47

INSTYTUT FIZYKI UNIWERSYTET JAGIELLOŃSKI

SEKCJA NAUCZYCIELSKA POLSKIEGO TOWARZYSTWA FIZYCZNEGO

ZESZYT 3

1996

FOTON

ZESZYT DYDAKTYCZNY

O rozwiązywaniu zadań z fizyki

Rozwiązywanie zadań przez początkujących

CZĘŚĆ I

Zofia Gołąb-Meyer

Spis treści

1. Wstęp

Obserwacja sposobu rozwiązywania zadań przez uczniów jest bardzo cennym narzędziem pozwalającym zdiagnozować trudności poznawcze, jakie napotykają uczniowie przy uczeniu się, przy próbach zrozumienia fizyki. Właściwe dobrane i zestawione w dobrej kolejności zadania, mogą uczniom ułatwić pokonywanie tych przeszkód poznawczych.

W zeszycie rozumiemy pojęcie zadania dość szeroko – problem do rozwiązania. A więc jest nim pytanie, jest nim również problem rachunkowy, jak również jakieś szersze zagadnienie otwarte.

Rozwiązywanie zadań ma z grubsza dwa aspekty: rozumienie problemu fizycznego i aspekt pewnej biegłości matematycznej. Dlatego też w pierwszym zeszycie poświęconym rozwiązywaniu zadań znalazły się cytaty z dyskusji Heinsenberga z Paulim o rozumieniu w fizyce, zamieszczono w nim rozdział o definiowaniu pojęć fizycznych, o zadawaniu pytań i o rozumieniu wzorów matematycznych. W rozdziale o rozwiązywaniu zadań przez początkujących naszkicowano główne tezy dotyczące tego problemu, które częściowo zostały zilustrowane przykładami w tym zeszycie, a w znacznej części będą przedstawione w następnych zeszytach.

Do tej pory wszelkie zabiegi dydaktyczne koncentrowały się na przyuczaniu uczniów do rozwiązywania zadań, tak jak to robią eksperci. Zauważono, że nowicjusze inaczej atakują zadania niż eksperci.

W rezultacie zabiegów dydaktycznych, wdrażania uczniów w pewną rutynę, rozwiązywania z nimi zadań przykładowych, oferowaniu im algorytmów, zasad heurystycznych – niektórzy uczniowie zyskują biegłość w rozwiązywaniu zadań. Biegłość ta nie tylko gwarantuje im zdawanie kolejnych egzaminów, lecz również w wielu przypadkach efektywne uprawianie zawodu.

Z drugiej jednak strony jest udokumentowany opór, jaki stawiają początkujący uczniowie przeciwko rutynowym metodom rozwiązywania zadań.

W tym zeszycie będziemy się starać wskazać przyczyny tego oporu, przeszkody poznawcze. Rozpoznanie tych przeszkód sugeruje zabiegi dydaktyczne, jakie być może powinny być stosowane przy rozwiązywaniu zadań przez początkujących. Głównie dotyczą one doboru zadań rozwiązywanych jako wprowadzenie w nowy, nieznany dla ucznia dział fizyki.

2. Cytaty o rozumieniu w fizyce

A oto cytaty z dyskusji pomiędzy Heinsenbergiem i Paulim dotyczące rozumienia w fizyce z książki Heinsenberga *Część i całość* [1] z rozdziału *Pojęcie „rozumienia” w fizyce współczesnej* (str. 46).

(str. 48) (Wytłuszczenia pochodzą od Redakcji)

[...] nie jest dla mnie jasne, co oznacza słowo „rozumienie" w naszych naukach przyrodniczych. **Szkielet matematyczny teorii względności nie sprawia mi wprawdzie trudności; jednak chyba mimo to jeszcze nie rozumiałem, dlaczego ruchomy obserwator przez słowo „czas" pojmuje coś innego niż obserwator spoczywający**. To zagmatwanie pojęcia czasu pozostało dla mnie niepokojące i w dużej mierze również jeszcze niezrozumiałe.

„Ale jeśli znasz aparat matematyczny – zarzucił mi Wolfgang – to możesz przecież dla dowolnego zadanego eksperymentu wyliczyć, co zaobserwuje albo zmierzy spoczywający, a co poruszający się obserwator. Wiesz także, że mamy wszelkie podstawy do zakładania, że rzeczywisty eksperyment będzie przebiegał dokładnie tak, jak przewiduje rachunek. Czego więc żądasz?".

„To właśnie jest moją trudnością – odpowiedziałem – że ja też nie wiem, czego jeszcze można żądać. Ale czuję się jakoś oszukany przez logikę, której używa ten aparat matematyczny. Albo – mógłbyś też powiedzieć – zrozumiałem teorię głową, a nie sercem. Co to jest „czas", chyba wiem nawet bez uczenia się fizyki, a nasze myślenie i działanie wciąż przecież zakłada to naiwne pojęcie czasu. Może można byłoby powiedzieć i tak: myślenie nasze opiera się na tym, że to pojęcie czasu funkcjonuje, że osiągamy z nim powodzenie. Jeśli teraz twierdzimy, że to pojęcie czasu musi być zmienione, to już nie wiemy, czy nasz język i nasze myślenie nadal są użytecznymi narzędziami orientacji.

[...] **Chciałbym tylko podkreślić, że mowa i myślenie staną się niepewne, jeśli zmienimy tak podstawowe pojęcia, a niepewność nie da się pogodzić z zrozumieniem**".

[...] Próbowałem przykładami historycznymi uzasadnić swoje wątpliwości dotyczące zrównania umiejętności obliczania z zrozumieniem. „Wiesz, że już w starożytnej Grecji astronom Arystarch myślał o tym, że możliwe jest, iż Słońce znajduje się w środku naszego układu planetarnego. Myśl ta została odrzucona przez Hipparcha i potem zapomniana, a Ptolomeusz wziął za punkt wyjścia nieruchomą Ziemię umieszczoną w środku, orbity zaś planet rozważał jako złożone z wielu nałożonych na siebie orbit kołowych, z cykli i epicykli. Takie ujęcie pozwalało mu bardzo dokładnie obliczać przyszłe zaćmienia Słońca i Księżyca, i dlatego też jego teoria przez półtora tysiąca lat uważana była za niezachwianą podstawę astronomii. Czy jednak Ptolomeusz naprawdę zrozumiał układ planetarny? Czyż nie dopiero Newton, który znał prawo bezwładności i wprowadził siłę jako przyczynę zmian ilości ruchu, za pomocą siły grawitacji rzeczywiście wyjaśnił ruch planet? Czyż nie on jako pierwszy zrozumiał ten ruch? To pytanie wydaje mi się rozstrzygające. Albo posłużmy się przykładem z nowszej historii fizyki. Gdy u schyłku XVIII wieku dokładniej poznano zjawiska elektryczne, istniały bardzo dokładne obliczenia sił elektrycznych między naładowanymi ciałami, nauczyłem się tego na wykładzie Sommerfelda;

przy tym ciała, podobnie jak w mechanice Newtona, występowały jako nośniki sił. Dopiero jednak Anglik Faraday, gdy zmienił problem i zapytał o rozkład sił w przestrzeni i czasie, znalazł podstawę do zrozumienia zjawisk elektromagnetycznych, co następnie zostało sformułowane matematycznie przez Maxwella”.

Pauli (str. 52):

[...] **Rozumieć przyrodę oznacza przecież chyba: rzeczywiście wejrzeć w jej powiązania; wiedzieć z pewnością, że poznało się jej wewnętrzny mechanizm. Wiedza taka nie może być osiągnięta dzięki poznaniu jednego zjawiska lub grupy zjawisk, nawet jeśli odkryje się w nich jakieś uporządkowania: może ją dać dopiero znalezienie powiązania i odniesienia do wspólnych źródeł całej pełni faktów doświadczenia. Pewność opiera się wtedy na tej pełni**. Niebezpieczeństwo błędu będzie tym mniejsze, im bogatsze i różnorodniejsze są doświadczenia i im prostsza jest wspólna zasada, do której są one sprowadzane. To, że później można odkryć jeszcze ogólniejsze powiązania, wcale nie jest zarzutem.

Heinsenberg (str. 53):

[...] „Rozumieć” oznacza przecież chyba zupełnie ogólnie: mieć przedstawienia i pojęcia, za których pomocą potrafi się rozpoznać wielką rozmaitość zjawisk jako jednolicie powiązaną, czyli „pojąć”. **Myśl nasza uspokaja się, gdy stwierdzamy, że jakaś szczególna, pozornie zagmatwana sytuacja jest tylko szczególnym przypadkiem czegoś ogólniejszego, które właśnie takie może być prościej sformułowane**. Odnoszenie wielobarwnej rozmaitości do czegoś ogólnego i prostego, albo w języku twoich Greków: „Wiele” do „Jednego”, jest tym, co określamy jako „rozumienie”. **Umiejętność obliczania z góry często jest konsekwencją rozumienia, posiadania właściwych pojęć, ale nie jest po prostu tym samym, co rozumienie**.

Czytelnikom *Fotonu* polecamy krótki rozdział z podręcznika Feynmana (t. II, cz. I, str. 29) pt. *Co znaczy „rozumieć” w fizyce.*

3. O przedwczesnym, ścisłym definiowaniu pojęć

3.1. Wstęp

W przypadkach, w których pojęcia fizyczne są formalnie wprowadzane zbyt wcześnie, to znaczy gdy uczeń nie jest jeszcze dojrzały do asymilacji pojęcia, mamy do czynienia z występowaniem formalizmu, często w formie zdegenerowanej.

Oznacza to, że uczeń wyuczywszy się na pamięć definicji pojęć, ich oznaczeń literowych i wzorów, w których one występują, jest nawet zdolny rozwiązywać proste zadania z fizyki, odpowiadać na pytania, na które odpowiedź jest prostą reprodukcją formułek – ale *de facto* uczeń niewiele rozumie z mechanizmów fizycznych, które te pojęcia i wzory opisują.

W praktyce szkolnej uważa się (proszę porównać poglądy Wygotskiego, *Foton 43*) [2], że podanie definicji w miarę precyzyjnej, uczniom nieznającym jeszcze odpowiednich terminów z fizyki jest zgodne z zasadą dydaktycznego stopniowania trudności (nauczanie astrukturyzacyjne). Powyższa opinia jest cytatem z artykułu A. Gajdy (*Fizyka w Szkole*) [3].

Otóż pogląd ten jest powszechny. Nauczyciele żywią nadzieję, że w miarę upływu czasu, omawiania kolejnych przykładów, definicja, prawo nabierze sensu, a wcześniejsze pamięciowe utrwalenie to ułatwia.

I tak się rzeczywiście w wielu wypadkach dzieje. Dowodem jest powszechność tej praktyki szkolnej; w końcu sporo uczniów jednak opanowuje fizykę w zadowalającym stopniu.

W tym rozdziale wysuniemy argumenty przeciwko takiemu podejściu. Uważamy bowiem, iż czasami **przedwczesna werbalizacja**, formalizacja i wyuczanie się na pamięć odpowiednich definicji praw, reguł, nie tylko nie jest pomocna w zrozumieniu, lecz nawet wręcz przeciwnie szkodzi – bowiem **przerywa proces rozmyślania nad pojęciem, blokuje dochodzenie do rozumienia**.

Oczywiście nie chodzi o podpieranie powyższej tezy znanym przykładem: uczeń na pytanie o zasady dynamiki Newtona – podaje definicję zasad chemicznych. W sytuacji, w której uczeń działa w stresie może wypowiadać dowolne nonsensy.

O błędzie dydaktycznym polegającym na przedwczesnym wprowadzaniu nowych pojęć i definicji mówił już w swym *Poradniku dla Samouków* Marian Smoluchowski w 1917 r. [4].

W rozdziale tym rozważany jest problem definiowania wielkości fizycznych w szkole podstawowej. Na trudności związane z tym problemem zwróciła uwagę autorka interesującego artykułu, Pani Ewa Gajda:
„Pojęcie wielkości fizycznej w nauczaniu fizyki w klasie VI” [3].

Pani Gajda zauważyła, że uczniowie mimo iż w toku nauki poznają wielkości fizyczne takie jak siłę, masę czy gęstość, to jednak nie potrafią odpowiedzieć na pytanie *„Co to jest wielkość fizyczna?”*.

Uważam, iż

1/ jest to zupełnie prawidłowy fakt, że dzieci mają kłopot z wyartykułowaniem tej (i innych) definicji,

2/ nie ma potrzeby werbalizowania tej (i innych) definicji zbyt wcześnie w pełnej ścisłej formie,
3/ co więcej, przedwczesne definiowanie może być szkodliwe – blokuje bowiem rozmyślania nad pojęciem.

I. Przykład *wielkość fizyczna* omawiany przez A. Gajdę

Pani Gajda pisze, iż uczniowie szóstej klasy, trzynastolatki, w pierwszym półroczu nauczania fizyki poznają takie wielkości fizyczne jak: temperatura, masa, gęstość, siła. Jednakże, mimo to nie potrafią odpowiedzieć na pytanie *„Co to jest wielkość fizyczna?”*. I nie powinno nas to dziwić. Dorośli, po kursie fizyki też mają kłopot z odpowiedzią na to pytanie, fizycy odpowiadają pytaniem: *„W fizyce klasycznej czy kwantowej?”*. Pojęciem wielkości fizycznej można poprawnie operować bez artykułowania ścisłej definicji. Po usłyszeniu pytania, dzieci **słusznie zgadują**, iż chcemy dowiedzieć się o jakiejś wspólnej cesze poznanych dotąd wielkości fizycznych. Jest to trudne, gdyż poznane wielkości są tak bardzo różne między sobą: temperatura, masa, siła. Ponadto, żadna z nich nie została jeszcze zdefiniowana. Dzieci **nie wiedzą o co chodzi pytającemu**.

Jest jednak rzeczą bardzo pożądaną, by z pojęciem wielkości fizycznej został skojarzony fakt, iż wielkości fizyczne **można mierzyć** bezpośrednio lub pośrednio i wyrażać je w odpowiednich dla tych wielkości jednostkach. I TO WSZYSTKO! Zupełnie **nie ma potrzeby** podawania definicji. A jeśli się już ją poda, to nie należy odpytywać jej na stopnie w dosłownym brzmieniu!

3.2. Uzasadnienie

Na tym bardzo wstępnym etapie nauczania w świadomości uczniów zaczynają się kształtować takie pojęcia takie jak masa, temperatura, siła. Dopiero po dłuższym obcowaniu z tymi pojęciami, w **rozmaitych kontekstach**, to rozumienie wyostrzy się. Poprawnej definicji temperatury przeciętny uczeń długo jeszcze nie będzie mógł „strawić”, co nie przeszkadza, iż może się tym pojęciem wprowadzonym operacyjnie (to co pokazuje termometr) prawidłowo posługiwać. Zwerbalizowanie definicji i wyuczenie się jej na pamięć powoduje oderwanie się języka fizyki od rzeczywistości. **Uczeń zaczyna traktować fizykę jak abstrakcyjny, obcy język nie mający nic wspólnego z otaczającą go fizyczną rzeczywistością**. Przedwczesne wyuczenie na pamięć definicji powoduje **blokadę rozumowania** prowadzącego do przejścia od intuicyjnego wyczuwania do pełnego rozumienia. Na ten temat wypowiadała się Zofia Krygowska w swoim „Wstępie do Dydaktyki Matematyki” [5]. Uważam, iż w propedeutycznym kursie należy jak najwięcej używać języka potocznego. Chodzi nam bowiem o to, by dzieci zebrały jak najszerszą bazę empiryczną pod przyszłe rozumienie pojęć fizycznych. Musimy się też porozumiewać z dziećmi, które jeszcze nie znają języka fizyki. Poprawny język fizyki należy początkowo **przemycać**, mówiąc: „innymi słowy...", lub „fizycy w takich przypadkach mówią...".

W jednym z kolejnych Zeszytów Dydaktycznych *Fotonu* przedstawiona będzie konkretna propozycja stopniowego przemycania sformułowania drugiej zasady termodynamiki. Zwolennicy wprowadzania od razu w miarę ścisłych definicji i ścisłego formułowania praw mają nadzieję, iż kiedyś, w przyszłości te ścisłe definicje nabiorą sensu. Tak może być, niestety nie zawsze tak jest.

Czterdzieści lat temu, w szkole podstawowej w czwartej klasie, na lekcjach geografii nauczono dziesięciolatków: *„Równik ma czterdzieści Wiseł"*. Zdanie to pamiętam do dziś. Zupełnie go nie rozumiałam. Słowo *Wisła* kojarzyło mi się raczej z czymś takim jak *łokieć*. Mimo zadry niezrozumienia nie dociekałam, co zdanie oznaczało. Dopiero później ucząc się wspólnie z moją córką o Wiśle, a mianowicie – iż ma ona długość tysiąca kilometrów, skojarzyłam to sobie z wyuczonym na pamięć w dzieciństwie zdaniem.

Dzieci w szkole powtarzają jak małpięta *„ułamek dzielimy przez ułamek..."* (w Japonii chórem), czynią to przed wykonaniem działania. Dla większości dzieci (miejmy nadzieję) zdanie to nabiera później głębszego sensu, dla części dzieci pozostanie jednak receptą używaną jedynie na lekcjach matematyki. Te dzieci nie zastosują umiejętności dzielenia ułamków w życiu codziennym. Wprawdzie uczenie się na pamięć jest metodą starą i stosowaną od wieków (pięcioletnie dzieci żydowskie wkuwają Torę na pamięć) – to jednak w odniesieniu do nauk przyrodniczych metoda ta jest niewłaściwa.

Dla wielu dzieci, zbyt wcześnie wykute zdanie: *siła równa się masa razy przyspieszenie* nie tylko iż na ma żadnego związku z otaczającą rzeczywistością, z ruchami ciał, ale co gorsza ten pozorny komfort umiejętności odpowiadania na pytanie *Co to jest siła?*, przerywa bardzo trudny proces dochodzenia do rozumienia prawa Newtona, do rozumienia sensu pojęć *masa, siła* i *przyspieszenie*.

Nie oznacza to jednak, iż we wstępnym kursie fizyki nie należy wprowadzać pojęć i wielkości fizycznych. Trzeba się tylko posługiwać jak najwięcej językiem potocznym, dobierać starannie przykłady by wyostrzyć rozumienie. Poprawny i ścisły język przemycać, używając dwóch języków. Po omówieniu pojęcia, czy zjawiska językiem potocznym, należy powiedzieć: *fizycy mówią w takich przypadkach*, lub po prostu *innymi słowy...*

Używanie bardzo precyzyjnego języka nie zawsze jest ułatwiające i konieczne. Znany jest cytat Nielsa Bohra odpierającego zarzut nieścisłości jego modelu. Bohr zrobił następującą uwagę: „Ze zmywaniem naczyń jest przecież tak samo, jak z językiem. Mamy brudną wodę do płukania i brudne ścierki, a w końcu udaje nam się umyć talerze i kubki.

Podobnie w języku mamy niejasne pojęcie i logikę o zakresie stosowalności ograniczonym w nieznany sposób, a mimo to udaje się wprowadzić jasność w nasze rozumienie przyrody” [1] (str. 178, z rozdziału *Dyskusje na temat języka*).

Problem precyzji w uprawianiu fizyki i matematyki jest stale problemem aktualnym.

W przypadku dzieci w szkole podstawowej, jak wykazały badania Piageta, większość dzieci nie osiągnęła jeszcze dojrzałości w myśleniu formalnym. Dzieci takie mogą już zupełnie poprawnie rozumować logicznie, operować pojęciami, jednakże tylko w konkretnych przypadkach. Dzieci nie są w stanie wyartykułować ogólnych praw, sformułować ogólnych definicji. One nie odczuwają jeszcze takiej potrzeby (!) pomimo, iż już zaczynają się prawidłowo posługiwać pojęciami. Trzynastoletni Bronek, dobry uczeń klasy VII rozwiązujący dość zaawansowane zadanie o mijających się pociągach, podróżnikach poruszających się z różną prędkością na poszczególnych odcinkach trasy – odrzuca jako niepotrzebną definicję ruchu o stałej prędkości, zamieszczoną w podręczniku do VII klasy Gintera. Dla niego stała prędkość jest pojęciem pierwotnym; wystarczającym jest rozumienie stałej prędkości jako ruchu **stale takiego samego**.

W zamian za to dzieci mają doskonałą pamięć i zdolność dostrzegania i zapamiętywania szczegółów. Można więc z powodzeniem uczyć wstępu do fizyki nawet małe dzieci.

II. Przykład

Wydaje się nie ulegać wątpliwości, iż wiele z rozumowania dzieci przebiega przez analogię. Trudność w uczeniu polega na tym, by wychwycić, które z cech przedmiotów, zjawisk, dzieci uważają za istotne, i które z nich są podstawą budowania analogii.

A oto przykład wprowadzania pojęć bez uciekania się do definicji.

Falk i Herrmann w swoim podręczniku dla klas piątych i szóstych [6] *„Książka o energii”* wprowadzają pojęcie energii na drugiej lekcji mówiąc: *„Urządzenia, maszyny, ludzie i zwierzęta potrzebują energii. Dostają ją z jakimś materiałem pędnym, paliwem czy pożywieniem”.* Na jednej z następnych lekcji wprowadzona jest jednostka *J* (dżul) (uczniom pokazuje się licznik energii elektrycznej, opakowanie z jakiegoś produktu żywnościowego z zaznaczoną kalorycznością).

