak i E.

- proste prostopadłe do danej prostej w tym samym punkcie leżą we wspólnej płaszczyźnie.

- kąty tego samego kąta dwuściennego są równe

- płaszczyzna przechodząca przez prostą prostopadłą do innej płaszczyzny jest sama do niej prostopadła

- trygonometria sferyczna należy do geometrii absolutnej

13. Niektóre twierdzenia spoza geometrii absolutnej

- odcinki równoległe zawarte między prostymi równoległymi są równe

- odcinki wycięte przez pęk równoległych z prostej są proporcjonalne do odcinków wyciętych przez ten sam pęk z innej prostej (tw. Talesa)

- proste równoległe są równoodległe

14. Literatura

Stefan Kulczyński - „Geometria nieeuklidesowa”, PWN 1956

Karol Borsuk, Wanda Szmielew - „Podstawy geometrii”, PWN 1955

Barry Kissane
http://cerval.murdoch.edu.au/kissane/e162lect03/e162lect06/e162lect06

John C. Polking - „The Geometry of the Sphere”
http://math.rice.edu/~pcmi/sphere/

NonEuclid - program do interaktywnej symulacji modelu Poincarego - applet napisany w języku Java
http://www.crpc.rice.edu/softlib/noneuclid.html
http://www.maths.gla.ac.uk/~wws/NonEuclid/NonEuclid.html