W następnych rozdziałach książki Falka i Herrmanna są dyskutowane różne nośniki energii, przepływ energii, źródła i odbiorniki energii. Możemy uznać, że używanie pojęcia energii w różnych kontekstach ułatwia w późniejszym czasie dokonanie operacji wyabstrahowania energii z tych wielu sytuacji.

W drugim półroczu nauczania, w piątej klasie pojawia się u Herrmanna i Falka elektryczność. Nie jest ona definiowana. Mówi się, że elektryczność też może być nośnikiem energii.

Wprowadzaniu pojęcia energii będzie poświęcony kolejny numer Zeszytów Dydaktycznych *Fotonu*. Omówiony tam będzie nieco dokładniej sposób wprowadzania energii przez Herrmanna i Falka.

3.3. Podsumowanie

Uważam za wysoce prawdopodobne, że niepowodzenia wszelkich skróconych kursów fizyki tkwią w tym, że studenci nie przeszli wcześniej przez okres obznajamiania się z różnymi pojęciami fizycznymi. Krótkie kursy fizyki mają szanse powodzenia tylko wtedy gdy słuchacze są do nich przygotowani nie tylko matematycznie, lecz oswojeni koncepcyjnie. Proces przygotowawczy musi odbywać się w dłuższym czasie.

Uważam, iż we wstępnym kursie fizyki podawanie uczniom apriorycznie w miarę precyzyjnych definicji pojęć fizycznych za błędne, ponieważ może prowadzić do blokady własnych poszukiwań i powoduje, iż język fizyki staje się samoistnym, nie mającym nic wspólnego z otaczającą dziecko rzeczywistością. **We wstępnym kursie uczeń ma gromadzić przede wszystkim bazę danych doświadczalnych opisywaną językiem potocznym**.

Z drugiej strony jednak używanie języka zbliżonego do potocznego niesie ogromne zagrożenie budowania barier poznawczych i utrwalania błędnych koncepcji.

Można zatem mało konstruktywnie stwierdzić, iż we wstępnym kursie fizyki należy wprawdzie używać języka zbliżonego do potocznego, nie wymieniać wszystkich ograniczeń i założeń – lecz trzeba mimo to niesłychanie baczyć na dobór używanych słów i przykładów.

Łatwo powiedzieć, trudno wykonać. Dlatego nauczanie jest sztuką. W następnym numerze, poświęconym pojęciu pracy i energii omówimy przykładowe sformułowania podręcznikowe i ich ewentualny wpływ na rozumienie.

Wydaje się, iż dużą pomocą we wprowadzaniu pojęć w czasie, gdy uczniowie nie mogą jeszcze operować biegle formalizmem matematycznym odgrywają rolę uproszczone rysunki i diagramy.

4. O zadawaniu pytań

I. Logika pytań

W jednym z ostatnich numerów *Matematyki* Tadeusz Rams w artykule pt. „Logika pytań a nauczanie matematyki” [7] relacjonuje, iż nauczyciel matematyki zadaje przeciętnie 200–300 pytań dziennie. T. Rams zastanawia się jak taka ilość pytań wpływa na uczenie się i myślenie uczniów.

Należy mieć nadzieję, że nauczyciele fizyki w czasie lekcji również zadają uczniom pytania, a nie ograniczają się wyłącznie do wykładu *ex catedra*.

Na początku swego artykułu T. Rams przypomina czytelnikom elementy logiki erotetycznej, czyli teorii pytań. Zajmuje się ona strukturą zdań pytajnych. Króciutki rozdział cytuję poniżej za T. Ramsem, zastępując niektóre przykłady matematyczne podawane przez Ramsa, przykładami z lekcji fizyki.

Struktura zdań pytajnych; Pytania rozstrzygnięcia i pytania dopełnienia

Zdania pytajne nie są zdaniami w sensie logiki: nie opisują rzeczywistości. Każde zdanie pytajne języka polskiego jest zbudowane z trzech elementów: partykuły pytajnej (*czy*, *kto*, *kiedy*, *dlaczego* itp.), po której następuje zdanie w sensie logicznym (lub jego fragment) i znak zapytania. Partykuła pytajna może być niekiedy opuszczona i zastąpiona odpowiednią intonacją.

Ze względu na zakres partykuły pytajnej, zdania pytajne można podzielić na dwie grupy: **pytania rozstrzygnięcia** i **pytania dopełnienia**.

Pytania rozstrzygnięcia zaczynają się od słówka *czy*.

W pytaniach tego typu sama struktura pytania określa w pewnym stopniu oczekiwaną odpowiedź. W odpowiedzi mamy tutaj dwie możliwości: *tak*, *nie*; na przykład: *Czy miedź jest metalem?*; albo kilka możliwości, np. (patrz cytowane zadanie w rozdziale 7)

Czy po przesłonięciu połowy soczewki skupiającej otrzymamy
a/ górną połowę obrazu
b/ dolną połowę obrazu
c/ obraz nieostry
c/ obraz ciemniejszy

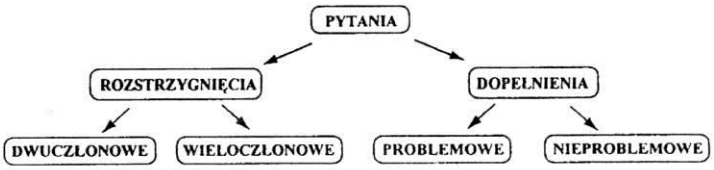
W związku z tym w logice erotetycznej mówi się o pytaniach rozstrzygnięcia dwuczłonowych i wieloczłonowych. Odpowiedzi na te pytania sprowadzają się do potwierdzenia lub zaprzeczenia, bądź stwierdzenia własnego braku wiedzy w tym zakresie.

Wszystkie pytania niebędące pytaniami rozstrzygnięcia nazywamy **pytaniami dopełnienia**; na przykład:

Z działa wystrzelono pocisk z prędkością początkową o wartości v_0 *skierowaną pod kątem* 45° *do poziomu. W jakiej odległości od działa uderzy on w cel?*

Na ogół odpowiedzi na takie pytania sprowadzają się do wskazania odpowiednich wartości wielkości fizycznych (w postaci wzoru lub lepiej konkretnych liczb).

Pytaniami dopełnienia mogą też być pytania o związek łączący stany rzeczy (lub zdania) i wtedy mówi się o pytaniach problemowych – na przykład pytania o przyczynę (*dlaczego?*), o skutek lub cel (*po co?*).



Pytania dopełnienia wyznaczają na ogół schemat odpowiedzi zwany **daną pytania** (*datum quaestionis*). Na przykład wszystkie odpowiedzi na pytanie: *Jaką energię potencjalną względem podłogi ma ciało o masie m umieszczone na wysokości h nad poziomem podłogi?* można uzyskać ze schematu zdaniowego *mgh jest szukaną energią potencjalną*.

Tak więc dana pytania jest funkcją zdaniową, z której przez podstawienie odpowiednich nazw za zmienne uzyskuje się za każdym razem zdanie prawdziwe lub fałszywe.

Zmienne zawarte w danej pytania nazywamy niewiadomymi pytania. Pytanie może zawierać kilka niewiadomych. Na przykład pytanie: *Pod jakim kątem α należy wystrzelić pocisk (ustalona wartość prędkości początkowej) by zasięg był największy?* ma dwie niewiadome α oraz z, dana pytania jest postaci: *Kąt α odpowiada maksymalnemu zasięgowi z.*

Zakres niewiadomej to taki zbiór, którego elementy (a dokładniej – ich nazwy) można podstawić za zmienne w danej pytania.

Na przykład zakresem niewiadomej α w powyższym pytaniu jest zbiór kątów, a niewiadomej z – zbiór odległości od działa.

Każde zdanie, powstające z danej pytania przez podstawienie za niewiadomą nazwy jakiegoś elementu zakresu niewiadomej pytania, nazywamy odpowiedzią właściwą na dane pytanie. Odpowiedź właściwa może być zdaniem prawdziwym bądź fałszywym, na przykład $45°$ *jest kątem maksymalnego zasięgu* – jest zdaniem prawdziwym lub $60°$ *jest kątem maksymalnego zasięgu* – jest zdaniem fałszywym.

Odpowiedź na pytanie jest wyczerpująca, jeżeli jest ona zdaniem prawdziwym i to takim, z którego wynika każda prawdziwa odpowiedź właściwa na dane pytanie.

Przez pozytywne założenie pytania rozumiemy stwierdzenie, że przynajmniej jedna z odpowiedzi właściwych jest prawdziwa; przez negatywne założenie – stwierdzenie, że przynajmniej jedna z nich jest fałszywa. Na przykład pozytywnym założeniem pytania *Dla jakiej różnicy temperatur* ΔT idealnego silnika Carnota można osiągnąć sprawność 40% jest *Dla różnicy temperatur $\Delta T = \eta T$ (gdzie T – temperatura źródła)* – pozytywnym założeniem pytania, negatywnym zaś – *Dla jakiegoś ΔT (T – temperatura źródła) nie można osiągnąć sprawności 40%.*

Pytanie, którego pozytywne lub negatywne założenie nie jest prawdziwe, nazywa się pytaniem niewłaściwie postawionym.

Każde dwuczłonowe pytanie rozstrzygnięcia ma tylko dwie odpowiedzi właściwe, będące zdaniami nawzajem sprzecznymi. Dlatego też pytania tego typu są zawsze właściwie postawione. Testy wyboru zawierają pytania tego typu.

Ze względu na większe walory kształcące, w nauczaniu fizyki preferowane są pytania dopełnienia, a szczególnie pytania problemowe. Pytania rozstrzygnięcia mogą bowiem prowokować bezmyślne zgadywanie (choć w przypadku wieloczłonowych pytań rozstrzygnięcia prawdopodobieństwo trafienia na poprawną odpowiedź jest mniejsze).

Od pytań dopełnienia wymaga się, aby były sformułowane jasno, tzn. by:
* wyraźnie wskazywały dane pytania
* pozwalały na ustalenie zakresu niewiadomej pytania oraz by istniała co najmniej jedna odpowiedź właściwa na każde z nich.

Wszystkie pytania powinny być jednoznaczne. Zdania oznajmujące, które wchodzą w ich skład, muszą mieć sprecyzowany sens. Formułując pytanie unikać trzeba wieloznaczności, zarówno poszczególnych wyrazów, jak i tych, które wynikają z szyku wyrazów.

Powyższa klasyfikacja, przykłady oraz wymaganie odnośnie sformułowania pytań zostały, jak już powiedziano, przedstawione przez matematyka.

Fizyka wnosi specyficzne dla niej problemy, na ogół nieobecne w nauczaniu matematyki.

II. Pytania na lekcjach fizyki

1° Konwencje używane na lekcjach fizyki

Konwencje przyjęte przez nauczyciela i autora podręcznika niestety nie zawsze są przyjęte i zrozumiałe przez uczniów.

Oto przykładowe pytania:
* *Dlaczego gwoździe i igły mają ostro zakończone końce?* (S. Lipiński) [8]
* *Dlaczego atom jest elektrycznie obojętny?* (W. Harabuda) [9]
* *Dlaczego wolisz pić kawę z fajansowego kubeczka niż z metalowego?*
* *Co stanie się i dlaczego gdy będziemy ogrzewać sprężynę?* (H. Kaczorek, Z. Słówko) [10]

Spontaniczna odpowiedź udzielona na to pytanie poza lekcją fizyki jest inna niż na lekcji; np. poza lekcją odpowiedzią będzie:
1/ ... bo łatwiej się wbijają...
2/ ... bo materia jest elektrycznie obojętna...
3/ ... bo metalowy parzy w usta...

Taka dwuznaczność nie musi być błędem dydaktycznym (a pozwala na oszczędność czasu) pod warunkiem, że uczniowie doskonale wiedzą z kontekstu, z toku lekcji, o co chodzi, jednym słowem gdy pytanie nie wyzwala w uczniach reakcji, zgadywania „o co chodzi nauczycielowi”, czy „o co chodzi w pytaniu”.

Takie zgadywanie ma często miejsce, gdy pytania są o przyczynę, czy cel.

2° Brak jednoznaczności w pytaniach o przyczynę, cel

Bywa, iż pozornie prosty problem i pytanie o przyczynę jest niejednoznaczne. Tak jest wtedy, gdy dana sytuacja jest spowodowana ciągiem przyczynowym innych sytuacji, lub gdy tłumaczenie zjawiska wymaga szeregu postępujących po sobie (wynikanie) kroków.

Niejednoznaczne będzie pytanie o przyczynę, gdy do spełnienia jej są potrzebne (konieczny warunek) dwa lub więcej warunków. Pytający może *implicite* zakładać, że jeden z nich jest spełniony, dla ucznia jednak to nie musi być jasne.

Oto przykłady pytań (Lipiński, str. 43)
* *Co jest powodem, że odczuwamy bóle głowy, mdłości, przy gwałtownej zmianie wysokości?*

Autor oczekuje od ucznia odpowiedzi: „gwałtowna zmiana ciśnienia”. Gwałtowna zmiana ciśnienia jest pierwszym krokiem (i trywialnym) w łańcuchu wytłumaczenia tych objawów fizjologicznych, o których każdy uczeń wie, że mogą mieć też zupełnie inne ``pierwsze przyczyny" (zatrucie). Jako tłumaczenie (dlaczego?) uczeń chciałby znać wspólną dla obu przypadków przyczynę (jakiś proces fizjologiczny, nie znam się na tym i nie znam odpowiedzi).

Przykład:
Uczeń siedzący na lekcji fizyki będzie szukał utajonych założeń i przeszukiwał znane już sobie fakty poszukując odpowiedzi na pytanie:
* *Czy rośliny doniczkowe mają wpływ na ilość ładunków elektrycznych w powietrzu? Jeśli tak, to jaki?*, (Harabuda, str. 9):
* *Jakie ładunki są korzystne, a jakie szkodliwe dla organizmu ludzkiego?*, (Harabuda, str. 10).

Ostatnie pytanie nie jest z zakresu fizyki tylko medycyny.

Brak porozumienia pomiędzy pytającym, a pytanym polega często na **różnicy w abstrahowaniu sytuacji i innym rozumieniu skali czasowej**.

A oto przykład (Lipiński str. 26):

Skoczek spadochronowy spada po otwarciu spadochronu ruchem jednostajnym prostoliniowym ... dlaczego. Otóż pytający w wyrażeniu „po otwarciu” rozumie „po upływie jakiegoś czasu potrzebnego do ustalenia stałej prędkości”, natomiast uczeń rozumie „po otwarciu” – natychmiast. Uczeń ma rację i ma prawo tak rozumieć. Oczywiście, że wtedy ruch nie jest jednostajny, tylko opóźniony.

Cytowany przykład jest błędnym pytaniem. Sprawa jednak w innym przypadku jest subtelniejsza.

Pytanie z pewnego zadania z konkursu fizycznego i egzaminu wstępnego na UJ (patrz: ten zeszyt – Przykłady) o prędkość kulki po zderzeniu sprężystym z szalką wagi dotyczyło oczywiście już prędkości po czasie trwania zderzenia sprężystego.

O takich prędkościach się mówi, bowiem omawiając zderzenie kul sprężystych, zaniedbuje się bardzo krótki okres oddziaływania. Pytający mieli prawo oczekiwać od studentów takiego rozumienia pytania.

Okazuje się jednak, że część uczniów zrozumiała pytanie o prędkość po pierwszym kontakcie kulki z szalką.

W czasie nauczania uczeń uczy się pewnych konwencji i sposobów abstrahowania (pomijanie tarcia, oporów, rozmiarów ciała, własności sprężystych ciał). Jest to dla ucznia trudne. Na lekcji nauczyciel może dorzucić słowny komentarz. W zbiorze zadań, w podręczniku zostają nagie słowa.

3° Pytania kontrfaktyczne

Pytania kontrfaktyczne są dla uczniów trudniejsze niż inne. Musimy jednak uczniów ćwiczyć w rozumowaniu kontrfaktycznym – jak inaczej możemy dojść do mechaniki punktu materialnego, zasady bezwładności. Rozumowaniu i wyobraźni kontrfaktycznej trzeba pomóc, jednak należy to robić ostrożnie.

Zagadnienie dotyczące rzutu ukośnego, kończące się pytaniem kontrfaktycznym (Lipiński) [8] *Jak poruszałaby się piłka gdyby nie działały na nią siły oporu i siła ciężkości* jest bardzo trudne. Do wyobrażenia rzutu ukośnego potrzebny jest bowiem układ odniesienia – Ziemia; tu grawitacja jest zawsze. „Wyłączenie” grawitacji (przy zachowaniu ruchu obrotowego Ziemi) spowodowałoby rozmaite efekty – których autor pytania nie zamierza dyskutować. Zatem lepiej zapytać się o ruch piłki, gdzieś hen w przestrzeni kosmicznej.

III. Zakończenie

Na szczęście ze zbiorów zadań zaczynają znikać zadania typu „Co żołnierz ma z broni i dlaczego” ale konstrukcje logiczne wielu z nich wymagają poprawy.

W rozdziale zaledwie naszkicowano zagadnienie związane z zadawaniem pytań. Problem optymalnego formułowania pytań jest zagadnieniem wymagającym badań. Sposób formułowania pytań zależy od celu zadawania pytań. A zatem:

- Czy chodzi o sprawdzenie wiedzy, a jeśli tak to jakiej.

- Czy chodzi o naprowadzenie ucznia na rozwiązanie, czy o wytrącenie go ze stanu równowagi i ukierunkowanie go pytaniem na zupełnie nowy problem.
- Jaka ma być struktura logiczna pytań, tak by problem natury czysto logicznej nie przysłaniał treści fizycznych.
- Jak uniknąć przegadania (na rzecz precyzji), nie popaść w kolokwializmy i rozmycie problemu.

W tym krótkim artykule chodzi o uczulenie Państwa na sposób zadawania pytań. Pytania wieloczłonowe należy raczej dzielić na więcej pytań. Należy zwracać uwagę na sformułowania. Z podręcznika Kaczorka i Słówki [10], który jest kopalnią doskonałych zadań i problemów, trzeba jednak z ostrożnością wybierać zadania domowe, zadania na klasówki i zadania konkursowe. Uczeń może mieć trudności ze zrozumieniem stopnia idealizacji.

Należy też zwrócić uwagę, że język polski dopuszcza wyrażanie tożsamości i implikacji tymi samymi słowami, ponadto „i" oraz „lub" mają niekoniecznie zawsze identyczne znaczenie jak „i" i „lub" w logice.

Naturalne i formalne rozumienie przez uczniów funktorów zdaniotwórczych i kwantyfikatorów w nauczaniu matematyki doczekało się już szeregu prac, np. H. Siwek [11] (praca doktorska, WSP w Krakowie). W nauczaniu fizyki problem czeka na badanie.

T. Rams pisze:

Nauczycielom matematyki, a także innych przedmiotów, potrzebna jest refleksja nad tym:
* Jak zbudowane jest pytanie (zdanie pytajne)?
* Kiedy pytanie jest poprawne, a kiedy niewłaściwie postawione?
* Jakie są rodzaje pytań?
* Jakie typy pytań są korzystniejsze dla postępów uczniów?
* Jaki powinien być poziom trudności pytań stawianych na lekcji?
* Jaki jest optymalny czas wyczekiwania na odpowiedź?

5. O rozumieniu wzorów matematycznych w fizyce

5.1. Trudności pojęciowe, techniczne i psychologiczne związane z symboliką algebraiczną

Dla ucznia matematyka w fizyce objawia się przede wszystkim użyciem symboli literowych na oznaczanie wielkości fizycznych oraz zastosowaniem wzorów algebraicznych. Trudności we właściwym rozumieniu symboli literowych i w zastosowaniu algebry w fizyce objawiają się jako formalizm i werbalizm, czyli jako bezmyślna i często chaotyczna manipulacja wzorami oraz małpie powtarzanie wzorów bez jakiegokolwiek zrozumienia. Trudności te w matematyce scharakteryzowała w klasycznych już pracach Zofia Krygowska [12]. W fizyce niektóre z tych trudności występują w znacznie ostrzejszej formie. Dodatkowo dochodzą trudności związane *par excellence* z fizyką, to jest ze zrozumieniem procesów fizycznych opisywanych odpowiednimi formułami algebraicznymi.

Krygowska w swoich pracach sugeruje pewne zabiegi dydaktyczne, które mają uczniom pomóc w zwalczeniu tych trudności. Odpowiednie nauczanie fizyki mogłoby nie tylko pomóc w lepszym rozumieniu fizyki, ale i matematyki. A.W. Fuller w artykule zamieszczonym w książce *Nauczanie Fizyki* pod redakcją Lewisa [13] (str. 171) pisze:

> ...takie równanie jak $l = l_0 (1 + \alpha t)$ winno się przerabiać na lekcji matematyki, gdzie można je powiązać z obliczaniem procentów a także innymi równaniami liniowymi. Byłoby nawet bardziej pożądane, by nauczyciel matematyki dochodził do wyrażeń algebraicznych na podstawie wyników doświadczeń.

W pierwszej części rozdziału zostaną przypomniane tezy artykułu Z. Krygowskiej szczególnie istotne dla zagadnienia rozumienia wzorów fizycznych. Następnie omówimy trudności właściwe dla fizyki.

A oto co pisze Krygowska [12] (str. 23):

> Z historii nauki wiemy, że wprowadzenie rachunku symbolicznego do matematyki było punktem zwrotnym w jej rozwoju. Droga prowadząca do tego rachunku nie była prosta, oznaczanie bowiem liczby i zmiennej za pomocą litery było rezultatem wielu prób, doświadczeń i ulepszeń w sposobach wyrażania i zapisywania myśli matematycznej. (...) Przejście od języka konkretów do języka symboli, od słów do znaków stanowi dla ucznia zasadniczą trudność, której pokonanie łączy się z jakościową zmianą w myśleniu ucznia.

To przejście, to typowa przeszkoda epistemologiczna.
Krygowska wymienia następujące trudności:

1. **Wieloznaczność symbolu**. Krygowska ma na myśli np. możliwość różnych interpretacji znaków „+”, „–”. I tak „–2” można interpretować jako symbol liczby ujemnej (a wtedy dla ucznia później „–a” oznacza liczbę ujemną) lub jako symbol liczby przeciwnej do liczby „2”.
   Widzimy, że pierwsza z interpretacji stanowi przeszkodę we właściwym zrozumienia sensu symbolu „–a”.
   W przypadku, gdy symbole opisują wielkości fizyczne to wieloznaczność symbolu potęguje trudności w zrozumieniu. Dotyczy to np. sensu znaku „–”, znaku dzielenia, mnożenia i równości. Do tego zagadnienia powrócimy później.

2. **Umowność zapisu wyrażenia algebraicznego**, głównie związana z kolejnością działań. I tak $2\frac{1}{2}$ oznacza sumę 2 + 1/2, zaś 2 a/b oznacza iloczyn.
3. **Litera jako znak zmiennej i stałej**. Rozróżnianie zmiennych i parametrów. Czy dla ucznia 2a jest symbolem liczby czy funkcji?
   Jest to poważny problem w rozumieniu fizyki. Zagadnienie rozumienia zależności funkcyjnych omówimy oddzielnie.

4. **Psychologiczna trudność pogodzenia automatycznego i świadomego posługiwania się symbolami**. U niektórych uczniów zmechanizowanie czynności dokonuje się bardzo szybko, szybciej niż ich rozumienie.
   Typ nauczania wyrabiający najpierw nawyki a dopiero potem rozumienie, powszechnie zresztą stosowany w praktyce w nauczaniu początkowym, czerpie swe, niepoprawne uzasadnienie w psychologii Wygotskiego [14]. Zwolennicy tej metody mają nadzieję, że w momencie, kiedy uczeń dojrzeje odpowiednio intelektualnie, znajdzie gotową, czekającą na niego i ułatwiającą mu zrozumienie strukturę.
   W szkołach japońskich, dzieci przed przystąpieniem do działań na ułamkach, chórem recytują odpowiednie reguły [15].
   Trzeba przyznać, że większość uczniów znakomicie się czuje przy wykonywaniu rutynowych, zmechanizowanych czynności.

Fizyka wnosi dodatkowe trudności związane z jej eksperymentalnym charakterem. **Podstawową trudnością, z której wynikają wszystkie inne jest stosowanie symboli literowych i wzorów algebraicznych do opisów pojęć, relacji i praw fizyki, które w umyśle ucznia są dopiero *in statu nascendi*. Matematyka ma dopomóc w ich zrozumieniu, a z kolei sens fizyczny ma dopomóc w uchwyceniu sensu operacji matematycznych, formalizmu matematycznego. Dodatkowym utrudnieniem jest to, że ten zapętlony proces zachodzi w czasie, gdy uczeń rozumuje jeszcze na poziomie konkretnym, lub dopiero myślenie formalne zaczyna się kształtować**.

Możemy wyodrębnić następujące trudności, na jakie napotykają uczniowie w rozumieniu wzorów matematycznych w trakcie nauki fizyki:

1. różnorodność pojęć fizycznych opisywanych formalnie równoprawnie symbolami literowymi
2. różnorodność zjawisk opisywanych takimi samymi formalnie wzorami, ich różny sens w sensie przyczynowym
3. wymiarowość wielkości fizycznych występujących we wzorach
4. dynamiczny sposób odczytywania wzorów, to jest nierównoprawność lewej i prawej strony wzorów. To może być w pewnych przypadkach nie przeszkodą, a wręcz ułatwieniem rozumienia, czy jak mówi Bachelard [16] filarem rozumienia.

W praktyce trudności te objawiają się jako trudności w rozumieniu zależności funkcyjnych i w tym co Krygowska nazywa zdegenerowanym formalizmem czyli totalnym oderwaniem się formuł od znaczenia fizycznego.

Powyższe trudności są nieuchronne i właściwy tok nauczania powinien je przekuć w element zrozumienia sensu korzystania z algebry, a co za tym idzie dalej, matematyki do opisu przyrody.

5.2. Trudności w rozumieniu symboli +, –, ×, :, =

5.2.1. Dodawanie i odejmowanie

Jak pisze Zaremba [17] uczniowie traktują symbole +, –, ×, :, = jako sygnał do wykonywania odpowiednich czynności, dodaj, odejmij, pomnóż, podziel i przyrównaj. Jak wykazały badania, działania odwrotne są trudniejsze od prostych.

Jak już wspomniano duże trudności występują przy przechodzeniu od liczb konkretnych do wyrażeń literowych. Liczba „–2” została zapamiętana jako ujemna, często symbol „–a” oznacza zatem liczbę ujemną.

Pod wpływem **pierwszych** przerabianych i zinterioryzowanych przykładów, dzieci sądzą, że odejmowanie i dzielenie powodują pomniejszanie. W konsekwencji następuje:

a/ mylenie działania odejmowania i mnożenia (w tzw. zadaniach tekstowych, w zadaniach z fizyki)

b/ opory przy dzieleniu przez liczby mniejsze od zera

c/ opory przy odejmowaniu liczb ujemnych.

Przy stosowaniu tych podstawowych działań w odniesieniu do wielkości fizycznych pojawia się dodatkowa przeszkoda związana z wymiarowością wielkości fizycznych.

Obecnie w szkole liczby naturalne wprowadza się mnogościowo, jako moce zbiorów. To wprowadzenie ułatwia rozumienie sensu dodawania masy np. 2 kg + 3 kg = 5 kg to jak dwa jabłka i trzy jabłka to razem pięć jabłek. Transfer do innych wielkości fizycznych, zwłaszcza substancjalnych, jak np. energia, też na ogół jest gładki.

Mnogościowe rozumienie sensu liczb naturalnych może być jednak przeszkodą w rozumieniu sensu np. wyrażenia 3° + 2° = 5° i w ogólności temperatury, która też jest rozumiana substancjalnie. Następuje mylenie jej z energią wewnętrzną [18].

Z kolei powszechne wprowadzanie liczb ujemnych, przez ilustrowanie osi liczbowej przez skalę temperatury, powoduje późniejsze odrzucanie przez uczniów koncepcji zera bezwzględnego.

Zrozumienie sensu dodawania, wraz z działaniem odwrotnym, odejmowaniem związane jest z nabyciem przez ucznia struktury, jak to nazywa Piaget, odwracalności i zachowania. Dopóki to zachowanie ilustrowane jest na takich obiektach, co do których jest łatwe stwierdzenie zachowanie (jabłka nie znikają same z siebie), to jednak w odniesieniu do plasteliny, i nawet wody nie jest to dla dziecka oczywiste; wtedy interpretacja rozumowania dzieci nie jest prosta. Piaget, badając formowanie się u dzieci zrozumienia zachowania masy i objętości, na przykładzie plasteliny i wody, przeoczył, dla niego oczywiste założenie, że zarówno plastelina jak i woda są nieściśliwe i mają stałą gęstość. Tymczasem to nie jest *a priori* oczywiste, to wymaga empirycznej weryfikacji. Co więcej, dzieci mają swe **pierwsze** doświadczenie właśnie ze ściśliwymi, miękkimi obiektami takimi jak: poduszka, kołderka, kawałek bułeczki. Zrozumienie, że kawałek plasteliny, dowolnie zdeformowany ma taką samą masę wymaga wcześniejszego empirycznego potwierdzenia, tak jak i zrozumienie zachowania objętości wody wymaga empirycznego przekonania o stałej gęstości wody.

Interpretacja wyników Stachórskiej i Jaśkowskiego [19] [20] pokazuje, że zinterioryzowanie tego faktu jest następnie przeszkodą w rozumieniu procesu mieszania się wody z alkoholem, czy rozpuszczania soli w wodzie. Widzimy, że pokonanie jednej bariery niekiedy kreuje następną. Trudności ze zrozumieniem sensu dodawania energii omówione zostaną osobno.

5.2.2. Mnożenie i dzielenie

Pierwsze paradygmatyczne przykłady mnożenia są zwykle ilustrowane mnożeniem obiektów przez liczby. Np. „pięcioro dzieci dostaje po pięć jabłek. Ile jabłek dostają wszystkie dzieci?”

Nową jakością (i przeszkodą) jest mnożenie wielkości wymiarowych np. 5 m przez 5 m. Tu w wyniku dostaje się nową jakość, powierzchnię, mierzoną w metrach kwadratowych. Zrozumienie mnożenia w tym przypadku jest pokonaniem pewnej bariery. Jak pokazują badania u dzieci nie występuje transfer z jednego przykładu na inny. Dlatego też dżul, rozumiany jako iloczyn metra i niutona musi być asymilowany niejako od początku.

Występuje tu dodatkowa trudność wizualizacji dżula. Trudność zależy od sposobu wprowadzania dżuli, a mianowicie od tego czy jest on wprowadzany niezależnie, jako miara energii, czy poprzez pracę. Jedna i druga droga będzie wiodła przez przeszkody [21].

Jeszcze większe trudności występują przy rozumieniu dzielenia. Podzielenie bowiem tortu na pięcioro dzieci jest zupełnie czymś innym niż np. przebycie drogi jednego metra w czasie jednej sekundy. Tu w wyniku dzielenia powstaje **nowa jakość**, a mianowicie prędkość.

5.2.3. Znak równości

Pierwotnym rozumieniem znaku równości, aktywnym, jest czynność przyrównywania przez dziecko (egotyzm ucznia) jednej rzeczy do drugiej, lewej strony równości do prawej. To rozumienie ewoluuje w „stawanie się”. Prawa strona równości staje się lewą. Dzieci widzą pewne następstwo czasowe i przyczynowe tego „stawania się równym”. Taką interpretację wzmacnia używanie komputerów. Takie rozumienie może być filarem w sensie używanym przez Sierpińską [22]. Konflikt natomiast może pojawić się, gdy równość oznacza tożsamość, gdy równość jest definicyjna, gdy jest istotą prawa fizycznego. A oto przykład:

Przykład 1

Poniżej mamy cały szereg wzorów, które uczniowie nazywają potocznie „wzorami na siłę”.

$$F = mg \tag{1}$$

$$F = kx \tag{2}$$

$$F = \mu F_N \tag{3}$$

$$F = (1/2)c_w A\rho v^2 \tag{4}$$

Powyższe wzory mówią uczniowi, „jaka jest” siła (jak ją wyliczyć) w przypadku jednorodnego pola grawitacyjnego, siły sprężystości, tarcia czy oporu. Wzory mówią od czego konkretnie siły zależą i jak je można wyliczyć. Wzory te są matematycznym wyrazem praw, modeli czy zwykłej fenomenologii. Zwykle dla danego ciała w jakiejś konkretnej sytuacji fizycznej, jedna z wielkości występujących w powyższych wzorach jest zmienną, a pozostałe są parametrami. I tak w pierwszym wzorze w większości problemów zarówno m jak i g są parametrami, wobec tego siła jest stała, w drugim k jest parametrem, a x odkształcenie – zmienną, w trzecim wzorze współczynnik tarcia μ jest parametrem, a w czwartym zmienną na ogół jest prędkość.

To która z wielkości fizycznych jest parametrem, a która zmienną, zależy od fizycznego postawienia problemu (co zresztą jest kolejną przeszkodą, o tym problemie mówimy nieco dalej).

Początkujący uczniowie na ogół w powyższych wzorach nie widzą zależności funkcyjnych tylko traktują wzory jako konkretne algorytmy do wyliczenia sił.

Jeśli więc II Zasada Newtona była uczniom podana w formie:

$$F = ma$$

to jest ona odczytywana analogicznie do powyższych wzorów, a więc błędnie. Prowokuje ona rozumienie: dane przyspieszenie a jest powodem działania siły F. Natomiast zapis:

$$a = F / m$$

przez swoją inną „dynamikę” i wizualny charakter od razu sugeruje „inność interpretacji”, a mianowicie to siła F powoduje nadanie ciału o masie m przyspieszenia a. Uczeń wtedy jest na dobrej drodze do samodzielnego skonstruowania równania ruchu w konkretnym przypadku.

5.3. Umowność konwencji. Automatyzm wykonywania rachunków

Zapis algebraiczny ma wbudowany cały szereg konwencji, za którymi kryją się prawa matematyczne. Dla ucznia jawią się one jako swoisty kodeks zakazów i nakazów, których często uczeń nie rozumie (Krygowska) [12]. Przestrzeganie tych nakazów powoduje, że uczeń może z sukcesem dokonywać przekształceń algebraicznych nie rozumiejąc wszelako sensu tych przekształceń. Krygowska wini za to głownie, jak to nazywa, „nauczanie formalnie ułatwione".

W nauczaniu fizyki występuje dokładnie to samo zjawisko. Objawia się ono szczególnie ostro przy rozwiązywaniu zadań przez uczniów.

Krygowska pisze o psychologicznej trudności pogodzenia automatycznego i świadomego posługiwania się symbolami. Symbole między innymi po to zostały wymyślone, aby można się było nimi posługiwać automatycznie, aby za nas niejako pracowały. Dla dojrzałego fizyka nie ma problemu z przejściem po wykonaniu automatycznie rachunku, od symboli do konkretnej interpretacji fizycznej. Inaczej jednak jest z uczniem, dla którego symbole oznaczają często jakieś nowe, jeszcze nie w pełni ogarnięte pojęcie, z uczniem, dla którego formalny zapis algebraiczny jest jeszcze niejako na wyrost, ponieważ uczeń rozumuje na poziomie konkretnym. Nie oznacza to jednak, iż uczniowie niechętnie używają automatycznych rachunków. Wręcz przeciwnie, stosowanie algorytmów, przestrzeganie kodeksu nakazów i zakazów jest chętnie przez uczniów akceptowane. Takie postępowanie daje bowiem gwarancję bezpieczeństwa, w jakiś sposób gwarantują sukces, ma cechy rytuału wykonywanego w określonej sytuacji. Nie gwarantuje to jednak rozumienia fizycznego zjawiska ukrytego za wzorami i ich przekształceniami. Jest chętnie wykonywane przez dobrych uczniów, często nawet bez potrzeby, gdy istnieje droga na skróty. Dla słabych uczniów to na ogół jedyna droga do przejścia przez szkołę.

5.4. Różnorodność pojęć fizycznych opisywanych symbolami literowymi i ich wymiarowość

Jak pisze Krygowska, definicje niektórych podstawowych pojęć algebry szkolnej nie są właściwie ścisłymi definicjami matematycznymi, ale mniej lub bardziej poglądowymi opisami, z których wynikać mogą pewne nieporozumienia. Takie trudności powstają na przykład, gdy w wyrażeniach algebraicznych występują parametry (współczynniki literowe w równaniach algebraicznych, współczynniki literowe w jednomianach i ich wpływ na stopień jednomianu, stała a w funkcji a^x itd.).

Uczeń spotyka się jakby z dwoma rodzajami zmiennych. Parametr jest i nie jest dla niego zmienną: w toku pewnej części rozumowania uczeń ma rozumieć parametr jako stałą, w dalszej – jako zmienną. To pomieszanie ujawnia się bardzo drastycznie w trudnościach przy rozwiązywaniu zadań.

Tradycyjnie, by ułatwić to rozróżnienie wprowadza się na lekcjach matematyki konwencję, że początkowe litery alfabetu oznaczają stałe i parametry zaś końcowe litery x, y, z oraz u, v, w zmienne. Cena do zapłacenia to przełamywanie bariery nawyku na lekcjach fizyki i geometrii. Uczeń rozumujący na poziomie konkretnym we wzorze $s = s_0 + v_0t + at^2 / 2$ nie rozpoznaje trójmianu kwadratowego $y = ax^2 + bx + c$.

Tak samo uczeń, który umie wyliczyć pole trójkąta prostokątnego nie rozumie dlaczego „droga” w ruchu jednostajnie przyspieszonym jest wyliczana jako pole pewnego trójkąta.

Oznaczeń literowych, zarówno na lekcjach matematyki (już w trzeciej klasie), jak i fizyki, zaczyna się używać gdy uczniowie rozumują na poziomie konkretnym. Dlatego (ale i również dla ogólnej wygody) przyjmuje się pewne konwencje, a mianowicie oznaczanie pewnych wielkości stale tymi samymi literami. Jest to na pewno na początkowym etapie ułatwieniem, wręcz niezbędnym, lecz w dalszym toku nauczania może stanowić barierę.

Uczeń przyzwyczaja się, że np. v oznacza prędkość. Jeśli napotyka V oznaczające objętość, nie rozumie wzoru. Literą t zwykło się oznaczać czas, ale również temperaturę.

Niestety liter alfabetu jest zbyt mało i np. litera E oznacza we wzorach fizycznych energię, siłę elektromotoryczną, moduł Younga. Dla słabych uczniów jest to niewątpliwie utrudnienie.

Z drugiej jednak strony kurczowe przywiązanie jednej litery do jakiejś wielkości fizycznej powoduje trudność oderwania sensu tej wielkości od konkretnego symbolu, który jest przecież obrany arbitralnie.

Na lekcjach matematyki współczynniki trójmianu nie mają wymiaru. Na lekcjach fizyki mają nie tylko wymiar, ale bardzo konkretny sens fizyczny.

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

W powyższym wzorze każda ze stałych v_0, a ma inny wymiar i inny sens fizyczny.

Symbole literowe nie tylko oznaczają zmienne oraz parametry ale przede wszystkim te wszystkie wielkości są niesłychanie **różne** między sobą. Są wielkości zmieniające się ciągle jak czas czy położenie, mogące przybierać ciągłe wartości, wielkości dyskretne jak liczba atomów w naczyniu. Jedne z nich są wedle ucznia atrybutami ciała, inne są ustalane niejako z zewnątrz. W formalnych algebraicznych wzorach występują równoprawnie. Ta równoprawność jest początkowo traktowana jako dysonans. Natomiast jej brak uniemożliwia automatyzm rachunków.

5.5. Dynamiczny odczytywania wzorów fizycznych i rozumienie zależności funkcyjnych

5.5.1. Przyczynowe odczytywanie wzorów

Jak już mówiono, liczne badania wykazują (np. praca D. Zaremby [17]), że uczniowie odczytują wyrażenia liczbowe i algebraiczne w sensie nakazów czynności: „weź liczbę i odejmij od niej inną”, „spierwiastkuj” itp.

Moja praktyka szkolna wskazuje, że wzory fizyczne, najprawdopodobniej pod wpływem nauczania, często odczytywane są przyczynowo od prawej do lewej. To co jest po prawej stronie równości „jest przyczyną tego co jest po lewej”. W niektórych wzorach występuje jawnie czas i wtedy taka interpretacja jest oczywista np. wzór $x = x_0 + v_0t + at^2 / 2$ jest rozumiany jako „ciało zmienia swe położenie, **bo** ma przyspieszenie a i miało prędkość i położenie początkowe x_0 i v_0”.

Wzór opisujący rozszerzalność liniową ciał: $l = l_0(1 + \alpha\Delta t)$ też jest tak rozumiany, chociaż czas w nim nie występuje *explicite*. Uczeń ma w świadomości proces: „płynie czas, ciało jest podgrzewane i wzrasta jego temperatura, **w efekcie** wiemy co się stało z długością ciała”. Nawet tak statyczny wzór jak prawo Coulomba $F = (1/4\ \pi\epsilon)Q_1Q_2 / r^2$ uczniowie rozumieją dynamicznie: „jeśli się weźmie ładunek Q_1 i Q_2 i ustawi w odległości r to siła działająca między nimi będzie wynosić F”. Ten sposób rozumienia wzorów jest w zasadzie prawidłowy, może on ułatwiać rozumienie, czyli używając terminologii Bachelarda [16] [22] może być filarem. Dopóki uczniowie nie osiągną pełni myślenia formalnego, ten rodzaj myślenia powinien być przez nauczycieli brany pod uwagę.

Przy takim przyczynowym rozumieniu jak już mówiliśmy, inny dla uczniów ma sens wyrażenie $a = \frac{F}{m}$, a inny $F = ma$. W pierwszym sformułowaniu uczeń ma naturalną tendencję rozumować: „siła F jest sprawcą przyspieszenia a”, co jest prawidłowe, a w drugim zaś przykładzie „przyspieszenie a powoduje działanie siły F, co jest błędną interpretacją”.

Wzór $a = \frac{U}{I}$ jest błędnie interpretowany, że „napięcie U oraz natężenie I powodują opór R”, lub w innym bardziej zaawansowanym sformułowaniu lecz równie błędnym „opór R jest wprost proporcjonalny do U, odwrotnie do I”.

Sposób zapisu jakiegoś prawa fizycznego, relacji między wielkościami fizycznymi może rzutować na rozumienie sensu fizycznego tych zależności.

Wzory fizyczne, które nie mają interpretacji przyczynowej są dla uczniów trudniejsze i zrozumienie ich wymaga pokonania bariery.

Tak jest ze wzorem opisującym prawo Boyle’a, $pV = const$. Ten wzór jest nie tylko dlatego trudniejszy, iż ta zależność funkcyjna jest trudniejsza od liniowej; jest trudniejszy, bo wymaga pokonania bariery przyczynowego rozumienia wzorów. Dla wielu uczniów rozumienie równania stanu gazu doskonałego $pV = nRT$ jest poza zasięgiem możliwości.

Do trudności w rozumieniu termodynamiki i roli doświadczeń powrócimy w innym miejscu. Należy jednak zauważyć, że dynamiczny, konstrukcyjny sposób odczytywania wzorów od prawej do lewej wprawdzie zgodny z językiem programowania, coraz powszechniej znany uczniom, jest jednak sprzeczny z zapisem działania logicznego wynikania (implikacji, powszechnie oznaczanej strzałką od lewej do prawej), i sposobem zapisu reakcji chemicznych i jądrowych np. $\pi^0 + p \rightarrow \pi^+ + n$. Tu następstwo czasu jest od lewej do prawej. Niewykluczone, że może być to źródłem konfuzji.

5.6. Trudności w rozumieniu zależności funkcyjnych

Trudności w rozumieniu zależności funkcyjnych są przedmiotem badań dydaktyków matematyki. Wydaje się, że wiele zależy od pierwszego wprowadzenia pojęcia funkcji. Jeśli jest ono wprowadzane poprzez zbiór par liczbowych to uczniowie mogą mieć większe trudności w rozumieniu zależności funkcyjnych w fizyce.

W fizyce, jeśli rozumowanie nie przybiera formy zdegenerowanej, oderwanej od kontekstu i interpretacji fizycznej, to uczniowie mają tendencję, tak jak mówiliśmy, rozumienia zależności funkcyjnych poprzez relację przyczynową.

W poprzednim paragrafie była mowa o rozumieniu przez uczniów znaku równości. Jedna z interpretacji to nakaz przyrównania jednej strony równości (na ogół prawej), która jest przyczyną, powodem drugiej strony. Taka interpretacja może być na pewnym etapie nauczania pomocna w rozumieniu zależności funkcyjnych. Proces obznajamiania uczniów z zależnościami funkcyjnymi odbywa się w momencie, gdy większość uczniów rozumuje na poziomie konkretnym. Musi zatem odbywać się on poprzez analizę konkretnych przykładów. Często używane w tym celu są przykłady z fizyki. Wiąże się to jednak z pewną dodatkową trudnością. Pokonanie jednak tych dodatkowych trudności stokrotnie się opłaca, zarówno z punktu widzenia rozumienia matematyki jak i fizyki.

Chodzi przede wszystkim o to, że bardzo często przebieg funkcyjny, który chcemy z uczniami badać, jest opisywany przez zjawisko jeszcze uczniom nie znane, zjawisko do opisu którego potrzebne są nowe dla ucznia pojęcia fizyczne. Uczeń **w tym samym czasie** ma zrozumieć rodzaj zależności funkcyjnej i zrozumieć sens pojęć fizycznych, i przebieg zjawiska. Dlatego też warto **na początek** przy badaniu zależności funkcyjnych ograniczyć się do przykładów, w których zależność funkcyjna oznacza również zależność przyczynową. Jest to wprawdzie budowanie innej bariery, lecz wydaje się, że jest ona znacznie łatwiejsza do pokonania. **Chodzi o to, by pierwsze przykłady zawierały sytuacje, w których zmiany zmiennej niezależnej w konkretnych zjawiskach były przyczyną zmian zmiennej zależnej**, np:

1/ to zmiana temperatury powoduje zmianę długości drutu (uczeń „widzi” proces). Możemy zapytać o zależność funkcyjną długości drutu od temperatury.
2/ to zmiana natężenia prądu płynącego przez R powoduje zmianę wydzielanej mocy na tym oporniku.
3/ to zmiana objętości naczynia (ściskanie tłoka) powoduje zmianę ciśnienia.
4/ to zmiana współczynnika tarcia powoduje zmianę siły tarcia.

Natomiast np.:
1/ zmiana natężenia prądu **nie** powoduje (w przybliżeniu) zmiany oporu przewodnika.
2/ to nie temperatura gazu zależy od ciśnienia w tym naczyniu (w większości sytuacji).
3/ to nie siła zależy od przyspieszenia.

Rozważmy przykład, a mianowicie statyczny wzór na moment bezwładności pierścienia o promieniu \$r\$ i masie \$m\$ względem osi symetrii $I = mr^2$ jest rozumiany operacyjnie „jeśli mamy pierścień o masie m i promieniu r **to** ma on moment bezwładności I. W pełnym zrozumieniu powyższego wzoru jest zawarte zrozumienie „potrzeby” definicji takiej wielkości jak I, jej użyteczności. Zrozumienie rodzaju zależności funkcyjnej $I(R)$ wymaga od ucznia wyobrażenia sobie pewnej sytuacji fizycznej, np. ciągu wirujących pierścieni wszystkich o masie m, ale coraz cieńszych o wzrastającym R. Jeśli uczeń nie jest w stanie sobie tego wyobrazić, to w zasadzie tę zależność funkcyjną lepiej trenować na abstrakcyjnym przykładzie $y = ax^2$, który ma tę zaletę, że uczeń nawykowo wie, co jest zmienną niezależną, a co zależną.

Jak już mówiono, dla ucznia rozpoczynającego naukę fizyki nie jest bez znaczenia, w jakiej formie zapisywane jest Prawo Ohma.

Czy

$$I = \frac{U}{R} \qquad (1), \quad \text{czy}$$

$$U = IR \qquad (2), \quad \text{czy też}$$

$$R = \frac{U}{I} \qquad (3).$$

Konkretny zapis powinien na początku nauczania odbijać stosowną sytuację doświadczalną, określającą, która wielkość fizyczna się zmienia i według ucznia „jest przyczyną” tej wielkości, która jest po lewej stronie.

Pierwszy wzór odczytywany jest: np. „jeśli weźmiemy np. bateryjkę (U) i zepniemy opornikiem R **to** popłynie prąd I”.

Drugi wzór jest odczytywany: „jeśli przez opornik R przepływa prąd I **to** na tym oporniku spada potencjał (U)”.

Natomiast trzeci wzór często traktowany przez uczniów jako definicyjny „opór to **jest** napięcie podzielone przez natężenie”, lub „opór jest wprost proporcjonalny do napięcia i odwrotnie proporcjonalny do natężenia”, chociaż formalnie poprawny nie tylko nie wnosi rozumienia prawa Ohma lecz je wręcz zaciemnia.

Wzór trzeci jest przekształceniem wzorów (1) lub (2). Powinien być odczytany: „jeśli na danym oporniku przez który płynie prąd *I* spadek potencjału wynosi *U* **to wnioskujemy** (tu nic się już nie „dzieje”), że opór wynosi *R*. Ten typ rozumowania i odczytywania wzorów jest trudniejszy (funkcja odwrotna). Jest on trudniejszy do czasu, dopóki uczeń nie osiągnie prawidłowego (to znaczy z możliwością autorefleksji, zrozumienia sensu przekształceń) automatyzmu w wykonywaniu przekształceń algebraicznych, etapu na którym matematyka „sama” na niego pracuje.

Droga ku takiemu rozumieniu dla wielu uczniów jest mozolna i długa. Występują bardzo duże różnice indywidualne pomiędzy uczniami. Wydaje się, że droga poprzez kwasi konkretne, operacyjne rozumienie wzorów z fizyki może być dłuższa, wymagająca na końcu pokonania bariery uwolnienia się od takiej interpretacji, lecz przynajmniej uczy nie tylko wprawności algebraicznej, lecz i nieco fizyki ukrytej poza nią.

Przykład 2

W pewnym podręczniku uczniowie mają podane w ramce dwa wzory:

$$U = IR$$
$$P = UI$$

Jako zadanie dostają polecenie zbadania zależności wydzielanej mocy *P* od oporu *R*. (*U* oznacza napięcie, *I* natężenie prądu, *P* moc).

Większość uczniów wstawia pierwszy wzór do drugiego i otrzymuje

$$P = I^2 R$$

a następnie stwierdza, iż „im większy opór *R* to moc wydzielana *P* jest większa”.

Wydawałoby się, że do rozwiązania powyższego problemu nie jest potrzebna znajomość fizyki, przebiegu procesu opisywanego powyższymi wzorami, jedynie umiejętność wykonania bardzo prymitywnych przekształceń i interpretacji otrzymanego wzoru końcowego.

Na ogół w zespole klasowym znajdują się tacy, którzy poprawnie rozwiązują zadanie, to jest dostają zależność:

$$P = U^2 / R$$

a więc zależność zupełnie odwrotną do poprzedniej.

Zadanie powinno być tak sformułowane, by były jasne fizyczne warunki zadania. Najlepiej, by zadaniu towarzyszył rysunek obwodu i sytuacja była konkretna; np. napięcie 220 V i żarówki o jakichś tam konkretnych oporach. Ale nawet i w tej sytuacji wielu uczniów wpada w wyżej wymienioną pułapkę. Słabym uczniom pomógłby zapis prawa Ohma

$$I = U / R$$

który jak już mówiliśmy poprzednio, sugeruje interpretację „mamy źródło prądu o napięciu *U* (lub występuje na końcach oporu *R* różnica potencjałów *U*), więc przez przewodnik *R* płynie prąd *I*. Początkującemu uczniowi zapis może podsuwać dobrą interpretację.

Jeszcze raz podkreślamy, że zrozumienie zależności funkcyjnych u początkującego ucznia może tylko wtedy wystąpić, gdy wzór algebraiczny opisuje wyobrażalną sytuację.

Aby badać zrozumienie zależności funkcyjnych uczniowie klas I i klasy III LO dostali następujące zadanie (badania Rosenowa, Dydaktyka Matematyki, 1992, str. 232 [23]):

Przykład 3

Pracę prądu elektrycznego można obliczyć ze wzoru:

$$E = U^2 t / R$$

gdzie U – napięcie, t – czas, R – oporność.

Dla U = 18,4 V, t = 150 s, R = 115 Ω praca wynosi 442 [Ws].

1. Jeśli podwoimy wartość napięcia, to praca wzrośnie do ...... wartości początkowej (E = ...[Ws]).
2. Aby podwoić wartość pracy w stosunku do wartości początkowej musimy zmienić opór do .... wartości początkowej (R = ...).
3. Jeżeli chcemy zmniejszyć o połowę wartość pracy przy równoczesnym podwojeniu wartości napięcia, to musimy zmienić opór do .... wartości początkowej (R = ...)
4. Jeżeli chcemy, aby przy stałym czasie praca wzrosła 4 razy w stosunku do wartości początkowej, to stosunek $U\backslash R$ musi wynosić ....

Autor badań przytacza wyniki (liczby oznaczają % prawidłowych odpowiedzi):

klasa LO	1	2	3	4
I	25	40	17	5
III	92	96	79	54

Schemat doświadczalny jest domyślny. Uczeń musi się zastanawiać „o co chodzi" w zadaniu. Tylko w czwartym punkcie mówi się uczniom, że rozważamy cały czas ten sam czas. Aby ułatwić uczniom zadanie powinno ono dotyczyć mocy, a nie pracy.

Zadanie nie sugeruje jasnych sytuacji doświadczalnych. Zarówno w niższych klasach, jak i w wyższej najlepiej zostało zrobione drugie zadanie. W tym zadaniu uczniów zapytano innymi słowy, jak zmienić opór (np. żarówki) by moc wydzielana (a zatem z gruba biorąc, dla tego samego typu żarówek – jasność) była dwa razy większa. Sytuacja wyobrażalna – dużo odpowiedzi poprawnych.

W pytaniu pierwszym i trzecim w praktyce chodzi o użycie innego źródła napięcia, co nie jest jasno wyjaśnione. Dodatkowo w trzecim pytaniu dwie wielkości zmieniają się równocześnie.

Ostatnie pytanie jest wprawdzie w sensie fizycznego rozumienia podobne do pozostałych, lecz wymaga najpierw przełożenia (co najmniej dwa kroki) na sens zrozumiały dla ucznia i podania odpowiedzi w postaci stosunku.

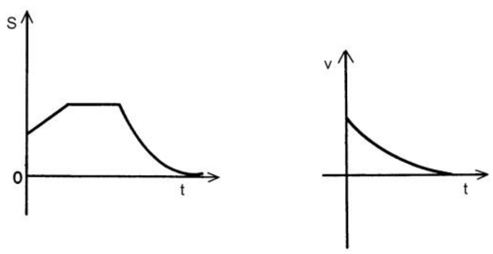
Z punktu widzenia zrozumienia procesu fizycznego stawianie takiego pytania mija się z celem. Bardzo dobrze, że uczniowie ćwiczą takie rozumienie, ale akurat ono, jak widać niewiele wnosi do rozumienia fizyki. Pytanie czwarte jest sztuczne, uczeń ma prawo zapytać po co jest stawiane. Pytania pierwsze i drugie mają lepszy sens fizyczny.

Do trenowania rozumienia zależności funkcyjnych trzeba dobierać przykłady z fizyki, które dla uczniów mają sens, inaczej pozostaje wrażenie, że matematyka i fizyka to wyłącznie igraszki same dla siebie.

5.7. Rola wykresów

Jeżeli chcemy pomóc w rozumieniu zależności funkcyjnych uczmy dzieci sporządzać wykresy. Mają one bardzo kształcącą rolę.

Klasycznie naukę zaczyna się od wykresów z kinematyki w ruchu prostoliniowym. Dzieci sporządzają wykresy przesunięcia w funkcji czasu, prędkości w funkcji czasu.



Okazuje się, że paronastolatki, o ile poświęci się temu problemowi dosyć uwagi, mogą ze zrozumieniem odczytywać i sporządzać podobne wykresy. Doskonałe wyniki daje MBL (Microcomputer Based Laboratory), w którym ruchy uczniów rejestrowane przez podczerwone czujniki poprzez modem przekazywane są do komputera, który sporządza wykresy.

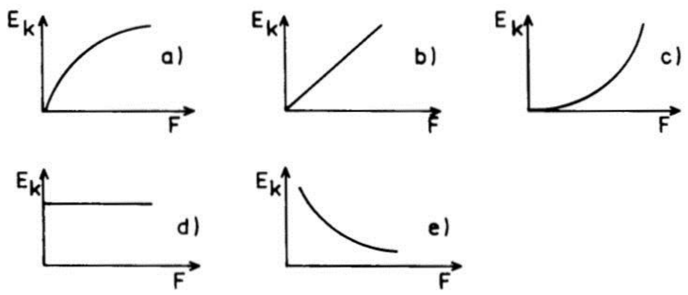
Niech nauczyciela jednak nie zwiedzie prawidłowość odczytu wykresów z automatycznym zrozumieniem, iż przebyta przez ciało droga jest polem pod krzywą na wykresie $v(t)$. Tymczasem zakłada się to przy wyprowadzaniu wzoru na drogę w ruchu jednostajnie przyspieszonym, przy wyprowadzaniu wzoru na pracę siły elastycznej, czy obliczaniu pracy wykonywanej przez gaz.

Umiejętność wyliczenia pola trójkąta nie oznacza, że uczeń rozumie dlaczego np. $s = \frac{1}{2} vt$ dla ruchu jednostajnie przyspieszonego.

Na początkowym etapie nauczania pożądane jest najpierw inne wyprowadzenie wzoru i dopiero **potem** odwołanie się do pola na wykresie.

5.8. Przykłady błędów dydaktycznych

Oto przykład zadania (wstępne na medycynę). Studentom prezentuje się 5 wykresów.



Pytanie: który z powyższych wykresów najlepiej opisuje zależność E_{kin} od siły dośrodkowej ciała poruszającego się po okręgu.

Za prawidłową autorzy zadania uznają odpowiedź b), czyli zależność liniową, ponieważ $K_{kin} = m\frac{v^2}{2}$, ale dla siły dośrodkowej $F = m\frac{v^2}{r}$, a więc $E_{kin} = \frac{F \cdot r}{2}$.

Otóż nie jest to szczęśliwe postawienie zagadnienia, ponieważ na ogół E_{kin} w ruchu po okręgu dla danej siły **jest dowolna** – i zależy od r (od promienia).

Jeśli student nie zna sytuacji fizycznej odpowiadającej problemowi – zadanie powyższe jest dla niego pozbawione sensu.

5.9. Rozumienie wzorów o analogicznej strukturze

W tym paragrafie będziemy się dalej zajmować rozumieniem przez uczniów wzorów o analogicznej strukturze. Rozważania dotyczą głównie uczniów początkujących, rozumujących na poziomie konkretnym, uczniów, którzy zaznajamiają się z nowymi dla nich pojęciami fizycznymi. I chociaż należy uczniom wskazywać na analogie pomiędzy zjawiskami, zestawiać analogiczne wzory, to jednak w wielu przypadkach jest to inwestycja na przyszłość, która nie ma dużego znaczenia przy omawianiu bardzo konkretnych przypadków. Celem ilustracji omówimy parę przykładów.

Przykład 4

A oto seria wzorów opisujących zjawiska fizyczne wyobrażalne dla uczniów, które powinien poznawać przez obserwacje z życia oraz specjalnie do tego celu zaprojektowane doświadczenia. Wzory są identycznej postaci, bo opisują analogiczne zjawiska w analogicznych przybliżeniach.

$$l = l_0(1 + \alpha\,\Delta t)$$
$$V = V_0(1 + \beta\,\Delta t)$$
$$p = p_0(1 + \alpha\,\Delta t)$$

α i β to stałe współczynniki, przy czym α w pierwszym wzorze jest czym innym niż α w trzecim (trudność o której już była mowa). Pierwszy wzór opisuje tzw. rozszerzalność liniową. Pod wpływem ogrzewania (wzrost temperatury ciała Δt), ciało podłużne o długości początkowej l_0 wydłuża się i ma długość l, zależną od przyrostu temperatury. Drugi wzór opisuje rozszerzalność gazów (przy stałym ciśnieniu) lub objętościową ciał stałych, trzeci zaś wzrost ciśnienia gazów ze wzrostem temperatury (przy stałej objętości).

W toku nauczania uczniowie najpierw zapoznają się z rozszerzalnością liniową, a następnie z objętościową. Uczniowie na ogół z łatwością dokonują transferu z pierwszego przypadku na drugi (długość na objętość). Jednak praktyka pokazuje, że analogiczny automatyczny transfer na ciśnienie nie jest dokonywany. Ostatnia zależność powinna być starannie, całkiem od nowa stwierdzona empirycznie i dopiero zapisywana w postaci wzoru.

Wielu uczniom, mimo, iż pozornie są już zaznajomieni z funkcją liniową, jej przepisanie w innych zmiennych, oraz interpretacja fizyczna i geometryczna (na wykresie) sprawia trudność. Uświadomienie sobie, że niektóre zjawiska fizyczne przebiegają w taki sposób, że zależność między wielkościami fizycznymi opisującymi właśnie przebieg zjawiska jest liniowa, że można to zapisać odpowiednim wzorem, że parametry prostej mają bardzo ściśle określony sens fizyczny jest sporym osiągnięciem intelektualnym. Jest dostrzeżeniem użyteczności modelu matematycznego do opisu zjawisk fizycznych.

Wielu uczniów nie kojarzy trzech powyższych wzorów ze wzorem na prędkość w ruchu jednostajnie przyspieszonym. Wielu uczniów widzi oddzielnie wzór na drogę w ruchu jednostajnym i prędkość w ruchu jednostajnie przyspieszonym, pomimo ich formalnej identyczności.

Przykład 5

A oto kolejna para „łatwiejszych do rozumienia wzorów”:

$$\mathrm{R} = \rho l \,/\, S$$
$$\mathrm{C} = \epsilon S / \,d$$

Powyższe wzory mają identyczną strukturę. Wyrażają pewne własności obiektów fizycznych przewodnika i kondensatora. Wzory rozumiane są konstrukcyjnie. Jeśli wsparte są oglądem działania opisywanych przedmiotów to są stosunkowo nieźle rozumiane i nadają się do ćwiczenia zależności funkcyjnych np. $R(l)$ czy $C(d)$. Łatwo sobie wyobrażać coraz dłuższy przewodnik, łatwo też można ustawić odpowiedni eksperyment. Podobnie jest z zależnością pojemności kondensatora od odległości okładek. Tę odległość „łatwo” zmieniać. Zwłaszcza opór przewodnika wydaje się być pojęciem łatwo oswajalnym, a powyższa zależność wyczuwana intuicyjnie oraz rozumiana modelowo. W odpowiedziach uczniowskich, w których uczniowie mają skorzystać ze wzoru na opór przewodnika, często występują wszelakie permutacje wielkości fizycznych np. wzory są pisane $R = \rho S/l$ czy $R = Sl/\rho$. I wprawdzie może wynikać to z braku zrozumienia powyższych wzorów, ale często świadczy po prostu o chwilowej bezmyślności nawet niezłych uczniów, którzy zachęceni do chwili refleksji korygują błędy.

Przykład 6

W toku nauki uczniowie spotykają się z następującymi wzorami o identycznej strukturze, nie tylko matematycznej. We wszystkich wzorach t oznacza czas:

$$\vec{v} = \Delta\vec{r} \,/\, \Delta t \qquad (1)$$

$$\vec{a} = \Delta\vec{v} \,/\, \Delta t \qquad (2)$$

$$\vec{F} = \Delta\vec{p} \,/\, \Delta t \qquad (3)$$

$$E = -\Delta\Phi \,/\, \Delta t \qquad (4)$$

$$I = \Delta Q \,/\, \Delta t \qquad (5)$$

$$\rho = \Delta m \,/\, \Delta V \qquad (6)$$

Symbol Δ oznacza zmianę, przyrost, $\vec{r}$ wektor przesunięcia, $\vec{v}$ wektor prędkości, $\vec{a}$ przyspieszenie, $\vec{F}$ siłę, $\vec{p}$ pęd, Q ładunek, I natężenie prądu, m masę, V objętość, a ρ gęstość, E siłę elektromotoryczną, zaś Φ strumień pola magnetycznego.

Wszystkie powyższe wzory są z punku widzenia struktury matematycznej identyczne. A jednak z punktu widzenia fizyki tkwią w nich dramatyczne różnice. Jedne z nich należą do świata mechaniki, inne do świata elektryczności. Ostatni ze wzorów nie zawiera czasu.

Powyższe wzory różnią się jednak przede wszystkim znaczeniem symbolu „=”. Wzory (1), (2), (5) i (6) są wzorami definicyjnymi. One definiują prędkość, przyspieszenie, natężenie prądu i gęstość. Uczniowie rozumieją je operacyjnie (prawidłowo), to znaczy np. *jak przyrasta droga, gdy przyrasta czas*, albo *ile przepływa ładunku w jakimś odstępie czasowym* Δt (to jest oczywiście początek rozumowania). Dla uczniów rozumujących na poziomie konkretnym zrozumienie pojęcia prędkości nie oznacza zrozumienia pojęcia przyspieszenia, czy ładunku. Nie przenosi się automatycznie rozumienie. Wydaje się, że rozumienie gęstości nastręcza uczniom dużą trudność (patrz badania Piageta [24]). Tutaj proces brania przyrostów, czyli odpowiedniej konstrukcji musi przebiegać wyłącznie w myśli ucznia. To nie jest nawet wyobrażenie sobie jakiegoś rzeczywistego procesu jak przebywanie przez konkretne ciało jakiegoś odcinka drogi w jakimś czasie. Tutaj uczeń musi dokonywać w myśli sztucznej operacji wydzielania pewnych elementów objętości ciała. I to jest trudne.

Dwa z pośród wymienionych powyżej wzorów nie są definicyjne, są prawami fizycznymi: prawem Newtona i jednym z praw Maxwella. Znak „=" nie oznacza w nich **staje się, w sensie określa**, tylko **tak jest zawsze**.

Przykład 7

A oto przykład wzorów o podobnej strukturze. Podobieństwo wynika z tej samej istoty zjawisk, a mianowicie drgań harmonicznych.

$$T = 2\pi\sqrt{l / g}$$

$$T = 2\pi\sqrt{LC}$$

Dla wielu uczniów zjawisko drgań wahadła matematycznego jest tak pojęciowo odległe od drgań obwodu elektrycznego, że zbieżność wzorów traktują jako przypadkową. Uniwersalność drgań jako takich jest często przez uczniów nie obejmowana i pokazywanie przez nauczyciela związku między tymi zjawiskami jest inwestycją na przyszłość, w nadziei, że uczniowie kiedyś w przyszłości przeżyją efekt „acha".

Niewielu jest uczniów takich jak Feynman, których niepokoi znaczenie występowania w tych wzorach, i innych jak np. na indukcyjność cewki, liczby π, która według ucznia jest związana z okręgiem (Gleick, „Genius") [25].

Trzeba pamiętać, że wielu z uczniów w ogóle nie rozpoznaje podobieństwa wzorów. Trzeba każdy ze wzorów niejako oddzielnie, od początku wprowadzać.

5.10. Wzory nietypowe, „nowe"

Większość wzorów, z którymi uczniowie mają do czynienia to wzory o postaci, w której lewa strona, jakaś jedna wielkość równa się prawej stronie. Pojawiają się czasami wzory o innej konstrukcji z interpretacją których uczniowie mają kłopoty. W pewnym sensie to dobrze, że formalnie inna struktura sugeruje inną interpretację. A oto trzy przykładowe wzory:

$$pV = nRT$$

– równanie stanu gazu doskonałego. Zarówno forma matematyczna, równanie o trzech zmiennych niezależnych, jak i interpretacja fizyczna są nowe i trudne dla uczniów. Sposób rozumienia „coś się dzieje w wyniku czego mamy stan lewej strony równości” zawodzi.

$$E^2 = p^2c^2 + E_0^2$$

W tym przypadku wprawdzie po lewej stronie jest tylko jedna wielkość, lecz wzór nie ma „dynamicznego” sensu jak w przypadku „wzorów na rozmaite siły”, nie ma sensu konstrukcyjnego, jak w wypadku wzoru na pojemność kondensatora. Wzór (związek) wiąże ze sobą skąd inąd, jakby obznajomione wielkości, jak pęd i energia. W tym przypadku trudność tkwi w interpretacji fizycznej. Uczniowie mają problemy, co zrozumiałe z zapamiętaniem wzoru (znaki, co po lewej, co po prawej stronie wzoru). Wzór

$$\Delta p \, \Delta x \geq h$$

też jest „inny”. W tym wypadku to dobrze, bo wzbudza czujność ucznia.

5.11. Konkluzje

Dydaktycy matematyki rozpoznali i opisali trudności, jakie mają uczniowie z właściwym rozumieniem symboli literowych i wzorów algebraicznych. Istnieje uzasadnione przekonanie, że odpowiednie nauczanie fizyki może pomóc w przezwyciężeniu tych trudności. Należy jednak cały czas mieć na uwadze, że wprowadzanie symboli literowych i wzorów algebraicznych odbywa się równolegle z wprowadzaniem nowych dla ucznia pojęć i praw fizycznych, których rozumienie jest często trudne.

Wzory równoważne pod względem struktury matematycznej są od strony empirycznej zupełnie różne. Mogą one opisywać fundamentalne prawa, relacje fenomenologiczne i wreszcie wiązać wielkości fizyczne definiujące jakąś aparaturową wielkość fizyczną jak np. pojemność kondensatora.

Pojęcie zmiennej niezależnej, zależnej i parametrów ma bardzo konkretny sens, zależny od sposobu wprowadzania nowych wielkości fizycznych (układy doświadczalne). Funkcje odwrotne też mają takie znaczenie.

Nie można oczekiwać od niepełnoletniego ucznia, że wiedza nabyta na konkretnych przykładach jest automatycznie przenoszona na inne przykłady i inne dziedziny wiedzy. Na lekcjach fizyki, matematyka pełni służebną rolę – ma pomagać w rozumieniu fizyki. Jeżeli jednak formalizm matematyczny na danym etapie nauczania fizyki jest zbyt trudny, lub nawet niedostępny, należy raczej zaczekać z jego stosowaniem, by nie doprowadzać do „zdegenerowanego formalizmu”, jak to nazywa Krygowska.

Z drugiej jednak strony nie można eliminować, nawet z bardzo wstępnego kursu fizyki algebry, bowiem opis matematyczny jest esencją fizyki. Często też opis zjawisk bez odwoływania się do matematyki jest dłuższy i bardziej zawiły. Zadaniem dydaktyki fizyki jest poszukiwanie złotego środka.

Wydaje się, że w celu ułatwienia rozumienia wzorów fizycznych początkującym uczniom nieposiadających jeszcze ani należytej wiedzy matematycznej ani doświadczenia fizycznego, uczniom rozumującym jeszcze stale na poziomie konkretnym, to znaczy, gdy jest bardzo słaby transfer wiedzy od jednego kontekstu do innego można pozwolić na stosowanie pewnych automatyzmów:

- stosowanie stałych liter na oznaczanie tych samych wielkości fizycznych,
- zaakceptowanie i trzymanie się konwencji „dynamicznego" i konstruktywnego odczytu wzorów od prawej do lewej,
- nie robienie „skrótów" w sytuacjach fizycznych analogicznych. Rozpatrywanie kolejnych przypadków niejako od początku.
- wskazywanie na analogie traktować jako inwestycję na przyszłość. Na oczekiwanie na przeżycie „acha".
- występują olbrzymie różnice indywidualne pomiędzy uczniami w talencie i tempie rozwoju.

Wyżej wymienione wskazówki to rodzaj koła ratunkowego dla słabszych uczniów. Odrzucenie koła w pewnym momencie nauki jest pokonaniem przeszkody. Jest ono łatwiejsze w późniejszym etapie nauczania.

Praca dofinansowana z grantu KBN 2P 302-12207.

6. O rozwiązywaniu zadań przez początkujących

6.1. Wstęp

W tym rozdziale zajmiemy się problemem rozwiązywania zadań przez początkujących uczniów, zasadniczo nieletnich.

Zajmiemy się zadaniami, które dotyczą pojęć fizycznych „jeszcze nieoswojonych". To właśnie rozwiązywanie zadań ma wspomagać proces rozumienia nowych pojęć i praw.

Rozwiązywanie zadań jest uważane przez uczniów za jedną z najtrudniejszych umiejętności, jakie mają oni opanować w szkole. Jest ono traktowane zarówno przez uczniów, jak i przez nauczycieli jako odrębna umiejętność, jakby niezależna od znajomości przedmiotu. Ponieważ jednak rozwiązywanie zadań jest istotną częścią wszelakich testów, sprawdzianów i egzaminów uczniowie czynią wysiłki, by tę umiejętność opanować.

Czy istotnie można rozwiązywanie zadań traktować jako niezależną od przedmiotu sztukę? I tak i nie.

Nie: ponieważ problemy zadań stanowią integralną część fizyki jako takiej, jej rozumienie jest niezbędne do rozwiązywania większości zadań. Rozwiązywanie zadań jest wehikułem prowadzącym do rozumienia, pogłębiania rozumienia fizyki. Rozwiązywanie zadań jest w końcu jednym ze sposobów uprawiania fizyki.

Tak: ponieważ pewne elementy rzemiosła nabyte przy rozwiązywaniu zadań z fizyki są przydatne w rozwiązywaniu innych problemów z życia i techniki.

Umiejętność rozwiązywania zadań jest jednym z celów – i to jednym z ważniejszych – ogólnej edukacji.
Tak: ponieważ nawet dobra znajomość teorii i eksperymentowania nie zapewnia biegłości w rozwiązywaniu zadań. Sytuacja jest nieco analogiczna do znajomości języka. Wybitny tłumacz poezji może nie być biegły w mowie, natomiast człowiek swobodny w języku mówionym może nie być w stanie napisać poprawnie zdania. Krótko mówiąc, by osiągnąć biegłość w jakiejś czynności, trzeba ją ćwiczyć. Jest zdumiewającym, jak często w praktyce zapomina się o tym **oczywistym** fakcie i oczekuje się cudów. W *Fotonie* 48 cytujemy fragmenty wywiadu z wybitnym fizykiem Ginzburgiem, który bardzo wyraźnie podkreśla niezbędność wielu, wielu ćwiczeń w rozwiązywaniu zadań.

Jak już powiedzieliśmy, rozwiązywanie zadań jest jednym z podstawowych celów edukacji ogólnej, a bez wątpienia właśnie fizyka jest doskonałym polem treningowym. Występują tu wszystkie potrzebne elementy. Rozwiązywanie zadań jak już też powiedzieliśmy spełnia funkcję środka pomocniczego, dzięki któremu pojęcia fizyczne nabierają sensu, ścisłości, a więc jest ono absolutnie niezbędnym elementem w nauczaniu na każdym stopniu!

6.2. Rozwiązywanie zadań na etapie wstępnym nauczania

Jak już powiedziano, najpierw zajmiemy się zadaniami, które rozwiązują początkujący uczniowie w celu zaznajomienia się z nowymi zjawiskami, pojęciami i prawami fizycznymi. Jak pokazuje praktyka ważnym jest odpowiedni dobór wprowadzających paradygmatycznych zadań oraz ich właściwa kolejność.

Rozwiązanie typowego zadania związanego z jakąś rzeczywistą sytuacją fizyczną wymaga pokonania paru etapów. Są to:

1. wyobrażenie sobie dokładnie opisywanego w zadaniu procesu, stanu,
2. zainteresowanie się wynikiem (tu jest już antycypacja rozwiązania)
3. przetłumaczeniu tego stanu, czy procesu na język abstrakcyjnych pojęć fizyki,
4. uporządkowanie: wyodrębnienie informacji danych w zadaniu, zarówno jawnie, jak i *implicite*,
5. zastosowanie odpowiednich wzorów, ułożenie równań,
6. rozwiązanie rachunkowe często przez zastosowanie algorytmów,
7. weryfikacja, ustalenie jednostek, interpretacja sensu rozwiązania.

W praktyce szkolnej zdecydowanie niedoceniane pierwsze trzy etapy oraz etap ostatni. Zadania podawane są w większości już w sterylnej formie, gotowej do zastosowania. Są one przerabiane po omówieniu pewnej części materiału i mają służyć weryfikacji zrozumienia nowego pojęcia, prawa i utrwaleniu go. A oto typowe przykłady:

Dana jest długość prostokąta $a = 5$ cm, szerokość $b = 10$ cm. Wyliczyć pole powierzchni tego prostokąta (przykład z geometrii).
albo (zadania ze „Zbioru prostych zadań z fizyki dla uczniów klas średnich" Krzysztofa Chyli):
Oblicz drogę, jaką ciało poruszające się z przyspieszeniem $a = 2$ m/s^2, bez prędkości początkowej przebędzie w trzeciej sekundzie ruchu.
Oblicz prędkość końcową ciała poruszającego się ruchem jednostajnie przyspieszonym, które w czasie $t = 10$ s przebyło drogę $s = 100$ m.
Przenosząc ciało o masie $m = 10$ kg z punktu A o potencjale $V_A = -10$ J/kg do punktu B wykonaliśmy pracę $W = 40$ J. Oblicz potencjał pola grawitacyjnego w punkcie B pola.
Jakie ciśnienie będą wywierały na ścianki naczynia o objętości 1 dm^3 dwa mole argonu o temperaturze $t = 20°C$?
W jakiej odległości od siebie muszą się znaleźć dwa identyczne ładunki $q = 10^{-6}$ C, aby ich energia potencjalna była równa $E_p = 1$ J?
czy też:
Ciało o prędkości początkowej $v = 60$ km/h wyhamowało do prędkości 0 w czasie 20 s. Ile wynosiło przyspieszenie?

Dla przeciętnego ucznia powyższe zadania są nudne, oderwane od rzeczywistości, nie zaciekawiają ucznia, nie jest on ciekaw rozwiązania jako takiego(!), a co najważniejsze pomijają pierwszy etap rozwiązywania zadania i zupełnie słabo służą jako pomoc w przyswojeniu nowych pojęć np. pole powierzchni, prędkość, przyspieszenie, energia potencjalna.

Powyższe stwierdzenie nie oznacza bynajmniej, iż wyżej wymienione zadania w ogóle nie są kształcące i nie powinny być przez uczniów rozwiązywane. Powinny być rozwiązywane i to nawet w sporej ilości jako ćwiczenia w utrwalaniu materiału, ćwiczenia niezbędne do nabycia koniecznej rutyny. Uczniowie, którzy zrozumieją wcześniej niezbędne do rozwiązania prawa, oswoją się z pojęciami, których dotyczą zadania, nawet chętnie rozwiązują tego typu zadania. Zadania takie niejako gwarantują stuprocentowy sukces.

Nowe pojęcia są przyswajane i rozumiane z pewnym trudem i wymagają czasu. Rozumienie nie jest stanem zero-jedynkowym, rozumiem lub nie rozumiem. Do rozumienia dochodzi się wyostrzając, doprecyzowując wyczuwane początkowo pojęcie. Rozumie się dobrze, by znowu nie rozumieć. Jak pisze Kvasz [26] w swoim artykule *„Trzeba być gotowym do rozumienia"*. Przed stanem rozumienia występuje nieco enigmatyczny stan „wyczuwania".

Zbyt wczesne sformalizowanie pojęcia, podanie formalnej definicji, rozwiązywanie sterylnych zadań może być wręcz szkodliwe. Ucina ono bowiem proces refleksji nad nowym pojęciem, prowokuje do wyuczania się na pamięć i rozwiązywania zadań algorytmicznie. Uczeń, który raz przestał rozmyślać nad pojęciem, zagadnieniem, ponieważ dostał komfortową formułkę, może nigdy nie zechcieć wrócić do zagadnienia i go naprawdę zrozumieć. Może go to później drogo kosztować.

Lata praktyki szkolnej sugerują, iż zadania dawane uczniom na początku przerabiania jakiegoś materiału, wprowadzające nowe pojęcia powinny:

1. Dotyczyć sytuacji, która jest znajoma uczniom, a przynajmniej powinna być wyobrażalna.
2. Jeśli to możliwe powinny zainteresować ucznia. Uczeń powinien być ciekaw wyniku.
3. Jest korzystne, by uczeń mógł odgadnąć wynik.
4. Liczby zawarte w zadaniu powinny być tak okrągłe i proste by manipulacje rachunkowe nie rozpraszały procesu myślenia nad problemem fizycznym.
5. Zadanie powinno być proste, tak by mogło być rozwiązane w jednym rzucie myśli.

Wymienione na początku rozdziału etapy rozwiązywania zadania (w okresie, gdy uczeń jeszcze nie ma przyswojonych pojęć, których to zadanie dotyczy) nie są przez ucznia dostrzegane. Co więcej, pomijane są przez ucznia ostatnie etapy, a antycypacja rozwiązania jest jeszcze niezwiązana ze świadomym tłumaczeniem problemu na język fizyki. Rozwiązując jednym rzutem myśli, uczeń niejako antycypuje definicję pojęcia, którego zadanie dotyczy. Rozumienie pojęcia będzie równoznaczne z umiejętnością uświadomienia sobie etapów rozwiązywania, będzie wtedy można rozwiązywać bardziej skomplikowane zadania o więcej niż jednym kroku, zostaną zauważone i rozpoznane zadania identyczne (tylko inne dane liczbowe), oraz zadania analogiczne. Początkowe rozwiązywanie jednym rzutem jest tak jakby procedurą „od tyłu", zgadywaniem, które wprowadza w stan „gotowości do rozumienia". Uczniowie, którzy nie przejdą tego etapu mogą mieć potem kłopoty z rozumieniem fizyki, z rozwiązywaniem zadań problemowych, zadań „z życia". Liczne badania wskazują, że nowicjusze inaczej rozwiązują zadania, niż rutynowi fachowcy np. [27], [28], [29]. Ale pomimo to występuje pewne podobieństwo pomiędzy nowicjuszem atakującym problem porównania zbiorów siana z twórczym fizykiem obejmującym intuicyjnie rozwiązanie nowego problemu (porównaj *Psychologia odkryć matematycznych* Hadamarda [30] i Ulama *Wspomnienia matematyka* [31]).

Jeszcze raz podkreślam, cała powyższa argumentacja nie oznacza, że sterylne zadania akademickie są niepotrzebne, że nie należy po przerobieniu materiału rozwiązywać wielu zadań. Zadania akademickie spełniają ważną rolę. Dla wielu uczniów etap tłumaczenia problemu na akademicki jest prosty, oznacza czasami (zwłaszcza kiedy to „życie" dorabiane jest sztucznie) stratę czasu. Zadania akademickie mogą zawierać parę kolejnych etapów, czego się nie da osiągnąć w zadaniach „jednym rzutem myśli". Zadania akademickie spełniają rolę etiud w muzyce.

6.3. Opis sytuacji fizycznej

Opisana w zadaniu sytuacja fizyczna musi być znana uczniowi, wyobrażalna. Niesie to dwie konsekwencje. Po pierwsze w problemie może wystąpić nadmiar danych oraz jednostki muszą być tak dobrane, by wartości liczbowe danych mogły być małe (zalecane są okrągłe liczby).

Tak więc w zadaniu dotyczącym swobodnego spadku ciała, pomimo że masa ciała nie jest daną potrzebną do rozwiązania, powinno się dokładnie określić spadający obiekt: np. „nieduży kamyk o masie 1/2 kg".

Jeśli chcemy podkreślić, że nie jest ważne jaką masę, czy kształt ma kamień, możemy użyć wyrażenia: „najzwyklejszy kamień, np. 0,5 kg..."

To słówko *najzwyklejszy* wyewoluuje później w duży kwantyfikator.

Jeśli chcemy rozważać zderzenia wagonów kolejowych, to niech masa tych wagonów będzie wyrażona w tonach. Np. niech jeden wagon ma masę 20 ton, a inny 10 ton.

Niech zderzające się auteczka mają masy 20 dag i 10 dag. Uczeń łatwiej dostrzeże analogię w zderzeniach tych różnych obiektów.

Przykłady:

Przeprowadzono badanie nad rozwiązywaniem przez uczniów zadania dotyczącego zakupów i zadania dotyczącego zachowania pędu.

Pierwszy problem dotyczący zakupów (wielostopniowy) omówimy nieco później (by zwrócić uwagę na sposób rozwiązywania). Dwóm grupom uczniów dano formalnie identyczne zadania. Jedna grupa zadań dotyczyła polskiej waluty i miała jako dane okrągłe liczby, druga grupa dotyczyła dolarów i miała „trudne liczby". W pierwszej grupie było więcej dobrych rozwiązań, co rzecz jasna nie jest wynikiem zaskakującym. Ciekawsze jest to, że to nie błędy rachunkowe były powodem mniejszej liczby prawidłowych rozwiązań.

Drugi przykład dotyczy rozwiązywania zadania związanego z zachowaniem pędu. Uczniowie rozwiązywali zadanie w dwóch wersjach, różniących się sformułowaniem.

Wersja I: jest to przeformułowane zadanie z książki J. Ogara [32]
Ciężki wagon kolejowy o masie 40 ton, toczący się po torze kolejowym z prędkością 3 m/s najechał na stojący na tym samym torze wagon 20 tonowy. Po zderzeniu sczepione wagony potoczyły się dalej. Jaka była ich prędkość? O ile zmieniła się prędkość ciężkiego wagonu, a o ile lżejszego? Sprawdź jak zmieniły się pędy obydwu wagonów (o ile?).

i druga wersja oryginalna Ogara (str. 33):
Wagon o masie 40 000 kg poruszający się z prędkością 3 m/s po prostoliniowym odcinku toru uderza w spoczywający wagon o masie 20 000 kg i łączy się z nim. Jaka jest prędkość obu wagonów po zderzeniu? Sprawdź, że zmiana prędkości

wagonu o dwa razy większej masie jest dwa razy mniejsza niż zmiana prędkości wagonu o dwa razy mniejszej masie. Sprawdź, że zmiany pędów każdego z wagonów są takie same.

I tu również zadanie z okrągłymi i małymi liczbami było lepiej rozwiązywane. Obraz zaciemnia fakt, iż zadania nie mają identycznego sformułowania. Drugie sformułowanie jest trudniejsze, bardziej abstrakcyjne.

W poprzednim *Fotonie* 45 omawiając trudności uczniów przy opisie ruchów pokazano na przykładach opisu ruchu pocisku zrzuconego z samolotu i puszki wyrzuconej z okna pociągu – wpływ osobistego doświadczenia ucznia – jego pamięci o wymienionych w zadaniu zachowaniach. Przejście do zadań wymagających wejścia na obszary nieznane z własnej obserwacji może nastąpić dopiero później po pełnej interioryzacji znanych sobie zjawisk, wydarzeń.

6.4. Tłumaczenie problemu na język fizyki i matematyki

Zofia Krygowska [5] cytuje komentarz uczennicy, zrobiony przez nią w trakcie rozwiązywania zadania dotyczącego wyliczenia pola powierzchni dachu. W temacie zadania zostało powiedziane, że na pomalowanie 1 m^2 dachu trzeba zużyć puszkę farby. Uczniom podano wymiary dachu. Mieli oni następnie wyliczyć potrzebną do wymalowania ilość puszek farby.

Jedna z uczennic zapytała, jak grubo będzie się dach malować?

To sugeruje, że uczennica wyraźnie widzi problem trzywymiarowy – zwraca uwagę na strukturę powierzchni dachu. **Dach to nie płaszczyzna**. Warstwa farby jest dla niej obiektem trójwymiarowym. Nauczyciel rozwiązujący z uczniami to zadanie często sądzi, że przejście od rzeczywistego problemu trójwymiarowego do dwuwymiarowego jest dla ucznia oczywiste.

Pytania o ilość zebranego siana, przekopanej ziemi (w intencji pytających) np. [33] są pytaniami o powierzchnię. Uczniowi jednak **w tym** momencie jawi się góra przekopanej ziemi, stóg siana. Pytanie o porównanie zbioru siana jest dla dziecka trudniejszym, dwustopniowym zadaniem o porównywaniu objętości brył o tej samej podstawie, od zadania dotyczącego porównywania powierzchni.

Np. łatwiej jest w nauczaniu osiągnąć szybko sukces przez wyuczenie uczniów wyliczania pola powierzchni z algorytmu $P = a \cdot b$, niż rozwiązując zadania z życia. Zadania „z życia” wymagają czasu, negocjacji z uczniami, odnośnie zrozumienia problemu. One jednak uczą umiejętności wyabstrahowywania istotnych elementów problemu. Wbrew pozorom trafna konstrukcja takich zadań nie jest łatwa. Podręczniki i zbiory zadań roją się od źle dobranych przykładów.

Przykład z egzaminu wstępnego na medycynę:
Pacjent w trakcie wykonywania próby siłowej podniósł 10 razy odważnik 1 kg ma wysokość 1 m. Jaką pracę wykonał?

Intencją konstruktorów zadania było sprawdzenie czy zdający potrafi wyliczyć pracę stałej siły mg działającej na odcinku 10 *l*. Zatem spodziewana odpowiedź 10 $mgl = 10 \cdot 1 \cdot 10 \cdot 1 = 1000$ J. Taka też odpowiedź była podana jako prawidłowa.

Komentarz:

1° „Człowiek wykonujący pracę" jest skrótem myślowym: siła, której źródłem jest działanie człowieka (podtrzymywanie, siła reakcji na *mg*) wykonuje pracę. Skrót myślowy i przyjęte konwencje oznaczają, iż chodzi wyłącznie o **tę** siłę. Jak wiadomo, jest to uproszczenie, przyjmowane z braku możliwości wnikliwszych rozważań.

2° W temacie zadania nie powiedziano, jak ciężarek jest opuszczany. Czy upuszczony spada swobodnie, czy opuszczany przez pacjenta. Jeśli jest opuszczany przez pacjenta – to w trakcie opuszczania jest wykonywana ujemna praca. A więc globalnie pacjent wykona zerową pracę, co jest sprzeczne z podaną uczniom odpowiedzią i jest sprzeczne ze zdrowym rozsądkiem.

6.5. Rozwiązywanie na symbolach

Nie spieszyć się z rozwiązywaniem zadania na symbolach literowych.

Przykład 1

W podręczniku do języka angielskiego dla uczniów klasy VII jest następujące zadanie (problem polega na zmierzeniu czasu rozwiązywania zadania, uczniowie uczą się sensu słowa *timing*):

Dom jest budowany przez 8 cieśli przez 45 dni. Jak długo będzie dom budowany przez 20 robotników?

Zanim zdążyłam zapisać dane, Bronek – uczeń klasy VII stwierdził: O, to proste, dwa i pół razy krócej, czyli w 18 dni.

Bronek kiepsko sobie radził z zapisem danych i szukanej zadania, a zwłaszcza nie potrafił nazwać relacji odwrotną proporcjonalnością.

Prawie identyczne zadanie tylko dotyczące kosiarzy i łąki, z podobnymi dość prostymi danymi liczbowymi rutynowo zadaję do rozwiązania rozpoczynającym naukę w liceum pierwszoklasistom, średnio dwa lata starszym od Bronka. Większość z nich (dobre klasy) rozwiązuje problem w pamięci dość szybko. Tylko niewielki procent uruchamia świadomie formalny algorytm i zapisuje poprawnie równanie.

Przykład 2

W szóstej klasie uczniowie rozwiązywali proste, ale nie rozwiązywalne jednym rzutem myśli zadanie, dotyczące prawa Archimedesa. Rozwiązywaliśmy je krok po kroku wyliczając kolejne wielkości fizyczne (masa, objętość, siła wyporu). Na zakończenie, już po uzyskaniu rozwiązania zebrano wszystkie wykonane działania i zapisano na symbolach w końcowy wzór.

Przystąpiłam do rozwiązywania *de facto* identycznego zadania, ze zmienionymi danymi. Uczniowie zdecydowanie odmówili skorzystania z gotowego wzoru (nie rozumieli dlaczego inne dane dotyczące innego problemu można podkładać do wzoru otrzymanego z innego zadania). Musieliśmy rozwiązywać zadanie krok po kroku od początku.

Niewielu uczniów uchwyciło sens i wygodę wzoru ogólnego. Aby mogła uczynić to większość klasy należałoby po pierwsze zrobić dużo przykładowych zadań, a po drugie odczekać do czasu aż uczeń będzie gotowy do myślenia formalnego. Duża liczba ćwiczeń (w przypadku np. pola powierzchni, cen, kosztów) w jakiejś dziedzinie może przyspieszyć rozumne stosowanie wzorów, ale tylko w tej dziedzinie.

Przykład 3

Grupa I:

1. *Grupa chłopców zapłaciła za bilety na mecz 150 tys. zł. Ilu było chłopców, skoro bilety były po 10 tys. zł?*
2. *Innym razem grupa chłopców zapłaciła 200 tys. za bilety na koncert. 7 chłopców dołączyło w ostatniej chwili i w rezultacie chłopcy musieli zapłacić 340 tys. zł. Jaka była cena biletu? Ilu było początkowo chłopców?*
3. *Pewna grupa chłopców miała zapłacić 180 tys. za bilety na mecz. W ostatniej chwili dołączyło jeszcze dwóch i zapłacili za wszystkie bilety tylko 160 tys. zł, ponieważ otrzymali 20% zniżkę jako grupa. Ile było w grupie chłopców?*

Grupa II:

A oto zadania. Na wstępie, jako problem do rozwiązania było podane równanie [34]:

$306/x = 425/(x+7)$.

1. *Grupa chłopców zapłaciła 238 $ za bilety. Ilu było chłopców w grupie, jeśli jeden bilet kosztował 14 $?*
2. *Grupa zapłaciła 306 $ za bilety. Kiedy doszło 7 osób to okazało się, że koszt wyniósł 425 $. Ilu ludzi było początkowo w grupie?*

3. *Grupa miała zapłacić 70 $ za bilety. Kiedy jednak dołączyło 8 osób, całkowity koszt wyniósł tylko 120 $, ponieważ grupa otrzymała 20% zniżki. Ilu ludzi było początkowo w grupie?*

Przetestowano około 100 uczniów 16- i 14-letnich. W starszej grupie liczba prawidłowych odpowiedzi 80–90% (2 i 1 zadanie), a w młodszej 70–90% (2 i 1 zadanie).

W przypadku pierwszego zadania nie zaobserwowano znaczących różnic dla I i II grupy zadań, natomiast drugie zadania były rozwiązywane lepiej w łatwiejszej wersji.

W drugim zadaniu można było wyróżnić z grubsza dwa typy rozwiązań:

A/ Krok po kroku:

340 – 200 = 140
140 : 7 = 20
200 : 20 = 10

oraz

B/ Koszt = 340

liczba chłopców 7 + *x*
cena biletu *y*
$x \cdot y = 200$
$y(7 + x) = 200$
lub od razu $(x + 7) \cdot 200 = x \cdot 340$
$x = 10$

Około 40% starszych uczniów i 60% młodszych rozwiązywało zadanie krok po kroku. Liczba prawidłowych odpowiedzi praktycznie jest taka sama dla młodszych i starszych uczniów. Nieznacznie wzrosła liczba rozwiązań typu formalnego.

Widać, że problem cen, kosztów jest dla uczniów problemem oswojonym. Nawet złożony problem (więcej niż jedno działanie, dwie niewiadome) jest rozwiązywany przez wielu uczniów krok po kroku – co imituje rozwiązywanie w pamięci.

<u>Przykład z termodynamiki</u>

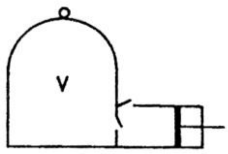
Poniżej zacytowany jest przykład rozwiązania zadania z termodynamiki (z podręcznika J. Salach [35]) ucznia klasy matematyczno-fizycznej, który już dawno osiągnął poziom pełnego myślenia formalnego.

Zadanie rozwiązywane było na klasówce.

Zadanie brzmiało:

Komora pompy ma objętość 2 dm^3 *a klosz 3 dm*^{3}*. Jakie będzie w kloszu ciśnienie po czwartym ruchu tłoka, jeśli pompowanie jest procesem izotermicz-*

nym? Po ilu ruchach tłoka ciśnienie spadnie poniżej 0,1 ciśnienia początkowego?



Rozwiązanie Wojtka:

$$pV = nRT \tag{5}$$

$$p_4 = p_0 - \frac{2}{5} p_0 - \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} p_0 - \frac{9}{25} \cdot \frac{2}{5} p_0 - \frac{27}{125} \cdot \frac{2}{5} p_0 =$$
$$= p_0 (1 - \frac{250}{625} - \frac{150}{625} - \frac{90}{625} - \frac{54}{625}) = \frac{81}{625}$$

$$p_4 = 0{,}1296 \cdot p_0 \tag{6}$$

Po czym następował rachunek

$$\frac{p_0}{p_1} = \frac{V_1}{V_0} \tag{7}$$

$$p_1 = \frac{3}{5} p_0 \tag{8}$$

$$p_4 = \left(\frac{3}{5}\right)^4 p_0 \tag{9}$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x < 0{,}1 \tag{10}$$

$$x < 4{,}5 \tag{11}$$

a więc ciśnienie spadło poniżej szukanej wartości po pięciu ruchach.

Widzimy, że Wojtek w myśli śledził kolejne ruchy pompy i sobie niejako w głowie rachował kolejne ciśnienia. Z dalszego toku rozwiązania widać, iż dysponował on narzędziem prowadzącym szybciej do celu.

Przykład powyższy ukazuje jak chęć i potrzeba operowania symbolami, używania przekształceń przychodzi spontanicznie. Oczywiście cała trudność w nauczaniu polega na tym, że nie u wszystkich uczniów w jednakowym czasie. Nie oznacza to też, że nie należy z uczniami rozwiązywać zadań w tradycyjny sposób to jest: dane, szukane, wzory, przekształcenia, wynik w ramce, wstawianie liczb.

To uczy porządku i systematyczności. Chodzi tylko o to, by ten etap był **poprzedzony** rozwiązywaniem, nazwijmy to spontanicznym. Ślady tego rozwiązania powinien uczeń mieć w zeszycie w postaci rysunku sytuacyjnego z opisem „co tu się dzieje”. Niektóre podręczniki do college i szkół średnich podają rozwiązania wpisując zamiast symboli liczby z jednostkami. Pomieszanie symboli algebraicznych z liczbowymi może razić jednak estetycznie. Ten etap może stać się zbędny, gdy uczeń nabierze pewnej rutyny.

6.6. Stosowanie rysunków sytuacyjnych i schematów rysunkowych

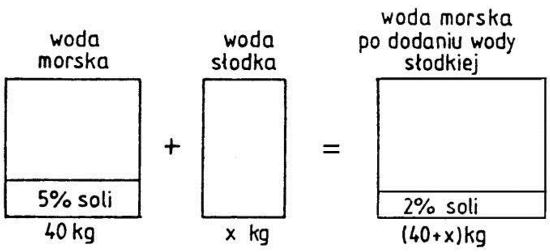
Wykonywanie przez uczniów rysunku sytuacyjnego ma pomóc im w „zobaczeniu”, wyobrażeniu sobie opisywanej w zadaniu sytuacji. W trakcie wykonywania rysunku uczeń jest niejako przymuszony do wstępnej refleksji nad zadaniem.

Diagramy i schematy mają z kolei pomóc już w bardziej formalnej interioryzacji (patrz *Foton* 43, Piaget), zawierają one istotne elementy abstrahowania, są ilustracją wzorów matematycznych.

Użyteczność stosowania rysunków sytuacyjnych i schematów rysunkowych dostrzegają również matematycy.

Oto dwa przykłady wybrane z propozycji Jana Lenara [36] dotyczące rozwiązywania zadań o mieszaninach, roztworach i stopach.

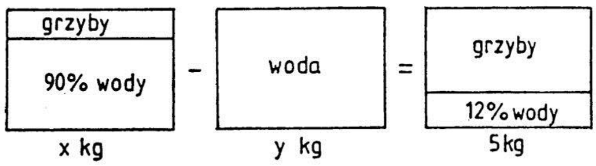
Zadanie 1.
Woda morska zawiera 5\% soli. Ile kilogramów wody słodkiej należy dodać do 40 kg wody morskiej, aby woda ta zawierała 2% soli? Treść zadania ilustrujemy rysunkiem



Uczniowie zauważają, że ilość soli po dodaniu wody słodkiej będzie taka sama, układają stosowne równanie

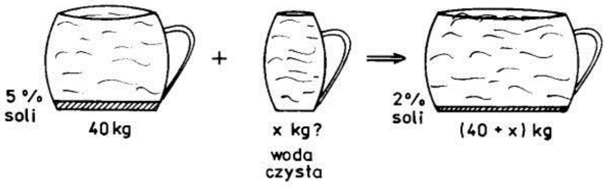
$$\frac{5}{100} \cdot 40 = \frac{2}{100} \cdot (40 + x)$$

Zadanie 4.
Świeże grzyby zawierają 90% wody, suszone tylko 12% wody. Ile świeżych grzybów należy ususzyć, aby otrzymać 5 kg suszonych grzybów?



$$\begin{cases} x + y = 12 \\ \frac{3}{5}x + \frac{7}{10}y = \frac{5}{8}\cdot 12 \end{cases}$$

Bardzo słabym uczniom, przed sporządzeniem diagramu można polecić sporządzenie rysunku – będzie to wstępny krok do sporządzenia diagramu.



Wykonywanie rysunku ma ułatwić „zobaczenie”, wyobrażenie sobie sytuacji oraz zrozumienie sensu diagramu, który następnie spełnia rolę rysunku. Czas sporządzania rysunku to czas refleksji nad zadaniem.

7. O pewnych trudnych dla uczniów zadaniach

A oto trzy zadania z egzaminu wstępnego na fizykę UJ (1995, 1996), które okazały się być wyjątkowo trudne dla zdających.

I. Przykład
W 1996 roku tego zadania nikt nie rozwiązał prawidłowo.

Człowiek siedzący na krześle obrotowym i trzymający w wyciągniętych rękach dwa jednakowe odważniki obraca się z prędkością kątową $\vec{\omega}$. *Jeżeli w pewnej chwili upuści obydwa odważniki, to jego prędkość kątowa*
A... wzrośnie (wynika to z zasady zachowania momentu pędu)
B... wzrośnie (wynika to z zasady zachowania energii)
C... zmaleje (wynika to z zasady zachowania momentu pędu)
D... nie ulegnie zmianie (wynika to z zasady zachowania momentu pędu)

Duża liczba zakreślonych odpowiedzi A sugeruje, iż uczniowie wprawdzie poprawnie rozważają problem wychodząc z zachowanego w tym przypadku krętu, lecz mimo to nieprawidłowo rozumują dalej. Wywiad z paroma osobami wykazał, że:

1/ zachodziła silna dominacja pamięciowa doświadczenia, w którym człowiek ciężarki początkowo trzymane w rozciągniętych rękach przybliżał do ciała – następował wtedy spektakularny wzrost prędkości kątowej,

2/ uczniowie nie uświadamiali rodzaju oddziaływania pomiędzy człowiekiem, a ciężarkami.

Powyższe zadanie dyskutowano z paroma klasami licealistów (w listopadzie 1996 licealiści rozwiązali poprawnie zadanie w 25%), którym uprzednio demonstrowano przykład ilustrujący zachowanie krętu, a mianowicie człowieka składającego i rozkładającego ręce na wirującym stołku. Wydaje się, że komplet tych dwóch problemów – pierwszy ze zmianą momentu bezwładności – a drugi bez tej zmiany, dają już dobrą podstawę do zrozumienia zasady zachowania krętu, sensu momentu bezwładności, roli sił centralnych. Można było u wielu uczniów zaobserwować efekt „acha”'.

Pewien student wydziału humanistyki, absolwent klasy matematycznej V LO, który prawidłowo rozwiązał zadanie podał swój tok myślenia.

Wyobraziłem sobie, że obracam się tak z tymi ciężarkami w przestrzeni kosmicznej, nie oddziałuje na nas (mnie i ciężarki) przyciąganie ziemskie. Jeśli puszczę ciężarki delikatnie to jasne, że nic się nie stanie – ciężarki jakby „nie zechcą” być puszczone – będziemy się wszyscy dalej tak samo poruszać.

Widzimy, że student prawidłowo wykorzystał myślenie kontrfaktyczne, nie odwoływał się *explicite* do prawa zachowania krętu (może zapomniał już poprawne sformułowanie).

II. Przykład

Za pomocą soczewki skupiającej otrzymano na ekranie ostry obraz przedmiotu. Po przysłonięciu górnej połowy soczewki otrzymano

A... dolną połowę obrazu

B... górną połowę obrazu

C... obraz ciemniejszy

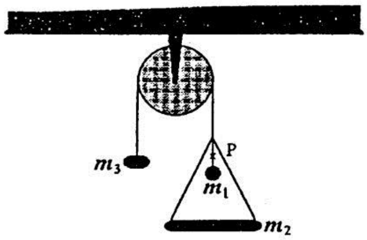
D... obraz nieostry

Zadanie powyższe również było bardzo słabo rozwiązywane zarówno w 1995 roku jak i 1996.

Sugeruje to, iż uczniowie nie rozumieją schematów ilustrujących powstawanie obrazów w soczewkach skupiających. Wywiady ze studentami wykazały, że nie wykonywali żadnych doświadczeń z soczewkami i powstawaniem obrazów, i nie analizowali ich wyników, a przede wszystkim nie zwrócono im uwagi na fakt, że to **nie tylko** te promienie, które się standardowo rysuje, biorą udział w powstawaniu obrazu.

III. Przykład
(przykład ten był już zamieszczony w *Fotonie* 37)

Przedstawiony na rysunku układ pozostaje w spoczynku. Bloczek jest nieważki.

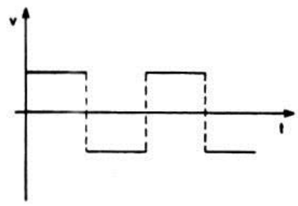


W pewnej chwili przepalono w punkcie P nieważką nić, na której wisiała kulka z plasteliny o masie m. Zakładając, że kulka z plasteliny zderza się doskonale niesprężyście z szalką o masie m_2*, można powiedzieć, że* ***po zderzeniu*** *prędkość tej kulki będzie:*
A... zero
B... stała i zwrócona w górę
C... stała i zwrócona w dół
D... zmienna.

Złe rozwiązania powyższego zadania sugerują błędne rozumienie słowa **po zderzeniu**. Niektórzy studenci rozumieją od momentu zetknięcia kulki z szalką, czyli w czasie, w którym plastelina jest deformowana i przyklejana do szalki. Wtedy jest nieokreślona prędkość kulki jako całości – można mówić o prędkości poszczególnych części kulki i prędkości środka masy plasteliny. W czasie procesu zderzania kulka (część kulki) porusza się z przyspieszeniem, by po zakończeniu procesu zderzenia spoczywać.

Okazuje się, że pewne zjawiska, konwencjonalnie pomijane w rozważaniach, dla ucznia są istotne.

Np. wykres



jest oczywiście uproszczeniem i przyjęciem pewnej konwencji. Opisuje np. prędkość doskonale swobodnej elastycznej kulki zamkniętej w pudle o elastycznych ścianach. Sprężyste oddziaływanie jest w tym przybliżeniu typu δ Diraca. Uczeń koncentruje swą uwagę na przedziałach czasu, w których v się zmienia gwałtownie, na samym procesie zderzenia sprężystego ze ścianą. Odpowiadający temu wykres nie powinien mieć nieciągłości.

IV. Przykład

Zadanie otwarte

W *Fizyce w Szkole* Waldemar Gorzkowski [37] przedstawił wraz z rozwiązaniem poniższe zadanie:

Wyobraźmy sobie, że mamy dwie jednakowe porcje wody, np. po jednym litrze każda. Jedna z tych porcji jest gorąca – ma temperaturę 100°C, druga zaś zimna – o temperaturze 0°C. Poza tym mamy do dyspozycji rozmaite naczynia o dowolnych pojemnościach, kształtach i właściwościach ścianek (mogą one przewodzić ciepło lub nie w zależności od tego, jak sobie tego będziemy życzyli). Naszym zadaniem jest maksymalnie ogrzać wodę początkowo zimną kosztem wody początkowo gorącej. Pytanie: jaką maksymalną temperaturę wody początkowo zimnej możemy uzyskać? Aby uniknąć nieporozumień załóżmy od razu, że obu porcji wody nie można mieszać wzajemnie. Przyjmijmy na przykład, że woda gorąca jest nieco brudna, a zimna zupełnie czysta. Korzystając więc z energii wewnętrznej wody brudnej chcemy maksymalnie ogrzać wodę czystą.

Otóż okazało się, że zadanie to sprawiło uczniom wielką trudność, pomimo iż problem fizyczny jest jasny, wyobrażalny, zrozumiały dla nieuczącego się fizyki laika.

Trudność w znalezieniu rozwiązania tkwi w przywiązaniu do schematu rozwiązania występującego np. przy liczeniu końcowej temperatury mieszaniny cieczy o dwóch początkowo różnych temperaturach (wypisanie bilansu cieplnego). Zasadnicza trudność jednak zasadza się w nowości heurystycznej, wyborze pewnego procesu iteracyjnego (przelewanie i ogrzewanie wody porcjami), który nie jest standardowo używany.

V. Przykład

Trudności Olka z wyprowadzeniem równania adiabaty

18-letni Olek, dobry uczeń ostatniej klasy licealnej – uniwersyteckiej nie potrafił samodzielnie wyprowadzić równania adiabaty, poprosił o pomoc, to jest o podanie odpowiedniej literatury. Olek był dobrym uczniem. Jego znajomość rachunku różniczkowego i całkowego nie ograniczała się jedynie do znajomości odpowiednich algorytmów, ale była głębsza. Sprawdziłam pobieżnie znajomość pierwszej zasady termodynamiki, równania stanu. Pojęcia te nie były Olkowi obce. Olek wiedział, co znaczy iż proces jest adiabatyczny. Olek nie wiedział jednak jak wykorzystać proces adiabatyczności do wyprowadzenia równania adiabaty.

Poleciłam Olkowi dobrą książkę pani Jadwigi Salach *Termodynamika* [35]. Na str. 95 Olek znalazł wyprowadzenie (patrz dodatek 1). Po jakimś czasie Olek stwierdził, że w zasadzie wszystko zrozumiał, że rozumie każde przejście z linijki do linijki, niemniej będzie mu trudno to zapamiętać i sam by na to nie wpadł.

To stanowisko Olka jest typowe dla wielu uczniów, gdy napotykają na nowy materiał teoretyczny, zbyt trudny z powodów matematycznych lub z powodu obcości nowych pojęć. Inne wyrażenie takiego stanu to: „Nie widzę celu", „Nie widzę jak to się ze sobą łączy".

Uczeń po jakimś czasie może samodzielnie lub z pomocą dokonać wysiłku i pogłębić rozumienie problemu.

(1) W przypadku wyprowadzenia równania adiabaty jedna z trudności tkwi w niewystarczającej znajomości aparatu matematycznego. Uczeń napotyka na trudność, z którą często muszą się parać fizycy. Używają pojęć matematycznych niedoprecyzowanych, na wyczucie. Dla ucznia to będą różniczki funkcji wielu zmiennych, dla fizyka funkcja delta Diraca. To jest istotna trudność i nie łatwo pokonywalna. Problem przedstawienia różniczek zupełnych był w literaturze (np. *The Physics Teacher*) szeroko dyskutowany.

Przy braku czasu może uczniowi pomóc wskazówka, iż w **problemie** jest trudność, która będzie wyjaśniona później. Brak jakiegokolwiek komentarza może pozostawić ucznia z uczuciem, „iż coś tu nie gra" lub „ja jestem głupi".

(2) Jeszcze bardziej pierwotna trudność matematyczna tkwi w fakcie, że równanie stanu jest równaniem trzech zmiennych. Tak na prawdę to jest nowość dla studentów. Mają oni bowiem po raz pierwszy do czynienia z **trzema równoprawnymi** zmiennymi. Studenci nie wiążą poszczególnych procesów zachodzących przy ustalonych parametrach p, T i V z przekrojami ogólnego równania stanu tylko traktują je niezależnie. I jeśli nawet student zdaje sobie sprawę, że szuka związku p i V dla procesu adiabatycznego to na ogół nie widzi tego geometrycznie. Studentowi potrzebne jest obycie matematyczne, pewna swoboda w interpretacji funkcji, to co Zofia Krygowska nazywa intuicją przedłużoną. Niewątpliwie wymaga to osiągnięcia trzeciego stopnia myślenia formalnego wg Piageta.

(3) Okazuje się, że w rozumieniu I zasady termodynamiki u Olka wystąpiła luka. Olek nie rozumiał, że dla gazu doskonałego energia wewnętrzna jest funkcją stanu i zależy jedynie od temperatury. Olek znał wzór $d\,U = n\,C_V\,d\,T$, ale zapytał dlaczego stosujemy tu ten wzór skoro nasz proces jest adiabatyczny a nie izochoryczny. Olek wykorzystał swoją prawidłową intuicję, a mianowicie, że w rzeczywistych przypadkach, dla rzeczywistych ciał zmiany energii wewnętrznej zależą nie tylko od temperatury końcowej i początkowej.

Tak jest dla gazów doskonałych. Zrozumienie tego wymaga jednak dłuższego objaśnienia, rozważenia różnych przypadków. Jest to równie trudne, jak pojęcie potencjału. Jest utopią mniemanie, iż uczniowie zrozumieją pojęcie energii wewnętrznej i pierwszą zasadę termodynamiki w trakcie 45-minutowej lekcji.

Z powyższymi trudnościami boryka się większość studentów. W zależności od zdolności i matematycznej erudycji pokonują te trudności szybciej, wolniej lub nawet w ogóle sobie z nimi nie radzą. Rolą nauczyciela jest studentom pomóc. Podążając śladem rozumowania podręcznika Olek nie wiedział, w jaki sposób będzie zmierzał do celu. Podążał krok za krokiem, a nie widział całości. Co gorsza nie widział drogi, nawet jeśli już cel osiągnął.

Sądzę, że przy rozwiązywaniu tego problemu, po przedyskutowaniu definicji adiabatyczności i omówieniu przykładów fizycznych, czyli **praktycznych** realizacji procesu trzeba koniecznie poświęcić nieco czasu na przećwiczenie przedstawienia procesów na wykresie $p – V$. Następnie uczniowie powinni sami dojść do wniosku, iż adiabaty będą bardziej „strome” od izoterm. Uczniowie wiedzą teraz czego oczekiwać. Trzeba następnie uczniom zwrócić uwagę, iż warunek adiabatyczności jest w formie różniczkowej, a równanie stanu nie jest. Ażeby wykorzystać warunek adiabatyczności trzeba przejść z równaniem stanu do postaci różniczkowej, wyeliminować temperaturę T i wrócić przez całkowanie do postaci całkowej – tak aby studenci widzieli przed sobą całą drogę.

W drugim dodatku przedstawiono przykładowe rozwiązanie.

Dodatek 1

Wyprowadzenie równania Poissona (J. Salach, str. 95)

Do zrozumienia wyprowadzenia równania Poissona, które zamieszczamy poniżej, potrzebna jest znajomość pochodnych.

Praca wykonana podczas niewielkiej zmiany objętości gazu doskonałego o dV wynosi $dW = –pdV$. W przemianie adiabatycznej $dQ = 0$, więc pierwsza zasada termodynamiki przyjmuje postać

$$dU = -pdV \quad \text{lub} \quad dU + pdV = 0. \tag{1}$$

Niewielka zmiana energii wewnętrznej gazu dU wyraża się wzorem

$$dU = n\, C_V\, d\, T \tag{2}$$

gdzie dT jest niewielką zmianą jego temperatury, zaś ciśnienie można obliczyć z równania Clapeyrona

$$p = \frac{nRT}{V}. \tag{3}$$

Podstawiając te oznaczenia do wzoru (1) otrzymujemy

$$nC_V dT + \frac{nRT}{V} dV = 0 . \tag{4}$$

Dzieląc obie strony równania przez $n\ C_V$ i podstawiając $R = C_p - C_V$ oraz $C_p/C_V = \kappa$ dochodzimy do postaci

$$dT + \frac{T}{V}(\kappa - 1) dV = 0 . \tag{5}$$

Mnożymy obydwie strony równania przez $V^{\kappa - 1}$

$$V^{\kappa-1}\, dT + (\kappa - 1)\ TV^{\kappa - 2}\, dV = 0. \tag{6}$$

Wiadomo z matematyki, że różniczka iloczynu dwóch funkcji y i z wyraża się wzorem

$$d(y\ z) = y\ d\ z + z\ d\ y. \tag{7}$$

Załóżmy, że $y = T$, a $z = V^{\kappa - 1}$ i zastosujmy powyższy wzór.

$$d(T \cdot V^{\kappa-1}) = V^{\kappa-1} dT + (\kappa - 1) T V^{\kappa-2} dV \tag{8}$$

łatwo zauważyć, że po prawej stronie otrzymaliśmy wyrażenie identyczne z wyrażeniem (6), które jest równe zeru, zatem

$$d(T \cdot V^{\kappa-1}) = 0 \quad \text{czyli} \quad \underline{TV^{\kappa-1} = const} \tag{9}$$

Jest to jedna z postaci równania Poissona. Eliminując z tego równania temperaturę $(T = \frac{pV}{nR})$, dochodzimy do wniosku, że stały jest także iloczyn $p \cdot V^{\kappa}$:

$$\underline{pV^{\kappa} = const} \tag{10}$$

Dodatek 2

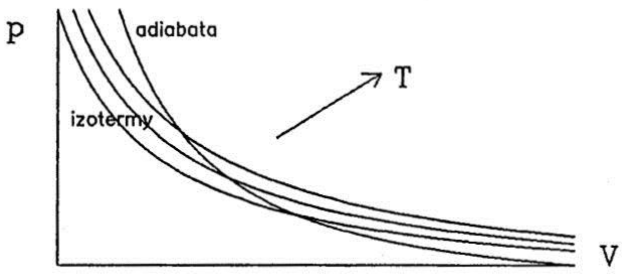
A oto przykładowe rozwiązanie:
Rozważmy proces adiabatyczny czyli taki, w którym nie ma wymiany ciepła z otoczeniem. Zatem zgodnie z pierwszą zasadą termodynamiki, czyli zasadą zachowania energii zmiana energii wewnętrznej jest spowodowana pracą, a więc:

$$dU = -pdV \quad (Q = 0). \tag{1}$$

Jak w każdym procesie następuje przejście od jakichś p, V, T, na początku do p, V, T, na końcu tak, że spełniony jest związek

$$\frac{pV}{T} = nR. \tag{2}$$

Nas interesuje zależność p od V w tym procesie. Chcemy wyeliminować zależność od T korzystając z adiabatyczności i przyjrzeć się naszemu procesowi na wykresie p – V. Znamy kształty takich przejść dla przemiany izotermicznej, izochorycznej i izobarycznej. Trzeba koniecznie zwrócić uwagę na parametr T w przemianach izotermicznych. Następnie uczniowie powinni bez trudu dojść, że w procesie adiabatycznym krzywe będą bardziej strome, tak aby przecinać izotermy.



Ponieważ warunek adiabatyczności zawiera różniczki, trzeba równanie stanu też napisać dla różniczek. Mamy więc:

$$pV = nRT \rightarrow d(pV) = d(nRT) = nRdT. \tag{3}$$

dT wyeliminujemy z warunku $-p\,dV = n\,C_V\,d\,T$ (tutaj trzeba upewnić się czy uczniowie rozumieją to prawidłowo – patrz uwaga w tekście. Nie należy żałować czasu na objaśnienie).

Należy skorzystać z $C_p = C_V + R$. Dalej wszystkie kroki są naturalne. Są konsekwencją całkowania (2) i nie wymagają specjalnego pamiętania:

$$dpV + dVp = nRdT = -nRp\frac{dV}{nC_V} \tag{4}$$

$$dpV + dV(p + \frac{R_p}{C_V}) = 0 \tag{5}$$

$$dpV + dV\left(C_V + R\right) = 0 \tag{6}$$

$$\frac{dp}{p} + \frac{dV}{V}\frac{C_p}{C_V} = 0 \tag{7}$$

$$\frac{dp}{p} = -\kappa\frac{dV}{V} \tag{8}$$

po scałkowaniu

$$\ln p = -\ln V^{\kappa} + const \tag{9}$$

$$pV^{\kappa} = const' \text{ qed.} \tag{10}$$

W *Fotonie* 10 J. Ginter [38] przedstawił rozwiązanie wykorzystujące komputer. Metody numeryczne mogą być w wielu przypadkach narzędziem ułatwiającym pokonywanie barier matematycznych.

Jak wynika z prac S. Plebańskiego, prezentowanych w SPD w Borowicach w 1996 roku, numeryczne całkowanie nie nastręcza uczniom trudności koncepcyjnych.

VI. Przykład

Anegdota

Profesor Piekara pyta studenta:

– Proszę Pana, czy kulka stalowa będzie pływać w rtęci?

* Czy mógłbym dowiedzieć się jaka jest gęstość stali, a jaka rtęci? – pyta student.

– Około 7 g/cm^3 i 13 g/cm^3 – odpowiada Profesor.

* Student uszczęśliwiony: nawet nie jedna kulka, prawie dwie mogą pływać w rtęci.

rys. Ł. Warczak

Konkluzje

Arons [39] w swoim podręczniku nauczania fizyki zwraca nauczycielom uwagę na ogromny opór, nawet studentów college'ów, przeciwko rozwiązywaniu zadań na symbolach literowych wbrew oczywistym korzyściom, jakie on niesie. Arons uważa, iż wymogi sprawdzianów i egzaminów zmuszają studentów do nabycia biegłości w rozwiązywaniu zadań na symbolach.

Arons ma rację. Wielu studentów, którzy uchwycili sedno ułatwień rozwiązywania na symbolach z przyjemnością, ale czasem i bezmyślnie z tego korzysta. Manipulacją symbolami można ukryć niewiedzę. Ci, którzy tego jednak nie uchwycili, stawiają opór. Jest rzeczą subtelnego wyczucia, kiedy należy uczniów pchnąć w tory rutyny – nie za wcześnie, by nie stłumić myślenia wchodzącego w sedno problemu i nie za późno, by nie opóźniać możliwości rozważania trudniejszych problemów.

Można wyróżnić dwie grupy studentów stawiających opór przy rozwiązywaniu zadań na symbolach. Pierwsza to Ci, którzy jeszcze nie doszli do pełni myślenia formalnego; oni wymagają wielu ćwiczeń. Druga grupa – to właśnie studenci zdolni i twórczy – chodzący na skróty.

Okazuje się bowiem, że bardzo zdolni i twórczy uczniowie często omijają rutynowe rozwiązania.

Literatura

[1] Werner Heisenberg, *Część i całość*, PIW, (1987)

[2] *Rozwój pojęć naukowych wg Wygotskiego*, Foton 43, ZD1, str. 38, (1996), a także L.S. Wygotski, *Myślenie i Mowa*, PWN, W-wa (1989)

[3] A. Gajda, *Pojęcie wielkości fizycznej w nauczaniu fizyki w klasie VI*, Fizyka w Szkole Nr 3, s. 169 (1967)

[4] *Poglądy Smoluchowskiego na szkolne nauczanie fizyki*, Foton 43, ZD1, s. 5 (1996), a także M. Smoluchowski, *Poradnik dla Samouków*, tom II, Michalski i S-ka, W-wa (1917)

[5] Z. Krygowska, *Wstęp do Dydaktyki Matematyki*, WSiP, W-wa (1976)

[6] Falk & Herrmann, *Neue Physik, Das Energiebuch*, Schroedel (1981)

[7] Tadeusz Rams, *Matematyka*, 261, s. 274 (1996)

[8] Stanisław Lipiński, *Fizyka 7*, *Zeszyt Ucznia*, OE Krzysztof Pazdro, wyd. I (1994)

[9] Wiesław Harabuda, *Zeszyt ćwiczeń do fizyki, klasa VIII, sem. I*, Wydawnictwo Medium, W-wa (1993)

[10] H. Kaczorek, Z. Słówko, *Zadania z fizyki dla szkoły podstawowej*, WSiP, wyd. III (1992)

[11] H. Siwek, *Naturalne i formalne rozumienie przez uczniów funktorów zdaniotwórczych i kwantyfikatorów w nauczaniu matematyki*, rozprawa doktorska, WSP Kraków

[12] Z. Krygowska, *Matematyka*, **38**, Nr 4 (1955) 21

[13] J.L. Lewis, *Nauczanie fizyki*, PWN (1982)

[14] L. Wygotski, *Myślenie i mowa*, PWN W-wa (1989), a także Foton 43, ZD1, (1996)

[15] Z. Gołąb-Meyer, *Fakty i mity o edukacji w Japonii, cz. I i II*, Foton 9 (1992) 7

[16] G. Bachelard, *La formation de l'esprit scientifique*, Paris, Vrin, (1938), a także Foton 45, ZD2, (1996)

[17] D. Zaremba, *Sztuka Nauczania Matematyki w Szkole Podstawowej*, Gdańskie Towarzystwo Oświatowe, (1993)

[18] L. Viennot, *Bulletin de l'Union des Physiciens* (1982) 479

[19] D. Stachórska, *Uwagi na temat doświadczeń modelowych w nauczaniu fizyki*, Fizyka w Szkole (1984) 167

[20] D. Stachórska, F. Jaśkowski, *Analiza odpowiedzi na pytania otwarte sprawdzianu*, Nr 4, (1984) 213

[21] Z. Gołąb-Meyer, An example of Introduction to Physics Technology, *Neue Physics – Das Energiebuch* of Falk and Herrman, TPJU D8/90

[22] A. Sierpińska, *Pojęcie przeszkody epistemologicznej w nauczaniu matematyki*, Dydaktyka Matematyki, **8**, (1987) 103

[23] G. Rosenow, *Dydaktyka Matematyki*, **13**, (1992)

[24] J. Piaget, *Mowa i myślenie dziecka*, PWN, Warszawa (1992)

[25] J. Gleick, *Genius – The Life and Science of Richard Feynman*, Pantheon Books, NY, (1992)

[26] L. Kvasz, *Od kolejności nauczania zależy jego efektywność*, Foton 24, s. 3 (grudzień 1993)

[27] Frederick Reif, *Teaching problem solving – A scientific approach*, The Physics Teacher, May 1981, s. 310

[28] D.P. Simon, H. Simon, J. Larkin, J. McDermott, *Expert and Novice Performance in Solving Physics Problems*, Science, <u>208</u>, s. 1335 (1980)

[29] F. Reif, J.H. Larkin, *Understanding and Teaching Problem Solving, European Journal of Science Education*, **1**, s. 191 (1979)

[30] Jacques Hadamard, *Psychologia odkryć matematycznych*, Seria Omega (15), PWN (1964)

[31] J. Ulam, *Przygody matematyka* (tłum. z ang.), Prószyński i S-ka, W-wa (1996)

[32] Jerzy Ogar, *Zasady dynamiki w klasie VII*, Materiały pomocnicze dla nauczycieli szkół podstawowych, Jelenia Góra 1991, Zakład Wydawnictw OFEK

[33] H. Aebli, *Dydaktyka psychologiczna*, PWN (982)

[34] S.K. Reed, C.C. Ackinclose, A.A. Voss, Selecting Analogous Problems: Similarity Versus Inclusiveness, *Memory & Cognition*, **18** (1), s. 83 (1990)

[35] J. Salach, *Termodynamika*, Wyd. Zamiast Korepetycji, Kraków (1990)

[36] Jan Lenar, *Matematyka*, Nr 6, s. 374 (1993)

[37] Waldemar Gorzkowski, Fizyka w Szkole, Nr 4 (1996)

[38] J. Ginter, *Kłopoty z adiabatą*, Foton 11, s. 3, (wrzesień 1992)

[39] A.B. Arons, *A Guide to Introductory Physics Teaching*, John Wiley & Sons, NY (1990)

O pewnym zadaniu z kinematyki

Jadwiga Salach, Barbara Sagnowska

WSP Kraków

Od Redakcji (Z.G-M): Przedstawiony poniżej problem jest ilustracją trudności poznawczej jaka występuje przy rozróżnieniu prędkości oddalania się i prędkości względnej np. dwóch pojazdów. Wydaje się, że nie sposób tę trudność pokonać, a nawet zauważyć i uświadomić sobie bez rozwiązania jakiegoś konkretnego problemu. Autorki proponują rozwiązanie poniższego zadania.

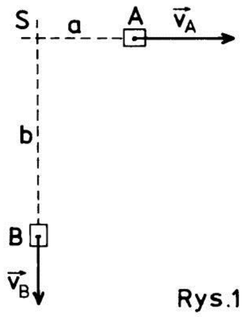
Załóżmy, że pojazd *A* porusza się na wschód z prędkością $\vec{v}_A$, a pojazd *B* z prędkością $\vec{v}_B$ na południe.
W praktyce szkolnej często utożsamia się pytanie o prędkość względną tych pojazdów z pytaniem o prędkość, z jaką pojazdy oddalają się od siebie, podczas gdy prędkości te są identyczne tylko przy spełnieniu dodatkowego warunku.

Sformułujmy temat zadania następująco:

Pojazdy *A* i *B* poruszają się w układzie odniesienia związanym z podłożem, tak jak pokazuje rysunek 1 (prędkości $\vec{v}_A$ i $\vec{v}_B$ są stałe); *a* i *b* oznaczają odpowiednio odległości początkowe (w chwili rozpoczęcia obserwacji) pojazdów od punktu *S*, w którym przecinają się kierunki prędkości $\vec{v}_A$ i $\vec{v}_B$. Obliczyć

1/ prędkość $\vec{v}_W$ pojazdu *A* względem pojazdu *B*,

2/ prędkość $\vec{u}$, z jaką pojazd *A* **oddala** się od pojazdu *B*.



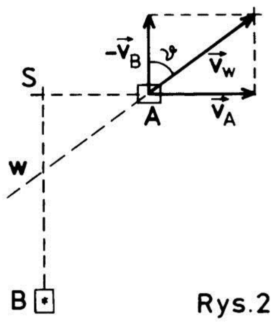
Rys.1

Ad 1)
Pierwsza część zadania jest łatwa. W układzie odniesienia, związanym z pojazdem *B* pojazd *A* ma prędkość

$$\vec{v}_W = \vec{v}_A - \vec{v}_B \qquad \text{o wartości} \qquad v_W = \sqrt{v_A^2 + v_B^2}\,.$$

Wektor $\vec{v}_W$ tworzy z południkiem kąt ϑ, którego tangens wynosi $\dfrac{v_A}{v_B}$.

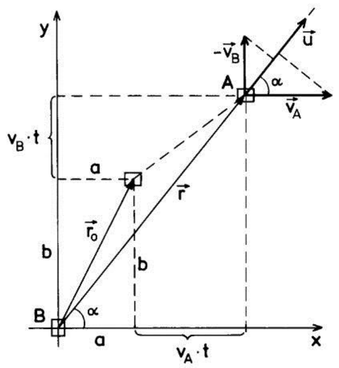
Wektor $\vec{u}_W$ jest więc wektorem stałym, leżącym na prostej *w* (Rys. 2).



Ad 2)

Druga część zadania jest znacznie trudniejsza. Umieśćmy początek układu współrzędnych *x*, *y* (związanego z pojazdem *B*) tak, jak pokazuje rysunek 3. Na tym rysunku $\vec{r}_0$ jest wektorem położenia pojazdu *A* w chwili rozpoczęcia obserwacji $t_0 = 0$), a $\vec{r}$ wektorem położenia tego pojazdu w późniejszej chwili *t*. Z rysunku widać, że

$$r = \sqrt{(a + v_A t)^2 + (b + v_B t)^2}\,.$$



Rys.3

Jeśli uczeń zna pochodne, to szybkość u wzajemnego oddalania się pojazdów (szybkość radialną) może obliczyć następująco:

$$u = \frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt}\sqrt{(a+v_A t)^2 + (b+v_B t)^2} = \frac{2(a+v_A t)v_A + 2(b+v_B t)v_B}{2\sqrt{(a+v_A t)^2 + (b+v_B t)^2}},$$

$$u = \frac{(a+v_A t)v_A + (b+v_B t)v_B}{\sqrt{(a+v_A t)^2 + (b+v_B t)^2}}.$$

Jeśli rachunek różniczkowy nie jest znany, to szybkość wzajemnego oddalania się pojazdów można obliczyć rzutując $\vec{v}_A$ i $\vec{v}_B$ na kierunek prostej łączącej A z B w dowolnej chwili (tzn. na kierunek wektora $\vec{r}$) – Rys. 3.

$$u = v_A \cos\alpha + v_B \sin\alpha,$$

gdzie $\cos\alpha = \frac{a+v_A t}{r}$, $\sin\alpha = \frac{b+v_B t}{r}$, a r obliczono poprzednio. Po wstawieniu otrzymuje się wynik

$$u = \frac{v_A(a+v_A t) + v_B(b+v_B t)}{\sqrt{(a+v_A t)^2 + (b+v_B t)^2}}.$$

Dyskusja wyniku

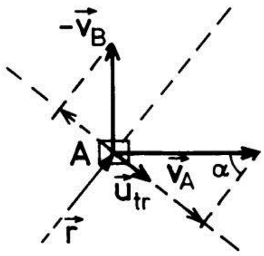
1. Wynik pokazuje, że u w ogólnym przypadku zależy od czasu. Z rysunku 3 widać, że kierunek wektora $\vec{u}$ (zawsze zgodny z kierunkiem wektora położenia $\vec{r}$) wraz z upływem czasu ulega zmianie; tak więc wektor $\vec{u}$ nie jest stały i $\vec{u} \neq \vec{v}_W$, gdy a i b są dowolne.
2. Jeśli przyjmiemy założenie, że zachodzi proporcja: $\frac{a}{b} = \frac{v_A}{v_B}$ (co jest równoznaczne z faktem, że pojazdy w pewnej wcześniejszej chwili równocześnie wyruszyły z punktu S), to eliminując $a = b\frac{v_A}{v_B}$ z otrzymanego wyrażenia na u, po pewnej liczbie przekształceń dochodzimy do wniosku, że $u = \sqrt{v_A^2 + v_B^2} = v_W$. Z rysunku 3 widać, że prosta łącząca pojazdy nie zmienia wtedy położenia w układzie związanym z pojazdem B (wektor $\vec{r}$ będzie miał w każdej chwili taki sam kierunek, jak $\vec{r}_0$).
3. Obliczmy granicę $u(t)$, gdy $t \to \infty$:

$$\lim_{t\to\infty} u(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{(\frac{a}{t}+v_A)v_A + (\frac{b}{t}+v_B)v_B}{\sqrt{(\frac{a}{t}+v_A)^2 + (\frac{b}{t}+v_B)^2}} = \frac{v_A^2+v_B^2}{\sqrt{v_A^2+v_B^2}} == \sqrt{v_A^2+v_B^2} = v_W .$$

Tak więc przy dowolnym stosunku $\frac{a}{b}$, gdy $t\to\infty$, $u\to v_W$, co wiąże się z faktem, że z upływem czasu prosta łącząca pojazdy coraz wolniej się obraca i w granicy staje się równoległa do prostej *w*.

Uwaga

Do tych samych wniosków można dojść inaczej:
szybkość obracania się wektora $\vec{r}$ jest proporcjonalna do szybkości transwersalnej $\vec{u}_{tr}$, którą łatwo obliczyć rzutując $\vec{v}_A$ i $-\vec{v}_B$ na kierunek prostopadły do $\vec{r}$ (Rys. 4).



Rys.4

$$u_{tr} = v_A \sin\alpha - v_B \cos\alpha$$

$$u_{tr} = \frac{v_A(b+v_Bt) - v_B(a+v_At)}{\sqrt{(a+v_At)^2 + (b+v_Bt)^2}}.$$

Gdy $\frac{a}{b} = \frac{v_A}{v_B}$, $u_{tr} = 0$ w każdej chwili, tzn. $u = v_W$, co jest zgodne z wynikiem uzyskanym poprzednio. Gdy stosunek $\frac{a}{b}$ jest dowolny, to obliczając $\lim_{t\to\infty} u_{tr}$, otrzymujemy wartość zero, co oznacza, że w tej granicy wektor $\vec{u}$ staje się równoległy do wektora $\vec{v}_W$, a $u \to v_W$.

Opinia

Barbara Górska
nauczyciel fizyki

Nakładem wydawnictwa AGMEN (01-381 Warszawa, pl. Powstańców Śląskich 20A, tel. 664-42-50) ukazał się *Zbiór zadań z fizyki* Waldemara Zillingera w opracowaniu Janusza Cinaka. Korektę przeprowadził zespół (nazwisk nie podano). Jest to pierwsze wydanie tego zbioru w nowej wersji, gdzie zastąpiono stare jednostki CGS obowiązującymi jednostkami SI. Zbiór posiada zadania z działów: mechanika, ciepło, akustyka, elektryczność, prąd elektryczny, optyka i zadania różne. Dwa ostatnie działy redaktor zapomniał umieścić w spisie treści nazwanym przez siebie „Przedmową". Do wszystkich zadań podane są wyniki, a wiele z nich pan J. Cinak rozwiązał. Numery rozwiązanych zadań podane są w spisie treści, po każdym dziale, z pominięciem oczywiście optyki i zadań różnych. We właściwej przedmowie redaktor informuje nas, że *Zbiór* jest przystosowany do aktualnego programu nauczania, wprowadzono niezbędne zmiany i zmodyfikowano go, a (...) „Po unowocześnieniu *Zbioru* z przekonaniem rekomendujemy go Nauczycielom i Uczniom szkół średnich".

Układ *Zbioru* jest czytelny, posiada 272 strony, a kosztuje 12,6 złotych. Pan J. Cinak stara się kopiować zadania autorstwa Waldemara Zillingera, lecz wprowadza swoją symbolikę. Powoduje to, że *Zbiór* jest niespójny z podręcznikami i z samym sobą. Na przykład w zadaniu 102 gęstość ma symbol γ, a w zadaniu 103 δ. Masa ciała, jak ogólnie wiadomo ma symbol *m*, a w zadaniu 112, użyto symbolu *P*. Symbolu tego używa też redaktor w zadaniu 158 dla ciśnienia. W tym samym zadaniu ciśnienie zewnętrzne oznakowano *p*. Młodzież po ukończeniu szkoły podstawowej przyzwyczajona jest do symbolu *P* jako symbolu mocy. Na stronie 84 w zadaniu 832 moc oznakowano *M* niepotrzebnie, gdyż autor już poprzednio używa *P*. W zadaniu181 i 182 szerokość geograficzna ma symbol ϕ, podręczniki geografii podają Φ. Także ϕ wprowadzone zostało jako przyspieszenie kątowe w zadaniach 485, 487, 488. Podręczniki do fizyki dla tej wielkości podają symbol ε. Zbiór zadań Zillingera, którego szesnaste wydanie ukazało się w 1971 roku, podaje symbol prędkości *v* zgodnie z podręcznikami. W nowym wydaniu zastąpiono go symbolem ν, który rezerwujemy dla częstotliwości. Zadanie 841 informuje nas „spirala oporowa pod napięciem *V* = 3 wolty", a przecież wszyscy wiemy, że powinno być „spirala oporowa pod napięciem *U* = 3 V". W tym wydaniu pojawia się w zadaniu 753 symbol *F* dla pojemności, zamiast przyjętego *C*. Wprawdzie symbolika jest sprawą umowną, ale dla ucznia dość istotna. W tym zbiorze zadań symbolika – jak widać – pozostawia wiele do życzenia.

Zajmę się teraz treścią niektórych zadań. Zadanie 111 – „Probówka ze śrutem waży P = 0,020 kg...”, jeżeli waży, to w niutonach, a jeżeli podajemy jednostkę w kg, to ma masę. Prawidłowo powinno być „Probówka ze śrutem ma masę m = 0,02 kg”. Zadanie 368 w dziale „Praca, energia, moc” ma następującą treść „Młot o masie $m1$ = 300 kg spada z wysokości h = 3 m na krążek żelazny o masie $m2$ = 2 kg. O ile stopni wzrośnie temperatura tego krążka? Ciepło właściwe żelaza γ = 750 J/kg K”. To zadanie powinno się było znaleźć w dziale „Ciepło”, a w treści zadania informacja, ile procent energii przekazał młot krążkowi. I tu również zwracam uwagę na symbol γ. Niepotrzebnie redaktor zmienia treść tego zadania. W oryginale brzmiało ono „Młot o masie m_1 = 300 kg spada z wysokości h =3 m na pal drewniany o masie m_2 = 200 kg i wbija go w ziemię na głębokość s = 1 cm. Oblicz opór stawiany przez ziemię”.

W treści zadania 869 czytamy „... 1 mol (ilość gramów równa liczbowo masie atomowej)...”. Informacja w nawiasie nie jest definicją mola i nie powinno jej być w zadaniu. Również na stronie 243 pojawia się objaśnienie, że „...1 mol jest to ilość substancji odpowiadająca liczbowo masie atomowej lub cząsteczkowej wyrażonej w gramach”. Jak podają podręczniki do chemii 1 mol jest ilością substancji o ściśle określonej ilości molekuł i posiada on masę, liczbę gramów substancji liczbowo równą jej masie atomowej lub cząsteczkowej. Wydaje mi się, że takie objaśnienie bardziej przemawia do młodego czytelnika. Zadanie 858 w rozwiązaniu na str. 243 czytamy odpowiedź: „Masa atomowa chloru wynosi 35.46. Masy atomowe podaje się w jednostkach u, ale ze względu, że jest to fakt powszechnie znany, w zapisie pomija się literkę u i podaje masę atomową (lub cząsteczkową) jako liczbę nie mianowaną”. Dla ucznia ten fakt nie musi być powszechnie znany i pomijanie jednostek nie powinno mieć miejsca. Przeglądając rozwiązania zadań zwróciłam uwagę, że autor rozwiązań wielokrotnie pomija przeliczenie jednostek. Skoro podaje się pełne prawidłowe rozwiązanie to przeliczenie jednostek powinno być zamieszczone. W zbiorze tym stwierdziłam brak jednostki (1/K) współczynnika rozszerzalności liniowej (zad. 579, 581, 582 i innych), a stała Faradaya ma jednostkę „kulomb” (zad. np. 863, 864), zamiast „C/mol” obowiązującą w układzie SI[1]. W podanych rozwiązaniach znalazłam dość poważny błąd. Dotyczy on zadania 43, a właściwie jego

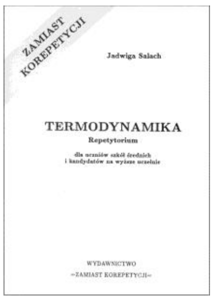
[1] Od Redakcji /J. S./: Ogólnie nie jest prawdą, że stałą Faradaya wyraża się w C/mol. Stała Faradaya jest równa iloczynowi $N_A \cdot e$, zatem można powiedzieć (jak to robią niektórzy chemicy), że jest ona ładunkiem 1 mola elektronów lub 1 mola jonów jednowartościowych. Jeśli jednak podczas elektrolizy ku elektrodzie dążą jony dwuwartościowe, to stała Faradaya informuje, jaki ładunek przeniesie $\frac{1}{2}$ mola tych jonów, jeśli trójwartościowe – jaki ładunek przeniesie $\frac{1}{3}$ mola tych jonów itd. W ogólnym przypadku stała Faradaya oznacza ładunek, jaki przenosi 1 gramorównoważnik substancji. Zatem stała Faradaya powinna się wyrażać w C/gramorównoważnik. Tak jest np. w podręcznikach: Sz. Szczeniowski, *Fizyka doświadczalna*, cz. III, str. 53, B. Jaworski, A. Dietłaf, L. Miłkowska, *Kurs fizyki 2*, str. 180.

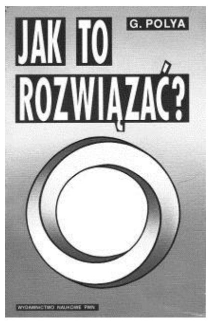
rozwiązania. Na str. 126 podano wzór $\frac{Pl}{2(P+m)}$, „*P*” ma jednostkę niuton, „*m*” kg. Jak można to wykonać?! Na str. 127 we wzorze do zad. 67 pan J. Cinak dodaje centymetry kwadratowe do centymetrów. Jest to dokładnie przepisane z oryginału bez przeliczenia. Nie twierdzę, że *Zbiór zadań z fizyki* W. Zillingera był bez błędów. Podejmując się jednak tak odpowiedzialnego zadania jak przygotowanie podręcznika dla uczniów, redaktor powinien był to zrobić bardzo dokładnie i starannie. Zadania powinny być przeliczone. Biorąc pod uwagę te braki stwierdzam, że tak niedbale opracowana książka nie nadaje się do rekomendacji i powinna być wycofana.

Co czytać

Koniecznie grudniową *Deltę* poświęconą Kartezjuszowi (400 lecie urodzin). Znajdą Państwo w *Delcie* m.in. artykuły:
Romana Murawskiego *Kartezjusz – matematyk*,
Romana S. Ingardena *Kartezjusz i fizyka*,
Michała Tempczyka *Kartezjusz – ojciec nowożytnego racjonalizmu*.

Kartezjusz to jeden z wielkich, którzy pokonywali przeszkody poznawcze w nauce. To właśnie on otworzył szeroko wrota w naukach przyrodniczych dla matematyki.





Komunikaty

SPOTKANIA ŚRODOWE

IFUJ, PTF Sekcja Nauczycielska, WOM-Kraków
Kraków, ul. Reymonta 4, parter - sala 055

Uprzejmie informujemy, iż w **środy o 16^{00}** w Instytucie Fizyki UJ odbywają się wykłady i pokazy dla młodzieży szkół średnich. Informacje o wykładach rozprowadza Krakowski WOM.

Nauczyciele i szkoły, które przyślą zaadresowane do siebie koperty będą otrzymywać informacje pocztą.

Bardzo prosimy zgłaszać uczestnictwo telefonicznie (33 63 77 w. 563).
Z przyczyn losowych terminy mogą ulec przesunięciu.

15. I. 1997 doc. dr hab. Karol Musioł – wykład z pokazami: *O różnych źródłach światła*

26. II. 1997 prof. dr hab. Krzysztof Tomala – wykład i pokazy: *Nadprzewodnictwo*

marzec 1997 *Fizyka dźwięku*

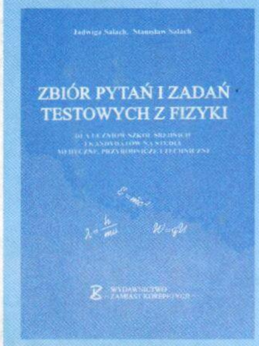
kwiecień 1997 dr Jerzy Zachorowski (temat w terminie późniejszym)

PTF Konwersatorium, IFUJ, ul. Reymonta 4

9 styczeń 1997, <u>czwartek</u>, g. 17^{15}

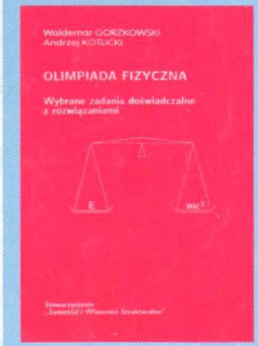
Prof. dr hab. Łukasz Turski (Centrum Fizyki Teoretycznej PAN, W-wa) – *Nauka i paranauki – O zaklinaniu wody w Internecie*

Polecamy



Jadwiga Salach, Stanisław Salach, "Zbiór pytań i zadań testowych z fizyki", Wydawnictwo "Zamiast Korepetycji", Kraków 1996.

Książka (...) jest najlepszym zbiorem zadań, jaki dotąd miałam w rękach. Osoby, które zamierzają zdawać fizykę na egzaminie wstępnym lub te, które myślenie ściste uważają za element rozwijający ogólną inteligencję, będą w pełni usatysfakcjonowane (A. Czerwińska)



Waldemar Gorzkowski, Andrzej Kotlicki, "Olimpiada Fizyczna. Wybrane zadania doświadczalne z rozwiązaniami", Stowarzyszenie "Symetria i Własności Strukturalne", Poznań 1994

Książka (...) zawiera wyselekcjonowane zadania doświadczalne z kilkudziesięciu Olimpiad Fizycznych. Zamieściliśmy tu 50 wybranych zadań spośród ponad dwustu, które były na zawodach olimpijskich. (...) Wybierając zadania staraliśmy się zachować te, które naszym zdaniem są kształcące i ciekawe. Treść zadań zachowaliśmy w wersji możliwie zbliżonej do oryginału.

Waldemar Gorzkowski, "Zadania z fizyki z całego świata z rozwiązaniami. 20 lat międzynarodowych olimpiad fizycznych", Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1994

Rozwiązania zadań zostały przedstawione na ogół szerzej niż tego wymaga się od zawodników. Często zawierają one rozszerzoną analizę tematyki, a także rozmaite uwagi krytyczne i metodologiczne. Przeznaczona jest ona dla wszystkich, krórzy interesują się fizyką.